





Bonnart inv. et del. Herisset Sculp.

Geometria plura præsidia præstat Architecturæ. Vitruv. L. I. c. I.

LA THEORIE ET LA PRATIQUE DE LA COUPE DES PIERRES ET DES BOIS,

POUR LA CONSTRUCTION DES VOUTES

Et autres Parties des Bâtimens Civils & Militaires,

OU

TRAITÉ DE STEREOTOMIE

A L'USAGE DE L'ARCHITECTURE,

Par M. FREZIER, Chevalier de l'Ordre Militaire de Saint Louis, Ingenieur ordinaire du Roy en Chef à Landau.

TOME PREMIER.



A STRASBOURG,
Chez JEAN DANIEL DOULSSEKER le Fils, Marchand Libraire à l'entrée de la Ruë dite Flader-Gaſs,

A PARIS,

Chez L. H. GUERIN l'aîné, Ruë St. Jacques, vis-à-vis St. Yves.

M DCC XXXVII.


WELLCOME
HISTORICAL

AVERTISSEMENT.

Avant que de commencer à lire, il faut corriger à la marge, avec la plume ou du crayon, les fautes marquées ci-après dans l'*Errata*; parce que les unes rendent le discours inintelligible, & les autres le raisonnement faux; il en est de même des additions à faire pour remplacer les omissions.

Il est des fautes qu'on n'y a pas compris, parce que le Lecteur peut les corriger de soi-même, comme sont celles de la suite des chiffres, des cottes des Problêmes, Chapitres, &c. aux pages 151, 156, 159, 174, 191, 194, 196, 319, 323.

Je prie le Lecteur de supléer à celles qui auront pû m'échaper, tant dans l'impression que dans la gravure des Planches, en consideration de ce que l'impression a été faite loin de moi, & que les occupations de mon état, qui sont continuelles pendant l'Eté, m'ont empêché de revoir avec attention l'Imprimé tel qu'il est.

ERRATA.

Pages.	*Lignes.*	*Fautes.*	*Corrections.*
IX	32	autres	Auteurs
3	37	paſſent	poſent
7	18	Stereometrie	Stereotomie
20	34	le diametre	le demi diametre
24	1	un axe	un angle
31	*en marge*	PLANCHE 2	PLANCHE 1
39	34	Ellipſe	Egliſe
42	30	celles	elles
49	32	Ellipſe	Ellipſimbre
53	25	d'Ellipſe	d'Egliſe
60	8	comme	par exemple
89	21	QUELQUE	QUELLE que
90	19	quelques	quels que
212	11	leſquels	ſur leſquels
ibid.	27	*a* B	*a* P
223	8	obligantes	obligeantes
228	20	*eſt connuë*, ajoutez	*étant donnez*,
272	4	deſſein	diſcours
282	8	coin	coins
296	35	égale	égal
390	20	d'arc	d'arcs
393	1 & 2	d'allignement	d'alignement
394	25	*cherche*	*CERCHE*
400	31	arc	axe
401	22	*lavigare*	*levigare*

OMISSIONS.

Page 21 en marge vis-à-vis la ligne 6. ajoutez, *Voyez le Problême à la page* 223

Page 213 ligne 3. après X*x* (*ajoutez*) au point G, qui repréſente le centre de la Sphère, duquel & avec le même rayon on décrira des arcs, qui couperont la ligne X*x*.

TRANSPOSITION.

La Page 377 devoit commencer par la Démonſtration qui a été miſe à la page 286, ligne 31.

DISCOURS



A MONSEIGNEUR
LE MARQUIS D'ASFELD,
MARECHAL DE FRANCE,
CHEVALIER DE L'ORDRE DE LA TOISON D'OR,

Commandeur de l'Ordre de Saint Louis, Gouverneur des Ville & Citadelle de Strasbourg, Directeur General des Fortifications de France, General des Armées du Roy.

ONSEIGNEUR,

J'ai l'honneur de VOUS présenter le Fruit du loisir que m'ont laissé les Saisons, qui interrompent les Tra-

vaux des Fortifications. Occupé pendant les Etés à exécuter Vos ordres pour augmenter les Forces d'une Place des plus considerables de la Frontiere, j'ai passé quelques parties des Hyvers, depuis mon second retour de l'Amerique, à mediter sur les moyens de faire avec justesse, solidité & propreté toutes sortes de Voûtes, de quelque figure qu'on les puisse proposer, ayant reconnu par ma propre experience, que cette partie de l'Architecture, qui est sans contredit la plus difficile, étoit souvent necessaire à un Ingenieur. Et comme les Auteurs qui ont traité de cette matiere, se sont bornez à dresser des Ouvriers dans une routine quelquefois peu exacte, je me suis proposé d'instruire ceux qui les conduisent, des raisons Geometriques des Traits *qu'on y met en œuvre, persuadé qu'il convient à un Officier d'avoir autant de superiorité de Science, que d'autorité sur les Artisans qu'il employe dans les Travaux du Roy. La Theorie est l'ame des Arts aussi-bien que des Sciences; Le Grand Prince qui Vous a préposé aux Fortifications du Royaume, a fait voir qu'Il étoit convaincu de cette verité, lorsqu'il vous a choisi préferablement aux Officiers du Corps des Ingenieurs pour les diriger. Il sçavoit qu'une profonde intelligence dans l'Art de la Guerre étoit la premiere Theorie des Fortifications; sur ce principe, Il a jugé que personne ne pouvoit mieux que Vous décider de*

leur convenance, & de leur position suivant la situation des Lieux, & que les Ingenieurs ne devoient agir qu'en consequence de cette premiere détermination.

Il avoit connu par Lui-même en Espagne votre Capacité dans l'Art d'attaquer les Places fortes, par les Sieges que Vous y avez faits sous ses yeux, & que vous avez heureusement conduit à une prompte fin, comme à Castel-David & à Portalegre, que vous avez emporté l'Epée à la main; à Xativa & à Denia, que vous avez emporté d'Assaut, malgré la résistance la plus opiniâtre qu'on ait fait depuis plusieurs siecles; de même qu'à Alcira, & aux Ville & Château d'Alicante, sans compter le Siege de Barcelone, où Vous avez eu beaucoup de part. Dans toutes ces occasions ce Prince avoit reconnu le fruit des Leçons des grands Maîtres, que Vous aviez pris dans les Sieges, où vous avez servi avec distinction dès votre Jeunesse, comme à Luxembourg, à Mons, à Namur, à Traerbach, à Brisack, aux deux Sieges de Landau & à Fribourg. Il n'étoit pas moins sûr de votre capacité dans l'Art de deffendre; informé que dans la vigoureuse résistance que fit Monsieur votre Frere à Bonn, dans laquelle il a glorieusement terminé sa vie, vous ne repoussâtes pas seulement les Ennemis à l'attaque du chemin couvert, mais vous les chassâtes d'une Demie-Lune dont ils s'étoient emparez. Il sçavoit

encore combien Vous vous étiez distingué à la Deffense de Namur dans plusieurs Actions qui avoient roulé sur Vous, & particulierement aux deux assauts du Château, où vous repoussâtes les Ennemis qui y étoient entrez & s'étoient emparez d'un Corps de Cazernes.

Enfin, après avoir acquis par une brillante experience la connoissance de l'usage des Fortifications, Vous avez laissé à l'Espagne un precieux Monument de votre Science dans l'Art de fortifier, par les beaux Ouvrages que vous avez fait faire à Tortose, qui ont rendu cette Place, de l'aveu même de Sa Majesté Catholique, une des plus fortes de son Royaume; c'est ainsi qu'il s'en est expliqué dans l'énumeration des Services importans que vous lui avez rendus.

Ce seroit icy le lieu de parler de la Conquête du Royaume de Mayorque, que Vous lui avez soumis en un mois de tems, & d'entrer dans le détail des Actions Héroïques qui vous ont merité les marques de sa reconnoissance, par les honneurs de la Toison d'Or, & d'autres Dignités Militaires en France; mais arrêté par votre ordre qui m'impose silence, & par la brieveté d'une Epitre, je me vois forcé avec douleur d'abandonner cette ample & belle matiere aux Historiens de la vie de Philippe Quint & de Louis XIV, qui profiteront de ce qui auroit pû rendre

la lecture de cette Epitre interessante à toute sorte de Lecteurs.

Les curieux du Blazon y auroient trouvé pourquoi on voit les Armes du Royaume de Valence au milieu de votre Ecusson. Les Gens d'une vertu épurée y auroient vû avec plaisir des Traits d'une Grandeur d'ame à l'épreuve de tout interrêt, même du plus legitime. Les Politiques y auroient vû l'art de ramener les Rebelles à l'obéïssance de leur Souverain, & de concilier dans le Gouvernement la crainte & l'affection des Sujets par une exacte observance de la Justice & des Loix, qui peuvent contribuer à la tranquillité publique, en menageant le Sang des Peuples, & en préferant les voyes de la Clémence à la gloire des Actions d'éclat. Les Grands Capitaines y auroient vû des moyens ingenieux de prévenir une Déroute. Les Generaux y auroient remarqué ceux de faire subsister les Armées, & de trouver dans des Païs peu abondans les Munitions & les Provisions des Sieges, sans lesquelles les Entreprises les mieux concertées sont sujettes à échoüer. En effet après que l'Armée Navale des Ennemis eut enlevé notre Convoy, si M. le Duc d'Orleans n'avoit pas trouvé les ressources de Vivres & de Munitions de Guerre, que Vous aviez rassemblé sans ordre par un excès de prévoyance, & la nombreuse Artillerie que vous aviez fait fondre de votre

propre mouvement, auroit-il pû faire le Siege de Tortose, & fermer aux Ennemis, par la prise de cette Place, l'entrée des Royaumes de Valence & de Murcie, qui leur étoit ouverte par la perte de la Bataille de Zaragoça? Enfin les bons Critiques de l'Histoire s'y seroient confirmez dans la juste défiance où l'on doit être sur ce qu'avancent de certains Ecrivains, qui hazardent sur de frivoles récits des Faits, dont la fausseté décrédite l'Histoire; telle est dans la Préface d'un Commentaire celui de la Bataille d'Almanza. Sans citer ici les Témoins oculaires, qui sont en aussi grand nombre que les hommes, qui ont eu part à cette action, j'aurois pû produire un témoignage, qui vaut seul tous ceux qu'on peut rassembler de l'une & de l'autre Armée; c'est celui du Roy d'Espagne, qui bien informé de la part que Vous aviez au gain de cette Bataille, s'explique en ces termes sur la maniere dont vous y avez contribué, dans les Lettres-Patentes, dont Sa Majesté Vous agratifié le 30. Avril 1715. datées de Buen-Retiro. „ *L'Armée des Ennemis* (c'est S. M. C. qui „ parle) *ayant attaqué celle des deux Couronnes à Al-„ manza le 25. Avril 1707. & fait plier la droite „ de notre premiere Ligne par le grand feu de leur Infan-„ terie soutenu de leur Cavalerie, Vous, qui comman-„ diez la droite de la seconde Ligne, les chargeâtes avec „ tant de valeur que vous mîtes leur gauche en deroute,*

„ *d'où vous marchâtes contre leur droite, & malgré*
„ *la bonne contenance avec laquelle elle se retiroit, vous*
„ *les chargeâtes si à propos que vous l'obligeâtes de pren-*
„ *dre la fuite,* ce qui acheva le gain de la Bataille. „ *Le jour suivant vous leur fites prisonniers de Guerre cinq Bataillons Anglois, cinq Hollandois & trois Portugais, &c. Si l'on compare ce récit d'un Roy à celui d'un Particulier, qui a écrit sur de mauvais Mémoires, on verra combien on doit être en garde contre les surprises dans l'étude de l'Histoire. Je suis charmé,* MONSEIGNEUR, *d'avoir trouvé l'occasion de mettre en évidence la vérité de ce Fait; mais je le serois beaucoup plus si Vous me permettiez de donner place ici à un grand nombre d'autres de pareille nature, qui ont été justement récompensez de la plus haute Dignité de l'Etat Militaire; ajoûtons enfin qu'ils ont été glorieusement terminez par la prise de Philisbourg, que vous avez acquis à la France, malgré les obstacles de la Nature & de l'Art, en présence des Forces de l'Empire, rassemblées sous la conduite d'un des plus Grands Géneraux de notre siecle, Vous ouvrant une route au travers du Feu & des Eaux d'un Fleuve débordé. J'espere,* MONSEIGNEUR, *que Vous me pardonnerez d'avoir passé les bornes étroites que vous aviez préscrites à cette Epitre, quand vous ferez attention que ce seroit trop mortifier l'amour propre d'un Subalterne,*

que de l'empêcher de publier la Gloire de ſon Commandant ; il ſemble qu'il en réjaillit un peu ſur lui, & qu'il eſt honnorable d'être ſous les Ordres d'un Géneral qui commande par de bons Titres ; il m'en reſte encore aſſez à dire pour me croire en droit de me plaindre d'être obligé de paſſer ſous ſilence des Actions dignes de l'Ancienne Vertu Romaine ; ce n'eſt pas ſans peine que je ſacrifie le plaiſir de les raconter au devoir de l'obéïſſance. Je Vous prie du moins, MONSEIGNEUR, *de m'en tenir compte, comme d'une marque de ma parfaite ſoumiſſion à vos Ordres, & du profond reſpect avec lequel je ſuis,*

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéïſſant Serviteur
FREZIER.



DISCOURS PRELIMINAIRES,

PREMIEREMENT,

SUR L'UTILITÉ DE LA THEORIE Dans les Arts relatifs à l'Architecture.



JE me propose dans cet Ouvrage de donner la Theorie des Sections des Corps, autant qu'elle est necessaire à la démonstration de l'usage qu'on en peut faire en Architecture pour la construction des Voutes, & la *COUPE DES PIERRES ET DES BOIS*, ce que personne n'avoit encore fait ; & parce que je prends une route differente de ceux qui ont traité de cette Matiere, qui se sont tellement bornez à la Pratique, qu'ils semblent mépriser la Theorie, ou l'ignorer : je vais tâcher d'en établir l'utilité.

VITRUVE, qu'on peut citer pour un bon Connoisseur dans les Arts, parce qu'il est reconnu pour un fameux Architecte, & qu'il étoit de plus Ingenieur d'Auguste, y distinguoit deux choses, (*) sçavoir, *l'Ouvrage* &

(*) *Ex duabus rebus singulas Artes esse compositas, ex opere & ejus* RATIOCINATIONE; *ex his autem unum proprium esse eorum, qui singulis rebus sunt exercitati id est operis effectus ; alterum commune cum omnibus Doctis*, id est *RATIOCINATIO.*

le *Raisonnement*; l'une, dit-il, est l'affaire des Gens qui en ont fait apprentissage; l'autre est du ressort des Sçavans. Tout le monde ne pense pas aussi juste que lui; une grande partie des hommes connoissent si peu la nature des Arts, qu'ils croyent que l'on ne peut s'y rendre habile que par l'experience; ils regardent la Theorie comme une occupation vaine, qui n'a pour objet que des chimeres, dont les Arts ne retirent aucun avantage. (*) On a vû, disent-ils, de Grands Hommes dans l'Architecture Civile, & même dans la Militaire, qui se sont distinguez par leurs Ouvrages sans être Geometres ni Algebristes, donc on peut se passer de ces Sciences pour devenir habile dans les Arts.

Pour répondre à ce faux raisonnement, que bien-des gens tâchent de faire valoir par l'intérêt qu'ils ont de l'établir, je dirai qu'absolument parlant, à la réserve de la nourriture, les hommes peuvent se passer de tout, même d'habits dans les Païs froids, témoins les anciens Gaulois nos Ancêtres, & plusieurs Nations de Sauvages; mais puisque la Nature nous a destinez au travail, & que moyennant un peu d'application elle nous donne l'industrie d'ajouter une infinité d'agrémens & de commoditez aux Ouvrages de ceux qui nous ont précedé, & de concilier la beauté & la solidité des Edifices, qui nous garantissent des injures de l'air & des insultes de nos ennemis, il semble que ce n'est pas agir en hommes raisonnables, que d'attendre que l'experience nous fasse sentir nos besoins; mais que nous devons réflechir aux moyens de pourvoir à ceux, qui peuvent nous arriver dans l'exécution de nos desseins, & de combiner ces moyens de tant de manieres differentes, que nous choisissions toujours les plus sûrs, les plus courts & les plus faciles, ce qui est réservé à la seule Theorie.

Galli super Umbilicum erant nudi. Tite-Live l. 22. c. 46.

Qu'on me permette ici une comparaison pour rendre cette verité plus sensible; avant qu'on eût formé les Grands Chemins par des Chaussées droites, solides, & de largeur commode, on communiquoit comme aujourd'hui d'une Ville à une autre, mais on demeuroit bien plus longtems en chemin, on éprouvoit une plus longue fatigue, on étoit sujet à demeurer embourbé, & souvent à s'égarer.

Avant qu'on eût consulté la Geometrie & la Mechanique en Architecture, on faisoit des Voutes des mêmes Materiaux qu'aujourd'hui; mais on ne pouvoit s'assurer de l'équilibre de l'effort de leur *Poussée*, & de la résistance des *Piédroits* qu'il tend à renverser; de sorte que ne sçachant garder un milieu convenable entre le trop & le trop peu de leur épais-

(*) Voyez les *Pensées critiques sur les Mathematiques* par Cartaud, qui ose avancer que les Mathematiques ont peu contribué à la perfection des beaux Arts. *A Paris* 1734.

ſeur, on étoit ſujet à y conſommer une dépenſe ſuperfluë en materiaux, ou à les voir s'écrouler par trop de foibleſſe : l'experience nous en fournit encore aſſez ſouvent des exemples, à la honte de ceux qui ſe mêlent de conſtruction ſans connoiſſance de Geometrie ni de Mechanique, & au grand dommage de celui qui fait bâtir. On faiſoit auſſi des Ceintres de differentes eſpeces, Circulaires, Surbaiſſez, Surhauſſez & Rampans; mais on ignoroit quelle étoit la Courbe, qui leur convenoit le mieux dans les circonſtances des Termes donnez. On rencontroit dans l'exécution des difficultez qu'on n'avoit pas prévû, & qu'on ne ſçavoit réſoudre que comme le nœud Gordien, en démoliſſant & recoupant pluſieurs fois les parties de Voutes qui ne quadroient pas, juſqu'à ce que l'œil fût moins offenſé de leur difformité, d'où il réſultoit beaucoup de perte de tems & de Materiaux; & parce que le tâtonnement n'a de ſuccès que par hazard, de tels ouvrages duroient peu, coûtoient beaucoup de façon, & ſatisfaiſoient rarement la vûë & l'eſprit des Connoiſſeurs.

D'OU vient donc que les Praticiens mépriſent la Theorie, & la comptent pour rien au prix de l'experience qu'ils ne ceſſent de vanter? j'en trouve deux raiſons : la premiere, c'eſt pour détourner la honte qu'ils ont de ne pouvoir rendre d'autre raiſon de leurs Ouvrages, que celle de l'imitation de ceux qui paſſent pour bons, & de la convenance qu'ils ont remarqué dans la pratique, ſentant bien qu'ils ne ſont pas aſſez éclairez pour remonter à la cauſe. Cette raiſon eſt tirée de la vanité du cœur humain; l'homme pour s'élever ſur ſes égaux affecte de mépriſer les choſes qui lui manquent, & cherche à faire parade du peu qu'il poſſede; de-là vient, qu'on ſe mépriſe réciproquement dans le monde, & que la ſcience, dont la beauté & l'utilité ſont peu connuës de la multitude, n'eſt pas élevée au rang qu'elle doit tenir audeſſus de la ſeule pratique; l'inattention & ſouvent le défaut de lumiere des gens en place favoriſent les faux jugemens que l'on porte ſur le mérite de la routine; puiſqu'on voit, que la peine de travailler à acquerir des connoiſſances utiles aux beſoins de la vie, ou à l'ornement de l'eſprit, eſt ordinairement très-inutile pour la fortune; c'en ſeroit aſſez pour énerver toute émulation, arrêter les progrès des Arts, & rappeller la barbarie des Siecles d'ignorance, ſi la Nature n'avoit pourvû à l'aveugle injuſtice des hommes. Elle a attaché à cette peine la récompenſe d'une ſatisfaction intérieure, (*) qui eſt ſeule capable de la ſoutenir contre les dédains d'une ſtupide indifference, ou d'une préſomptueuſe ignorance. En effet ſans les attraits des Sciences, & un certain amour de la Vertu, qu'eſt-ce qui pourroit engager un homme ſenſé à conſacrer ſes veilles ſans intérêt, au ſeul bien du Public, qui fourmille de gens plus diſpoſez à la critique qu'à la reconnoiſſance, à

(*) *Virtutum precium in ipſis eſt, & rectè facti merces eſt feciſſe.*

relever les moindres fautes, qu'à leur faire grace en faveur de ce qui doit plus mériter leur attention & leur applaudiſſement ?

La ſeconde raiſon de ceux qui préferent la ſeule Pratique à la Theorie ; peut être ſincerement déduite du fond de leur ignorance, parce qu'ils lui attribuent les effets de la Theorie qui leur eſt inconnuë. Daviler, fameux Auteur en Architecture, nous en fournit une preuve, & un exemple comique à la page 237. *La ſeverité des Régles de Geometrie,* dit-il, *eſt inferieure à la Pratique, comme LA METHODE DES CHERCHES RALONGE'ES VAUT MIEUX QUE LES FIGURES GEOMETRIQUES, d'autant qu'en cet Art la Pratique eſt préferable à la Theorie* : On ne peut s'empêcher de rire d'une pareille déciſion, qui montre évidemment que le Juge n'entend pas l'état de la queſtion, & qu'il veut fronder ce qu'il ne connoît pas ; en effet, s'il avoit ſçû que la *Cherche ralongée* tirée du plein ceintre, du ſurhauſſé ou du ſurbaiſſé, étoit une Ellipſe très Geometrique, il n'auroit pas tenu ce langage ridicule. La plûpart des gens ſans Theorie parlent & penſent comme lui; parce que faute de principes ils n'arrivent qu'avec de grands efforts & une longue ſuite de pratique à quelques foibles connoiſſances des choſes, qui ſont les plus aiſées à ceux qui ont de la Theorie ; de-là vient qu'ils font grand cas des moindres, & ſe croyent de grands hommes pour s'être frayé quelques routes un peu aiſées dans la Pratique, quoique ces prétendus Inventeurs ne puiſſent s'aſſûrer de la juſteſſe ni de la réüſſite de leurs operations tâtonnées, dont il ne voyent ni la difference des cas, ni la preuve ; de ſorte qu'ils croyent ſouvent avoir bien réüſſi, lors même qu'ils n'ont fait qu'approcher de la verité, & qu'ils n'ont pas pris la voye la plus ſûre & la plus courte ; cependant parce qu'ils ne connoiſſent pas d'autre moyen pour y parvenir que l'experience, ils ne penſent pas qu'il y aît de meilleur maître, appuyez ſur le proverbe qu'ils citent à tout propos, *Experientia rerum magiſtra.*

Je ne prétends pas ici diminuer le mérite de l'experience, j'en connois la neceſſité en pluſieurs choſes ; par exemple, en Phyſique elle fait appercevoir des objets & des effets ſur leſquels on n'étoit pas prévenu par le raiſonnement ; perſonne ne doute qu'elle ne ſoit indiſpenſablement neceſſaire dans les Arts qui dépendent de l'habitude, & dans ceux qui ſont Problêmatiques, comme la Guerre ; mais elle l'eſt beaucoup moins dans ceux qui émanent des Sciences, c'eſt un guide équivoque, comme le bâton d'un aveugle, qui ne lui ſert à ſe conduire que très-imparfaitement, en ce qu'il ne lui indique pas ſi bien les objets qu'il ne puiſſe prendre l'un pour l'autre, & ſe précipiter ſi le cas y arrive.

Cette diſtinction indique ce que l'on doit penſer ſur la Science

& l'Experience neceſſaire à un Ingenieur; puiſque ſon Etat tient à la Guerre & aux Arts dépendans des Mathematiques; ce ſeroit mal décider contre la Theorie, que de citer des Gens élevez aux dignitez par les Actions militaires, quoique bornez à une ſimple routine de conſtruction; les récompenſes dûës à la Valeur n'annoncent qu'une partie du mérite d'un Homme de guerre, laquelle ne ſuffit pas pour un Ingenieur. Ceux de l'Antiquité étoient ſçavans; leurs merveilleuſes inventions dans les Sieges nous le prouvent aſſez; & quoique depuis la décadence des Romains les Sciences ayent en quelque façon fait divorce avec la Guerre (car il n'eſt plus de ces hommes propres à être ſur le Trône de la Juſtice, & à la Tête des Armées) cette ſéparation n'aura jamais lieu à l'égard des Ingenieurs; c'eſt chez eux que doit ſubſiſter cet ancien accord de la Science & de la Guerre; s'ils ont beſoin de la bravoure, du bon ſens & de l'experience d'un Guerrier, ils ont encore beſoin de la ſcience d'un Mathematicien. Sans la Geometrie, la Mechanique & l'Hidraulique de quoi ſont-ils capables dans la conſtruction des Fortereſſes & Places de guerre, que d'imiter ce qu'ils ont vû, & copier ſouvent des fautes? les traces de l'aveugle experience ne ſont pas rares, il n'y a gueres de Ville où l'on n'en reconnoiſſe quelques-unes.

Neque enim Ingenium ſine Diſciplina, aut Diſciplina ſine Ingenio perfectum artificium poteſt efficere. Vitr.

J'AVANCERAI de plus, que les Sciences neceſſaires à la Conſtruction ne ſont pas inutiles à la Guerre; elles ouvrent l'eſprit, fourniſſent des moyens induſtrieux pour les manœuvres & les ouvrages neceſſaires à l'Attaque & à la Deffenſe des Places, que la ſeule valeur ne ſçauroit exécuter ſans ce ſecours. ARCHIMEDE étoit un Mathematicien de pure ſpéculation, qui n'auroit pas daigné deſcendre à la Pratique, s'il n'avoit été engagé par les ſollicitations du Roy HIERON ſon Parent, de faire uſage de ſes connoiſſances pour l'invention des Machines de guerre; cependant ſes coups d'eſſai furent ſi bien des coups de maître, qu'au Siege de Syracuſe il dérouta, par la force de la Theorie, toute l'experience de ces Ingenieurs Romains, qui avoient fait valoir avec de grands ſuccès leur habilité dans la conquête des Places les plus fortes; ſes nouvelles Machines eurent tant d'effet, qu'il intimida & rebuta l'Armée de Marcellus, au point, que ce General renonça aux Approches & aux Aſſauts, forcé de ſe réduire à chercher par la longueur du Siege, ce qu'il ne pouvoit obtenir par la force contre l'ingenieuſe réſiſtance que lui faiſoit Archimede. On peut lui en attribuer tout l'honneur, car Plutarque dit, qu'il étoit l'unique Auteur de la deffenſe, que les Syracuſains n'étoient que comme le corps & les membres, dont lui ſeul étoit l'ame, qui mettoit tout en mouvement, ſans qu'on fit uſage d'autres Armes que des ſiennes; cependant ce grand homme, ajoute-t'il, ne ſe

glorifioit point de ces heureuſes nouveautez, il ne les regardoit que comme des *Jeux de la Geometrie*, qu'il eſtimoit ſi peu en comparaiſon de la Theorie, qu'il crut ſe faire plus d'honneur d'en laiſſer des Ecrits, que la deſcription de ces merveilleuſes Machines, dont l'invention & l'uſage lui avoit acquis tant de gloire & un ſi grand Nom, qu'il paſſoit pour un homme *doüé non de Science humaine, mais de Sageſſe toute Divine.* Diſons-le ſans déguiſer, la ſeule experience ne fait que de ſerviles imitateurs, qui étant embaraſſez dans les moindres choſes, & n'ayant de reſſource que dans le recüeil de leur Porte-feüilles, donnent comme des aveugles dans le faux pour les projets, l'exécution & le toiſé.

Plutarque *in vita Marcelli.*

Je dirai cependant ſans vouloir favoriſer l'ignorance, qu'un Ingenieur doit ſe borner à l'étude de ce qui peut être utile à la Pratique, ſans ſe livrer à de vaines curioſitez, de peur qu'entraîné par l'amorce du plaiſir des Découvertes, plus capables de flatter ſa vanité que de le conduire à une plus grande perfection des Arts, il ne ſoit ſouvent diſtrait & tenté de negliger ſon devoir; il doit ſes premiers ſoins à la ſolidité & à la propreté des Ouvrages dont il eſt chargé, & éviter l'écüeil du mépris, que les hautes Sciences inſpirent, pour des occupations, qui ſont à la portée des eſprits les plus bornez; il lui ſuffit d'être en état d'entendre & de mettre à profit les ouvrages des Sçavans & des Academies des Sciences, qui ont quelque rapport aux Arts neceſſaires à la conſtruction des Places, remettant les études aux hyvers & autres tems de loiſir que nous laiſſe le Service du Roy.

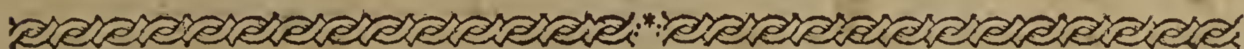
Satis abundè is videtur feciſſe, qui ex ſingulis Doctrinis Partes & RATIONES earum mediocriter habet notas, eaſq; quæ neceſſariæ ſunt ad Architecturam, ut ſi quid de his rebus & Artib. judicare & probare opus fuerit, ne deſtituatur vel deficiat. Vitr. l. 1. c. 1.

Parmi les connoiſſances qui nous ſont neceſſaires, celle de la Coupe des Pierres, quoiqu'une des plus negligées, n'eſt pas une des moins importantes. J'ai reconnu par ma propre expérience qu'elle étoit auſſi indiſpenſablement neceſſaire à un Ingenieur qu'à un Architecte; parce qu'il peut être envoyé comme moi dans des Colonies éloignées, & même dans des Provinces où l'on manque d'Ouvriers capables d'exécuter certaines parties de Fortifications, où il faut de l'intelligence dans *l'Appareil.* L'épreuve que je venois d'en faire à mon ſecond retour de l'Amerique me fit naître l'idée d'en compoſer un Traité; invité à cette entrepriſe, premierement par l'extréme rareté des Livres ſur cette matiere, ſecondement par la maniere imparfaite dont elle a été traitée juſqu'à préſent. J'en dreſſois le projet, lorſque j'appris qu'un Architecte en alloit publier un, en effet, quelques mois après, celui de M. de La Rue parut; mais comme il n'eſt fait, de même que celui du P. Deran (qui étoit pour ainſi dire le ſeul) que pour conduire la main ſans éclairer l'eſprit, je reconnus qu'il n'étoit pas aſſez Méthodique pour remplir l'attente du public, qui ſouhaitoit depuis long-tems un Ouvrage plus Geometrique; j'en fus convaincu lorſque les perſon-

nes à qui j'avois communiqué mon Plan, m'engagerent à y travailler & à le suivre; parce que la difference en est si grande, qu'on peut dire, que ce n'est pas multiplier les mêmes especes de Livres. Ceux que je viens de citer sont faits pour les Ouvriers, & celui-ci pour les gens qui les doivent conduire, comme les Ingenieurs & les Architectes, que l'on doit supposer initiez dans la Geometrie.

Je sçai que la routine & une certaine Geometrie naturelle tiennent lieu de science aux Appareilleurs dans les cas ordinaires; mais j'ai éprouvé qu'elle leur devenoit inutile dans ceux qui ne sont pas énoncez dans les Livres, comme je le ferai remarquer lorsqu'il en sera question, & qu'ils seroient arrêtez tout court, si l'Ingenieur n'étoit en état d'y suppléer. Il doit donc prévenir la honteuse necessité de se livrer à l'ignorance des plus experimentez, qui n'en viennent à bout qu'à force de tâtonner & démolir plusieurs fois, finissant enfin par quelque difformité ou défaut de solidité. Ces cas ne sont pas si rares qu'on se l'imagine, puisqu'ils me sont arrivez; il n'est pas non plus extraordinaire d'en trouver des vestiges, non seulement dans les racordemens des vieux ouvrages avec des nouveaux, mais encore dans ceux qui sont faits de suite.

Je supposerai si l'on veut, que les Entrepreneurs fournissent de bons Apparreilleurs; ne convient-il pas à la dignité d'Ingenieur d'être en état de connoître & d'examiner ce qu'ils font, pour ordonner & décider de la meilleure construction, & ne pas souffrir des fautes qu'ils peuvent faire malicieusement, ou pour faire servir des pierres de rebut, ou pour s'épargner un peu plus de soin? D'ailleurs cette matiere est assez intéressante pour mériter l'attention d'une juste curiosité; on en pourra juger par ce qui suit.



SECOND DISCOURS.

Exposition & Division du Sujet dont il s'agit.

L'IDE'E que l'on a attaché au Nom de la *Coupe des Pierres*, n'est pas ce qui se présente d'abord à l'esprit; ce mot ne signifie pas précisément l'ouvrage de l'Artisan qui taille la Pierre, mais la Science du Mathematicien, qui le conduit dans le dessein qu'il a de former une Voute, ou un Corps d'une certaine figure par l'assemblage de plusieurs petites parties; il faut en effet plus d'industrie qu'on ne pense pour qu'elles soient faites de façon, que, quoique d'inégales

figures & grandeurs, elles concourrent chacune en particulier à former exactement une surface Réguliere ou régulierement Irréguliere, & qu'elles soient disposées de maniere qu'elles se soutiennent en l'air, en s'appuyant réciproquement les unes sur les autres, sans autre liaison que celle de leur propre pésanteur; car les liaisons de mortier ou de ciment doivent toujours être comptées pour rien. Par où l'on voit que cette Science tient ses principes, premierement de la Geometrie, pour la connoissance des Lignes & Surfaces courbes & droites, & les Corps solides, qui doivent être divisez.

Secondement de la Mechanique & de la Statique, pour mettre l'équilibre entre les portions des Solides, qui composent les Voutes, ensorte qu'ils se soutiennent mutuellement sur les appuis qu'on leur fixe.

Notre dessein n'est pas ici de considerer les Voutes comme un amas de corps pésans, qui font differens efforts les uns sur les autres, cette Theorie quoique très-curieuse & très-utile, peut être réduite pour la Pratique au petit nombre de propositions démontrées par Mrs. de la Hire, Parent, Couplet & Belidor, touchant la poussée des Voutes, à quoi l'on peut ajouter quelques observations sur les Edifices qui subsistent depuis long-tems, quoiqu'un peu hors des régles du calcul, soit par la bonne qualité des Materiaux qui font corps, lorsqu'on leur donne le tems de se lier, soit par la differente pésanteur de ceux des Voutes & de leur Piédroits, à quoi il faut avoir égard dans les calculs; car si l'un est d'une pierre légere & l'autre plus pésante, la Poussée augmente ou diminuë à l'égard des Piédroits.

Nous ne considerons donc ici la Coupe des Pierres, que comme rélative à la Geometrie, supposant seulement qu'un Corps Cônique, Piramidal, ou fait en Coin, ne peut se faire un passage au-travers d'un trou, qui n'est pas si grand à son petit orifice que la base du corps qu'on y introduit. Cela supposé cette science se réduira:

1.° A connoître les Lignes courbes formées par la division des Solides, Concaves & Convexes coupez par des Surfaces planes, ou par des Surfaces courbes; c'est ce que l'on pourroit appeller d'un seul mot d'origine Grecque la *Tomomorphie*, ou *Figure des Sections*, s'il étoit permis de forger des mots nouveaux pour éviter les Periphrases.

2.° A décrire ces Lignes courbes sur des Surfaces planes, lorsqu'il est possible & necessaire, ou sur des Surfaces courbes, lorsqu'elles ne peuvent s'adapter sur un Plan dans toute leur étenduë, ce que l'on pourroit appeller la *Tomographie*, ou *Description des Sections*.

3.° A trouver des moyens faciles pour repréſenter les Solides & leurs diviſions ſur des Surfaces planes autant qu'il eſt poſſible de le faire; or comme ils ne peuvent y être exprimez que très-imparfaitement, ces moyens ſe réduiſent, 1.° à la projection faite ſur un Plan par des lignes abaiſſées parallelement entr'elles, & perpendiculairement au Plan de la Deſcription, ce qu'on appelle ſur un plan horiſontal *Ichnographie*, & ſur un plan vertical *Ortographie.* 2.° A la deſcription des ſurfaces rangées ſéparément, & dans toute leur étenduë ſur un plan, ce qu'on appelle *Développement*, & qu'on pourroit appeller *Epipedographie.* 3.° A la deſcription des Angles des plans ou ſurfaces quelconques des Solides entr'elles, ce qu'on pourroit appeller la *Goniographie*, *Deſcription des Angles.*

4.° A faire uſage de toutes ces ſortes de repréſentations, pour parvenir à une ſection des corps convenable à la conſtruction des Voutes, en appliquant les modeles des Angles & des Surfaces ſur des Solides, le plus ſouvent faits en Parallelepipedes, pour les tailler & les réduire aux figures requiſes, en abattant les parties excédentes, ce qui eſt proprement l'Art de la *Coupe des Pierres ou des Bois*, c'eſt-à-dire, celui de faire des ſections, qu'on pourroit appeller la *Tomotechnie.*

Ainsi en réſumant ces mots imaginez pour donner une idée nette & ſimple du ſujet dont il s'agit, nous traitons dans la premiere partie de cet Ouvrage de la *Science*, & dans la ſeconde de *l'Art* de la Stereotomie, c'eſt-à-dire, des ſections des Solides.

Nous diviſons la premiere partie en deux Livres, l'un de la *Tomomorphie*, ou figures des Sections, l'autre de la *Tomographie*, ou deſcription des Sections.

La ſeconde auſſi en deux Livres, dont l'un eſt la *Stereographie*, ou deſcription des Solides, & l'autre de la *Tomotechnie*, ou l'Art de faire des Sections.

Tels ſont les Sujets des quatre Livres de cet Ouvrage, ſuivant l'ordre qui nous a paru le plus ſimple & le plus naturel; ce que nous tâcherons d'expliquer & de prouver par des démonſtrations, qui ne ſuppoſent d'autre connoiſſance des parties des Mathematiques, que celle de la Geometrie Elementaire telle qu'elle eſt dans Euclide, & les autres qui l'ont ſuivi.

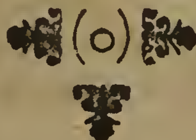
Je ſçai qu'aujourd'hui la Geometrie Lineaire n'eſt plus gueres à la mode, & que pour ſe donner un air de Science, il faut faire parade de l'Analyſe; cependant „ l'ancienne Geometrie (dit un Sçavant) „ (*) quoique moins ſublime, moins piquante, même moins agréable,

(*) Fontenelle, Eloge d'Ozanam, *Mém. de l'Acad.*

„ *est plus indispensablement necessaire*, & *plus sensiblement utile*; c'est elle „ seule qui fournit à la nouvelle des fondemens solides „ particulierement dans la matiere dont il s'agit, où le calcul Algebrique ne pourroit être utile qu'entre les mains de ceux qui y sont plus avancez, que ne le sont ordinairement la plûpart des gens qui se mêlent d'Architecture, pour qui nous avons entrepris cet Ouvrage. D'ailleurs elle conduit plus naturellement à la pratique des *Traits* de la Coupe des Solides, & fait selon moi plus d'impression dans la mémoire, où les Surfaces & les Lignes se gravent plus profondément que les préceptes des formules Algebriques. Les Sçavans n'ont pas besoin d'un petit Ouvrage, qui ne seroit qu'un jeu pour eux; animez par l'ambition de la gloire des découvertes, ils ne s'occupent que des choses difficiles, sans s'embarrasser de leur utilité dans les Arts; sur quoi M. de Fontenelle fait cette judicieuse remarque, que la Geometrie est assez étenduë, mais qu'elle n'est pas assez appliquée aux usages; or puisqu'ils n'ont pas traité notre matiere, j'ai cru rendre service à ceux qui en sont cùrieux, de leur en donner les principes dans un recüeil, compris dans le premier Tome, qui est suffisant pour leur épargner la longue, ennuïeuse & peu instructive lecture des grands Volumes in-folio, où elle est plus embroüillée par le détail de la Pratique que par le fond de la difficulté; ils en pourront tirer d'eux-mêmes la solution des Problêmes, qu'on appelle *les Traits* de la Coupe des Pierres; cependant en faveur de ceux qui aiment les Ouvrages faits, nous y avons ajouté leur construction dans la quatriéme partie, qui contiendra beaucoup plus de matiere en moins de Volume que les Livres du P. Deran & de M. de la Rue; j'espere aussi que la lecture en sera plus agréable, parce qu'on y trouvera les Démonstrations, qui ne seront qu'une application des Theorêmes & des Problêmes contenus dans les trois premiers Livres. Au reste je n'ai recherché d'autre agrément dans la diction que celui du raisonnement. Dans ce genre d'écrire on doit être plus occupé des choses que des mots; un Lecteur raisonnable n'exige que de la netteté, & une diction intelligible; c'est à quoi je me suis le plus attaché; peut-être n'aurai-je pas toujours réüssi, dans un long Ouvrage il se glisse toujours quelque faute; je le prie aussi de pardonner celles de l'Impression, qui n'a pas été faite sous mes yeux.

Hist. de l'Accad.

Il me reste à donner quelque chose à la curiosité que l'on peut avoir touchant l'origine de la Coupe des Pierres, sur laquelle je vais exposer mes conjectures pour conclure ce Discours Préliminaire.



TROISIEME DISCOURS.

De l'Origine de la Coupe des Pierres, & de l'Usage qu'on en doit faire.

LE Bois eſt la matiere la plus naturelle & la plus commode pour la conſtruction des Bâtimens neceſſaires à l'habitation des Hommes; mais le déſir commun à tous ceux qui font des Edifices conſiderables, d'en établir la durée pour un long-tems, l'idée que les ouvrages de bois ſont ſujets à tomber en caducité par la pourriture, & la crainte qu'ils ne ſoient ravagez par les incendies, ont fait préferer les Pierres au Bois, où on a pû les lui ſubſtituer. Dans cette vûë on n'a ménagé ni la peine ni les grandes dépenſes pour les arracher des entrailles de la terre, les tranſporter & les tailler.

La neceſſité a auſſi forcé les hommes dans pluſieurs Contrées d'employer des Pierres au lieu de Bois; parce que la nature leur a fourni plus de Carrieres que de Forêts. Cependant la maniere de bâtir avec des arbres a parû ſi naturelle, qu'on a regardé comme une beauté l'imitation de cette ſtructure. C'eſt de-là que nous eſt venu l'uſage des Colomnes dans l'Architecture antique, & celui des Pilliers ronds & des *Perches* dans la Gotique.

Pour rendre cette imitation plus parfaite, les Anciens faiſoient leurs Colomnes, autant qu'ils pouvoient, d'une ſeule piece, comme ſont les troncs des arbres; ils en uſoient de même pour leurs Architraves, qu'ils ſubſtituoient aux principales poutres que les colomnes devoient porter. Il reſte des veſtiges des Edifices des Egyptiens, des Grecs & des Romains, qui font voir qu'ils y employoient des Pierres d'une grandeur énorme.

Dans les derniers Siecles on a abandonné ces manieres de bâtir trop difficiles par l'immenſité des poids qu'il falloit tranſporter, & par la dépenſe des ſommes extraordinaires qu'ils conſommoient; on leur a préferé l'aſſemblage de pluſieurs Pierres d'une groſſeur plus maniable, & ſans s'écarter du goût des Anciens, on a continué d'imiter les troncs d'arbres par des colomnes; mais on les a fait de *Tambours*, c'eſt-à-dire,

de tranches de Cylindre ; on a de même imité les poutres par des Architraves ; mais on les a fait de *Clavaux*, qui se soutiennent en l'air, comme si le tout n'étoit que d'une Piece continuë ; cependant comme cette situation est trop forcée, & que la poussée en est grande, les Architectes les ont appuyées par des Arcades, qui leur ont parû plus solides, & quoique par cette construction les Colomnes & les Architraves deviennent inutiles, ils les employent toujours pour ornement ; ce goût est aujourd'hui le goût dominant dans l'Europe, imité de quelques Monumens de l'Antiquité Romaine, que l'on a repris pour modele après un long intervale d'un goût d'Architecture toute differente.

Les proportions des Colomnes Antiques avoient parû dans les Gaules & d'autres endroits de l'Europe trop massives & trop courtes, on leur substituoit des Groupes de Perches extrémement longues & menuës, & la difficulté d'imiter avec des Pierres la situation horisontale des Poutres avoit fait rejetter les Architraves, à la place desquelles on faisoit passer d'une Perche à son opposée, des Arcs de Pierre saillans sous les voutes, qui se croisoient & se rassembloient de differentes façons, imitant en cela les Tonnelles en Berceau, que l'on fait de branches d'arbres pliées en rond d'un côté à l'autre.

Le contour même des Berceaux cylindriques leur ayant parû aussi trop pesant, c'est-à-dire, faisant trop d'effort pour écarter les murs, les Architectes de ces tems faisoient leurs Ceintres par deux arcs de cercles égaux, mais de differens centres, dans le dessein d'en tenir les pentes plus rapides, & par ce moyen diminuer cet effort en les rendant aussi plus minces & plus légeres : ils les traversoient encore par d'autres parties de voutes, qui formoient quantité d'angles saillans dont les arêtes étoient cachées & fortifiées per des *Nervures d'Ogives*, des *Arcs doubleaux*, des *Tiercerons*, & des *Formerets*, dont ils formoient une infinité de compartimens, aboutissans souvent à des culs de lampes suspendus en l'air. Toutes ces naissances entrelassées, & les intersections des Moulures demandoient une grande intelligence dans l'Art de la Coupe des Pierres ; d'où je conjecture, que c'est à l'Architecture *Gotique* que nous devons rapporter l'Origine, ou du moins l'Adolescence de cet Art. Ma raison est, qu'outre qu'il ne nous reste pas de Monumens antiques où il ait été mis en usage, que pour des traits assez simples, c'est que dans l'énumeration que Vitruve fait des connoissances necessaires à un Architecte, il ne parle point de celle de *la Coupe des Pierres* ; en effet la noble simplicité de l'Architecture des Anciens n'exerçoit pas beaucoup le sçavoir-faire des Appareilleurs, qui n'avoient presque que des Voutes Cylindriques ou Spheriques à conduire. La forma-

tion au contraire d'un grand nombre de figures bisarres & difficiles, qui se présentoient à tous momens dans l'Architecture Gotique, leur a donné lieu d'en imaginer d'autres, pour tirer party de l'irregularité des emplacemens des Bâtimens, ou suppléer au deffaut de place. Les Angles, par exemple, qui ne paroissent pas des lieux propres à y pratiquer des Portes, n'ont pas empêché qu'on n'y aît vouté des passages, sans les émousser, ce qui paroît du premier abord contraire à la solidité; on a fait porter en l'air des Cabinets sur des *Trompes* pour laisser une place libre audessous; on a soutenu des Escaliers d'une infinité de façons, & l'on a imaginé tant de choses inconnuës aux Anciens, qu'on a trouvé assez de matiere pour en composer des Livres.

PHILIBERT de LORME, Aumônier d'HENRI II, est, dit-on, le premier qui en aît écrit, non pas exprès, mais par occasion dans son Traité d'Architecture, qu'il publia en 1567. on voit que cette date n'est pas fort ancienne; MATURIN JOUSSE produisit quelques Traits dans son Livre intitulé *Secrets d'Architecture*, imprimé à la Flèche en 1642. le P. DERAN, l'année suivante mit cet Art dans toute son étenduë pour les Ouvriers; BOSSE, (la méme année) donna un sistême tout different, qu'il tenoit de DESARGUES, lequel, par son obscurité & la nouveauté de son langage, ne fut pas goûté. Enfin M. de la RUE en 1728. a redonné une partie des Traits du P. DERAN, avec quelques autres nouveaux. Tous ces Auteurs n'ont produit qu'une simple pratique dénuée de toutes preuves. Le P. DECHALLES en 1672 fut le premier, & a été le seul jusqu'à présent, qui y ait ajouté des Démonstrations; mais son Traité *de Lapidum Sectione*, inseré dans son grand cours de Mathematiques en Latin, n'est presque qu'un extrait du P. DERAN, dont il a quelquefois copié jusqu'aux fautes, comme nous le ferons voir dans son lieu.

APRES avoir vû tous ces differens Ouvrages, il m'a paru qu'il restoit encore quelque chose de mieux à faire.

PREMIEREMENT, qu'il étoit à propos de donner une connoissance exacte de la nature des Lignes Courbes, qui se forment aux arêtes des voutes, tant à leurs Faces qu'à l'intersection des Doëles, de celles qui sont composées de plusieurs parties qui se croisent, pour sçavoir les tracer sur des plans, lorsqu'il est possible, ou sur des surfaces courbes, lorsque ces lignes sont à double Courbure, en quoi consiste la *premiere nouveauté* de ce Traité.

La seconde sera la Correction des erreurs de plusieurs des anciens Traits.

La troisiéme celle de la Construction de plusieurs Traits changez, & de quelques-uns qui n'ont pas encore paru.

Je puis compter pour quatriéme nouveauté les démonstrations des Traits, parce que le P. Dechalles ne m'a précedé qu'en Latin, mais non pas en François, de sorte que pour me servir de l'expression de Jousse, les *Secrets d'Architecture* y sont tout-à-fait dévoilez.

La nouveauté de cet Art & les difficultez qu'il contient engageoient les Architectes des deux derniers siecles à chercher des occasions de faire parade de leur Science, persuadez que rien ne pouvoit mieux les rendre recommandables, que ces Ouvrages hardis, où l'on ne pouvoit s'empêcher d'admirer la Coupe des Pierres; de sorte qu'ils affectoient d'en faire même sans necessité. J'ai vû le tiers d'une Tour quarrée, qu'on pouvoit faire porter de fond, soutenuë par la seule coupe d'une Platebande Rampante, qui en élevoit un Angle en l'air, & beaucoup de semblables témeritez.

Les Architectes de notre tems ne trouvant plus tant de raison de se faire admirer par une Science devenuë plus commune, ou peut-être devenus plus sages, ont banni toutes ces hardiesses bisarres, qui n'ont d'autre beauté, que celle de leur exécution, & qui non seulement ne contribuent en rien à la décoration des Edifices, mais leur sont encore préjudiciables, en ce qu'elles en augmentent les efforts & la charge; en effet il ne convient de mettre en œuvre les Traits de Porte-à-faux comme les Trompes, que lorsqu'on y est absolument contraint, ou pour quelque Degagement, ou pour éviter la dépense & l'incommodité de prendre la place dès les fondemens.

J'ajouterai encore, qu'il faut plûtôt consulter le bon goût que d'affecter de la rareté, & de la difficulté dans les Ouvrages, à quoi semblent pencher nos Architectes modernes, qui courrent à la nouveauté : La rencontre & l'intersection de differentes voutes n'est pas toujours d'un bon effet. Un Arc de cloitre, par exemple, de ceintre circulaire peu concave, traversé de lunettes, & surmonté d'un cû-de four, tel qu'on en voit à une Chapelle de l'Eglise de St. Sulpice, ne fait pas si bien qu'une voute moins composée. Des Lunettes Cylindriques, qui traversent une portion de Voute Spheroïde, ou Voute de Four surbaissée, ne se présente pas bien de près; parce que les arêtes d'Enfourchement paroissent *Déversées*, c'est-à-dire, penchées à droite & à gauche, comme on peut le remarquer à la même Eglise de St. Sulpice; cette difformité diminuë, lorsque la Lunette est vûë de bas en

haut, & de plus loin, comme à St. Roch; mais elle n'eſt pas ôtée totalement, & on ne le peut par la nature de la Courbe, qui n'eſt pas dans un plan, comme on le verra dans le cours du premier Livre.

Enfin on peut encore remarquer, que les Voutes Spheriques, traverſées par deux berceaux, qui ſe croiſent, ont un air Nud & imparfait, ſi elles ne ſont diviſées par une Corniche Horiſontale, qui retranche le Segment de Sphere, & le mette, pour ainſi dire, à part des Panaches; on en apperçoit le beſoin au Noviciat des Jeſuites à Paris. Il ſeroit trop long de rechercher de ſemblables concours de voutes, qui ne ſatisfont pas le coup d'œil ſans le ſecours de quelque correctif, quoique faites ſolidement & dans les régles de la bonne Conſtruction.

Ces remarques ſont plus utiles à l'Architecture Civile qu'à la Militaire, où l'on ſemble negliger la beauté pour la ſolidité; il ne ſeroit pas cependant mauvais que les Ingenieurs fiſſent une étude de l'Architecture Civile; elle leur eſt neceſſaire à la conſtruction des Bâtimens Militaires, dont ils ſont chargez dans les Villes de Guerre, comme Caſernes, Magaſins, Hôpitaux, Logemens de l'Etat-Major, & même quelquefois des Egliſes des Forts & Citadelles, qui ſont de même eſpece que les Bâtimens Civils, dont ils ne different que de nom, ils peuvent même lorſque la Cour le juge à propos, prendre la conduite des Bâtimens Civils publics; mais ils ne doivent jamais ſe mêler de ceux des Particuliers, de quelque Qualité qu'ils puiſſent être; premierement parce qu'étant Officiers du Roy, à ſa ſolde dans le repos comme dans le travail, (*) il eſt de l'équité qu'ils diſpoſent du loiſir qu'ils peuvent avoir à s'inſtruire au Cabinet des Sciences qui leur ſont neceſſaires, & des faits Hiſtoriques des Sieges, qui peuvent leur fournir des idées propres à les mettre en état de ſervir utilement à differentes deſtinations. En ſecond lieu, parce que rien n'avillit tant les Ingenieurs, que ces ſortes d'occupations qui les ſont ſoupçonner de vûës d'intérêt, & les compromettent avec des Ouvriers ou Gens à gages, qui rejettent ſur l'Ingenieur les fautes émanées de leur ignorance, ou du caprice du Proprietaire; les exemples fréquens qu'on en voit devroient corriger les gens trop officieux. Enfin parce qu'en ſe mêlant d'Architecture Civile, ils ſemblent ſortir de l'Etat Militaire & nourrir le dédain, que les Gens d'épée ont pour ceux qui ſe mêlent des Arts Mechaniques; ce n'eſt pas qu'il n'y aît dans le Service des occupations peu nobles, l'Officier d'Infanterie doit deſcendre aux petits ſoins de la propreté des Soldats & des Caſernes, celui de Cavalerie à celle des Ecuries & des Chevaux, celui de Marine au Radoub & à la conſtruction des Vaiſſeaux,

(*) *Annua æra habes, annuam operam ede; an tu æquum cenſes, militia ſemeſtri ſolidum te ſtipendium accipere?* Tite-Live, l. 5. n. 4.

celui d'Artillerie aux Charronages & aux Forges, & l'Ingenieur à tous les Arts qui ont du rapport à celui de bâtir; ces fonctions auroient par elles-mêmes quelque chofe de vile fuivant le préjugé du monde, fi l'on n'étoit convenu dans les régles de l'honneur, qu'il n'y a rien d'abject de tout ce qui concerne le Service du Roy dans l'Etat Militaire; les Ingenieurs doivent fe renfermer dans ces bornes, & laiffer l'Architecture Civile à ceux qui en font profeffion.



TRAITÉ



TRAITÉ DE STEREOTOMIE A L'USAGE DE L'ARCHITECTURE.

LIVRE PREMIER.

DE LA FIGURE DES SECTIONS DES CORPS, Coupez par des Plans, ou Pénetrez par des Solides.

POURQUOI la Connoiſſance en eſt neceſſaire dans l'Architecture.

DANS les Arts qui dépendent des Sciences, ſi l'on ne fait préceder de bons Principes, comme autant de Lumieres qui éclairent l'eſprit, on fait rarement du progrès, parce qu'on n'y avance qu'à tâtons; & de même que l'ennui qui accompagne les ténebres, augmente la fatigue d'une route qu'on parcourt dans l'obſcurité, une Etude ſans Principes devient pénible & capable de rebuter, lorſque la neceſſité de s'inſtruire ne fournit pas de la perſéverance.

C'est pour cette raiſon (ſi je ne me trompe) que les Livres que nous avons ſur la Coupe des Pierres, n'ont rendu cette matiere ni facile ni agréable aux Lecteurs, &. que bien des Gens qui ont voulu en tâter, s'en ſont rebutez : En effet, il n'eſt pas étonnant qu'une lecture ſoit laſſante & preſqu'inſupportable, où l'on ne trouve qu'un tiſſu de pratiques ſeches, ſurchargées d'operations, dont on ne voit ni la fin ni la raiſon, ſi l'on n'eſt déja en état de la pénetrer: ajoutez à cela la complication d'une infinité de lignes ſurchargées de chiffres, pour les indiquer, & de meſures qu'il faut porter ici & là, ſans ſçavoir à quel propos; enfin où il n'y a aucune verité à connoître par les inſtructions de l'Auteur, qu'il faut croire ſur ſa bonne foy, ne donnant d'autre preuve de la juſteſſe de ſon operation, que le témoignage de la gravure des Planches de ſon Livre; il n'eſt pas étonnant, dis-je, qu'une telle conduite ne mêne qu'au dégoût, & que cet Art acceſſible aux moindres Ecoliers de Geometrie, paroiſſe hériſſé d'épines qui en deffendent les approches.

Pour lever ces difficultez nous avons cru qu'il falloit donner une notion claire de la figure des Voutes, & des parties qui les compoſent, en les comparant à celle des corps Ronds, qui ſont connus de tout le monde, la Sphère, le Cône & le Cylindre, l'Anneau & l'Hélice coupez & diviſez par des Plans, ou par d'autres corps qui peuvent les pénetrer. Et lorſque la figure des voutes eſt irréguliere, nous avons tâché de la déſigner par une generation ſi expreſſive, qu'on peut la concevoir facilement. Ainſi l'on a déja pour point de vûë la figure qu'on ſe propoſe de faire, telle qu'elle doit être lorſque la voute eſt achevée, ce qu'il falloit en quelque façon deviner dans le Livre du P. Deran, à quoi M. de La Rue, qui a ſenti ce défaut a tâché de remedier par quelques deſſeins en Perſpective, qui aident beaucoup l'imagination; mais parce qu'on ne peut exprimer qu'à pluſieurs repriſes toutes les faces d'un Solide ſur un Plan, il reſte encore beaucoup à ſuppléer à ces ſortes de repréſentations.

La figure des voutes étant bien conçûë, il n'eſt point de meilleur moyen de faire connoître celle des parties, dont elles doivent être compoſées, pour ſubſiſter & former un Tout uniforme & ſolide, que d'en venir à l'examen des Sections formées par la diviſion des Corps, faite de maniere qu'ils n'en ſoient pas détruits ni défigurez. Une comparaiſon familiere expliquera nettement ce diſcours.

Je me repréſente, par exemple, un Melon, qui eſt ordinairement une moitié de Sphéroïde, je la coupe par tranches ſuivant la longueur de ſes côtes ſur une table, où cette moitié eſt poſée à plat, & je vois

que pourvû que j'empêche les deux premieres tranches de glisser, la moitié du Melon subsistera en son entier, quoique coupée en plusieurs tranches à fond. Non content de l'avoir coupé en long, je la recoupe en travers, & je vois, que si j'empêche encore les premiers morceaux de glisser sur la table, cette moitié de Sphéroïde ne se défigure point, & subsiste encore dans sa rondeur, sans tomber en pieces; d'où je conclus, que si je fais de semblables morceaux avec de la Pierre ou du bois, & que je les rassemble dans le même ordre, je pourrai former cette figure de Melon, que les Geometres appellent une Sphéroïde. Mais pour former ces parties, il faut que j'aïe recours à une science qui m'apprenne quelle sera la figure que le passage de mon couteau formera dans le Melon, à chaque division que j'en ferai, & comme il n'importe que je me serve d'un couteau ou d'une feüille de Fer-blanc, ou d'un autre corps mince de figure plane, je puis appeller cette coupure *la Section d'un Plan*, ou faite par un plan; j'examine ensuite quelle sera cette Section en tournant differemment la feüille de Fer-blanc, qui me sert de couteau; je vois par la seule Geometrie naturelle, que si je coupe le Melon en travers, la Section sera un demi-cercle, & un cercle entier, si le Melon étoit entier; je connois donc dès ce moment, que toutes les tranches en travers contiennent une portion de cercle plus ou moins grande, suivant que les tranches en longueur sont plus ou moins épaisses; je vois aussi que ma coupure en long fait un ovale, & je conclus que chacune des tranches dans ce sens est une portion d'ovale plus ou moins grande, suivant l'épaisseur des coupures en travers, & plus ou moins courbe à mesure qu'elle s'approche des bouts du melon ou du milieu, étant évident qu'elle se creuse vers les bouts, & s'applatit vers le milieu. Je pousse ma curiosité plus loin; si au lieu de la trace plane de mon couteau je l'enfonce de biais, & le fais tourner sur la pointe immobile au fond, pendant que je le tourne en rond du côté du manche, comme pour faire un trou en pain de sucre renversé, je vois que je puis ôter & remettre cette piece & ses semblables; si j'en veux faire de concentriques à celle-ci, qui s'emboiteront comme des Cornets les unes dans les autres sans que le Melon soit défiguré, quand même je les couperois encore en travers & en long, en passant toujours par le même point du milieu avec la feüille de Fer-blanc, pourvû que j'empêche les premiers morceaux, qui passent sur la Table, de glisser.

Je connois donc que je puis diviser ce Melon en portions Côniques, s'il est bien rond, ou en Côniques un peu alongées comme des cornets applatis, s'il est oblong; & cependant faire ensorte que le tout subsiste dans sa forme, ce qui me conduit à l'examen de la difference de ces Cônes, & de la Section qu'ils peuvent faire par leur pénetra-

tion dans le Sphéroïde, sur quoi je commence à m'appercevoir qu'une telle Section n'a plus la simplicité de celle de la Sphère, ou du Sphéroïde coupé par des plans, & que j'ai besoin du secours de la Geometrie pour la connoître.

De ce petit exemple de comparaison des Corps coupez par differentes Sections, il suit naturellement qu'on doit en distinguer de deux sortes.

Les unes faites par des Plans qui peuvent couper les Solides suivant differentes inclinaisons à leurs axes & à leurs côtez, & produire differentes figures.

Les autres par des Corps qui pénetrent d'autres Corps semblables ou differens ; comme dans cet exemple le Cône pénetre le Sphéroïde. Les Courbes qui sont formées par ces Sections sont l'objet principal de notre Ouvrage ; parce qu'elles se forment effectivement dans les Ceintres des Voutes sur leurs Faces, ou dans les rencontres de celles qui se croisent ; car chacune de celles qu'on mêt en usage dans l'Architecture est comparable à quelque corps régulier, comme nous l'allons expliquer.

De la Figure des Voutes en General, rapportée à celle des Corps Réguliers.

Les Voutes peuvent être considerées comme des Solides *simples*, qui ont une principale surface, d'où elles tirent leur dénomination.

Ou comme *composées* de differentes surfaces, qui se croisent, ou qui se rencontrent.

La surface qui donne le nom aux Voutes est celle qui doit être vûë par-dessous, qu'il a plû aux Architectes d'appeller *Doële*, par Analogie aux doëles des tonneaux, ausquels la plûpart ont quelque rapport ; ce n'est pas que les voutes soient necessairement courbes, car il y en a de planes ; mais celles-ci ont toujours si peu d'étenduë, qu'elles semblent n'être pas assez considerables pour entrer en compte dans l'énumeration des differentes especes de Voutes,

Parmi les Voutes simples il y en a de *Régulieres* Circulaires, dont

les unes ſont, 1.° des moitiez de Cylindres, 2.° des moitiez de Cônes, 3.° d'autres enfin des Hemiſphères ou portions de Sphères.

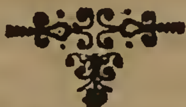
La ſeconde eſpece des Voutes ſimples eſt de celles qui ſont *régulierement Irrégulieres*, dont les unes imitent le Cylindre, les autres la Sphère, les autres le Cône, telles ſont celles dont le Ceintre n'eſt ni circulaire ni Elliptique, mais de quelqu'autre Courbe Geometrique ou Mechanique, comme pourroit être la *Chaînette* ou la Parabole, qui lui reſſemble fort, & qui eſt la plus convenable pour mettre en équilibre des vouſſoirs égaux. Telles ſont encore les voutes *Annulaires*, qu'on appelle *ſur le noyau*, leſquelles ſont des Cylindres courbez ſur leur axe, ou les mêmes tournez en *Hélice*, c'eſt-à-dire, en *Vis*, qui s'élevent audeſſus du Plan ſur lequel elles poſent; telles ſont auſſi les Voutes Sphériques ſurhauſſées, ou ſurbaiſſées, ou ſur un plan Elliptique, qui ſont des *Sphéroïdes*, & d'autres qui peuvent être des Cônoïdes.

La troiſiéme eſpece des Voutes ſimples eſt celle des *Irrégulieres*, qui participent plus ou moins de chacune de ces figures, de maniere qu'elles peuvent toujours être comparées en quelques choſes aux Cônes, aux Sphères ou aux Cylindres, & tenir en même tems des unes & des autres, telles ſont la plûpart des *arrieres Vouſſures*.

Les Voutes *Compoſées* ne ſont qu'un aſſemblage de ces ſortes de figures ſituées differemment les unes à l'égard des autres, & contiguës par des jonctions angulaires, qu'il a plû aux Architectes d'appeller *Enfourchemens*; parce que les Pierres qui ſervent aux jonctions ont deux branches, comme une fourche.

En un mot nous ne concevons aucune figure de Voute, qu'on ne puiſſe rapporter à la Sphère, au Cône & au Cylindre, & c'eſt dans ce rapport que nous faiſons conſiſter leur *difference eſſentielle*.

Quant aux differences accidentelles elles ſeront toujours produites par la differente poſition de leurs faces, comme celles des Sections des corps par la differente poſition des plans coupans, & celles de leurs arêtes d'Enfourchemens, comme celles des Courbes formées à la ſurface des corps qui ſe pénetrent, en quoi conſiſte la principale difficulté de l'Architecture des Voutes.



Des Variations accidentelles aux Voutes, comparées à celles des Sections des Corps.

S'IL ne s'agiſſoit dans la Coupe des Pierres que de former des Corps réguliers, il ne ſeroit pas fort neceſſaire de s'embarraſſer de la figure des ſections des Corps, un très-petit nombre ſuffiroit; mais parce que la principale difficulté vient des irrégularitez de leurs Angles Rectilignes, Curvilignes, & Mixtes, à la jonction des Surfaces Planes ou Courbes, qui les croiſent ou qui les terminent, on peut dire, que la Theorie des Sections eſt la baſe de cet Art.

POUR rendre ce diſcours ſenſible nous pouvons donner pour exemple les variations qui arrivent à une Voute en Berceau circulaire, laquelle eſt une moitié de Cylindre, par la ſeule poſition du mur, qui le termine par un bout, où ſe forme ſon Ceintre de face. Suppoſant ce mur à Plomb & perpendiculaire à la direction du Berceau, ſi on vient à le démolir pour le refaire en *Talud*, il arrivera deux changemens, l'un à la Courbure du Ceintre de face, qui ne ſera plus Circulaire, mais Elliptique, l'autre aux angles des pierres, qui compoſent cet arc, leſquels ne ſeront plus droits verticalement, mais changeront continuellement à chaque lit, devenant toujours plus aigus depuis l'impoſte juſqu'à la clef, où ils ſeront égaux à l'inclinaiſon du mur à l'horiſon, c'eſt-à-dire, au Talud. Si au lieu de refaire ce mur en Talud on le tourne de *Biais*, c'eſt-à-dire, obliquement à la direction du Berceau, il arrivera de même deux changemens, l'un à l'Arc de Face, qui de Circulaire deviendra Elliptique, d'une Ellipſe plus ou moins alongée, ſuivant l'obliquité du mur; l'autre aux lits des pierres, dont les angles, au lieu d'être droits horiſontalement, comme auparavant, deviendront aigus d'un côté, & obtus de l'autre, augmentant continuellement d'un côté à l'autre à chaque lit de Vouſſoir. Si on faiſoit le mur *Biais & en Talud*, il ſe feroit encore un autre changement dans le ceintre & dans les angles des pierres angulaires, qu'on appelle Ecoiçons. Par où l'on voit, que ſans toucher à la Voute, la courbe du ceintre & les angles des lits des vouſſoirs peuvent changer de trois manieres par le ſeul changement de poſition du mur, qui eſt une ſurface plane; telle eſt parfaitement la ſection d'un Cylindre par un plan, ſans en faire l'application au Berceau.

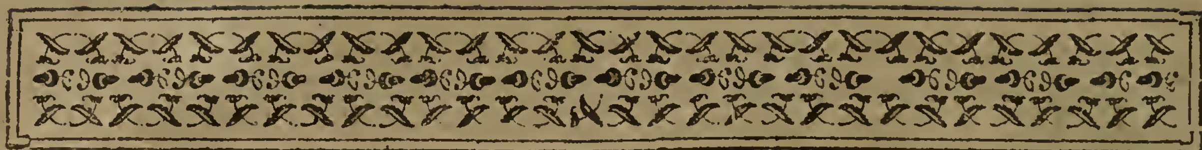
IL eſt aiſé de concevoir, que ſi au lieu d'un mur de face droit on en faiſoit un courbe, comme une portion de Tour creuſe, ou convexe,

ou si l'on y faisoit aboutir une autre voute; les courbes de leur jonction ou enfourchemens pourroient infiniment varier aussi bien que les angles des surfaces coupées par plusieurs lits de voussoirs, qui pourroient être Rectilignes, Mixtes ou Curvilignes, d'une infinité d'ouvertures, & de Courbures differentes.

Pour nous énoncer en termes convenables à la Theorie, nous considerons le mur comme une surface plane, que nous appellons un *Plan*, & la voute comme un Cylindre, Cône ou Sphère, selon qu'il convient à la figure, & au lieu de dire une face Biaise en Talud ou à Plomb, nous dirons qu'un Cylindre est coupé par un plan perpendiculairement ou obliquement, ce changement d'expression signifie toujours la même chose. Cela supposé.

Pour traiter cette matiere par des principes, il faudroit commencer par les élemens des Sections Côniques; mais parce que ce prélude nous meneroit trop loin, & que les Livres qui en traitent sont très-communs, nous avons cru pouvoir nous dispenser d'une rigoureuse methode, en nous contentant de l'énoncé des propositions, qui sont necessaires à l'intelligence de notre Doctrine de Stereometrie, supposant le Lecteur instruit des Elemens de Geometrie, & capable d'entendre les Démonstrations fondées sur les propositions, que l'on y trouve ordinairement, soit dans ceux d'Euclide, ou dans les autres Auteurs que nous n'avons pas cité. Nous avons cependant tâché de donner une introduction aux Sections Côniques, suffisante au sujet dont il s'agit; afin qu'on ne soit pas obligé d'avoir recours à d'autres Livres.





PREMIERE PARTIE.

Des Sections des Corps coupez par des Plans.

CHAPITRE I.

Des Sections de la Sphère.



E quelque maniere qu'on puiſſe couper une Sphère par un Plan, la Section ſera toujours un Cercle. La ſeule Geometrie naturelle, & l'uniformité de la Sphère, nous font ſentir cette verité; il ſuffit ſeulement de remarquer que lorſqu'elle eſt coupée par le centre, la ſection eſt la plus grande qu'on y puiſſe faire, d'où vient qu'on l'appelle *un grand Cercle*, ou, ſelon quelques-uns, *un cercle Majeur*, pour éviter l'équivoque du mot de *grand*, qui peut s'appliquer à une petite ſection comparée à une plus petite.

Les autres ſections ſeront toutes plus petites que celle qui paſſe par le centre, mais inégalement, ſelon qu'elles s'approcheront ou s'éloigneront du centre de la Sphère; enſorte qu'elles peuvent tellement diminuer, qu'elles ſe réduiſent à rien au point où le plan, au lieu de couper, ne fait plus que toucher la Sphère; & cette diminution ſe fait dans le rapport des Sinus des Arcs. Tous ces cercles inégaux ſont compris ſous le nom de *Petits Cercles* ou *Cercles Mineurs*.

DEFINITION.

1. Le point qui eſt à la ſurface de la Sphère, également éloigné de tous ceux de la circonference d'un cercle, s'appelle *le Pole* de ce cercle, qui n'eſt pas le même que le point de ſon centre; parce qu'il n'eſt pas dans le même plan que la circonference, mais hors de ce plan dans la ſurface de la Sphère.

Et

Et parce qu'on peut trouver deux points diamétralement opposez, qui ayent la même proprieté à l'égard du même cercle, il suit que chaque cercle a deux Poles. La ligne droite qui passe par ces deux Poles, & par conséquent par le centre du cercle, s'appelle *l'Axe* de la sphère.

Corollaire I.

2. D'ou il suit, que les cercles, qui ne sont pas paralleles, n'ont pas les mêmes Poles, & qu'on peut considerer sur une sphère autant de Poles qu'il y a de sections inclinées entr'elles, & par conséquent autant d'Axes; ainsi sur la sphère Armillaire, qui représente la Terre ou le Ciel, les Poles du Monde ne sont pas les mêmes que ceux de l'Ecliptique; parce que les Poles du Monde sont ceux de l'Equateur, auquel l'Ecliptique est inclinée de $23\frac{1}{2}$ degrez.

La section $AfBg$, qui est représentée ici en perspective, est un *Cercle majeur*; parce qu'elle passe par le centre C de la sphère. *Fig.* 1.

La section $DcEF$ est un *Cercle mineur*; parce que son centre c est éloigné du centre C de la sphère. Les Poles de la section AB sont les points P & p, éloignez de A & de B, comme de f & de g; parce qu'ils sont par-tout éloignez d'un quart de cercle de la circonference du cercle majeur.

Il n'en est pas de même des points O & o, qui sont les Poles du Cercle Mineur DE; chacun d'eux est bien également éloigné des points de la circonference, mais ces éloignemens ne sont pas égaux entr'eux, puisque les arcs OD ou OE sont plus petits que les arcs oD & oE, par la supposition, que DE ne passe pas par le centre C de la sphère.

Corollaire II.

3. D'ou il suit que si un Cercle Majeur passe par le Pole d'un autre Cercle Majeur, son Pole sera aussi réciproquement à la circonference de celui-ci; ainsi les points A & B seroient les Poles du cercle, qui passeroit par les points Pp perpendiculairement au plan du cercle $PApB$, tels sont, par exemple, l'Equateur & le Meridien, ou l'Horison & un des Cercles Verticaux. On peut voir là-dessus les Sphériques de Theodose.

La partie de Sphère $hlKi$ s'appelle un *Segment*. La partie $SuVt$,

qui eſt une portion de ſphère coupée par deux plans paralleles entr'eux, s'appelle un *Segment tronqué*, & ſa Surface une *Zone*, ou *Couronne de Sphère.*

Si une Sphère eſt coupée par trois ou pluſieurs plans inclinez entr'eux, qui paſſent par le centre C, il ſe fait une Pyramide Triangulaire, ou de pluſieurs côtez, dont le contour de la baſe eſt un triangle Sphérique, ou qui peut être diviſé en Triangles Sphériques, compoſez d'Arcs de Cercles Majeurs, comme on pourra le remarquer dans les voutes ſphériques fermées en Polygone, tel eſt le ſecteur *q m n p.*

CHAPITRE II.

Des Sections des Cônes coupez par des Plans.

Fig. 2. 4. ON diſtingue de deux ſortes de Cônes, l'une de ceux qu'on appelle *Droits;* parce que leur axe eſt droit, c'eſt-à-dire, perpendiculaire ſur leur Baſe, comme SC ſur BgA.

Fig. 3. L'AUTRE de ceux qu'on appelle *Scalenes*, comme le cône *b s a*, dont l'axe S *c* eſt oblique au plan du cercle *b d a e*, qui eſt ſa baſe.

De quelque eſpece que ſoit un cône, Droit ou Scalene, les ſections formées par des plans, qui les coupent, ſont toujours de même nature, excepté certains cas dont nous parlerons ci-après.

5. UNE ſurface plane peut couper un cône de cinq manieres differentes, qui produiſent autant d'eſpeces de figures.

Fig. 2. 6. *Premierement.* Si un cône eſt coupé par un plan, qui paſſe par ſon ſommet, la figure de la ſection eſt toujours un *Triangle* Rectiligne, ſoit que le plan paſſe par l'Axe SC ou qu'il n'y paſſe pas. Dans le premier cas la ſection s'appelle le *Triangle par l'Axe*, comme B S A; dans le ſecond cas on l'appelle ſimplement *Section Triangulaire*, comme *s d e*. On
Fig. 3. ne peut faire dans le cône d'autre ſection rectiligne.

7. *Secondement.* Si l'on coupe un cône par un plan DF parallele à ſa Baſe BA, la Section ſera un cercle; parce que la Baſe BgA eſt toujours ſuppoſée Circulaire. Or il eſt aiſé de voir qu'une telle ſection fait des figures ſemblables, depuis le ſommet du cône juſqu'à ſa baſe.

Fig. 2. 8. *Troiſiémement.* Si l'on coupe un Cône Droit par un plan incliné à ſon Axe CS, comme DE ou D *e*, ou un Cône Scalene par un plan

incliné au plan de la Base, ensorte qu'il rencontre les deux côtez SB, SA, la section est appellée une *Ellipse*, telle est DRE*r* (*Fig.* 6.) où l'on voit la partie inferieure du Cône, & sa partie superieure (*Fig.* 7.) retranchée par cette section, l'une & l'autre représentée en perspective pour aider à l'imagination, & suppléer à ce qu'on n'a pû exprimer à la Fig. 2. qui sert pour toutes les sections. *Fig.* 6. *Fig.* 7.

9. Quoique cette proposition soit generalement vraie, elle souffre une exception dans les Cônes scalenes; car si le plan coupant le Cône obliquement à son Axe, & perpendiculairement au Triangle par l'Axe, fait avec les côtez, des angles égaux a ceux qu'ils font avec la base; mais en sens contraire, la section ne sera plus une Ellipse, mais un Cercle; telle est la section *gf* dans le Cône scalene S*ba*, supposé que l'angle S*gf* soit égal à l'angle S*ba*, ce que l'on appelle *Section souscontraire*. *Fig.* 3.

10. *Quatriémement.* Si un cône est coupé par un plan DP ou *dp*, parallelement à un des côtez SA, & que le triangle par l'axe coupe l'ordonnée Q*q* perpendiculairement, (*Fig.* 8.) la section sera une *Parabole*, & telle qu'elle paroît en perspective Fig. 8. en QD*q* sur le cône, ou en QS*q*, (*Fig.* 9.) hors du cône. *Fig.* 2. & 8. *Fig.* 9.

11. *Cinquiémement*, si un Cône est coupé par un plan parallele à l'Axe SC, ou incliné à cet Axe, de maniere qu'il coupe encore l'autre, supposé qu'on le prolonge audelà du sommet S, comme ID, qui rencontre AS prolongé en *x*, ou, ce qui est la même chose, si le plan qui coupe un cône, coupe aussi son égal & opposé au sommet, comme le plan passant par M*m* (*Fig.* 4.) coupe les cônes opposez ESF, GSI, la section s'appelle une *Hyperbole*, telle est la courbe *bd*A & *h*DH sur le Cône, ou (*Fig.* 5.) B*da* ou LD*n* hors du Cône. *Fig.* 2. *Fig.* 4. *Fig.* 5.

Corollaire I.

12. D'ou il suit, 1.° que le changement d'obliquité des plans, dont les sections forment les Ellipses & les Hyperboles, change aussi la figure de ces sections sans changer leur nature, en les alongeant plus ou moins, comme on peut le voir par les inégalitez des lignes DE & D*e*, qui sont les grands axes, c'est-à-dire, les longueurs differentes de deux Ellipses, de même que les lignes DK, DH & DI sont ceux des Hyperboles differemment ouvertes. *Fig.* 2.

Corollaire II.

13. 2.° Que les Ellipses peuvent être alongées infiniment depuis la position du plan, coupant le cône perpendiculairement à un côté,

jusqu'à ce qu'elle devienne parallele à ce même côté, comme en DP; alors la section change de nature & devient une *Parabole*, ce qui fait dire à quelques Mathematiciens, que la Parabole est une Ellipse alongée à l'infini.

2.° Que les Ellipses peuvent être infiniment resserrées & rétressies jusqu'à ce qu'elles deviennent sans largeur, c'est-à-dire, que le petit axe soit réduit à zéro, comme il est visible par les changemens de position, qui peuvent se faire, depuis la perpendiculaire à un côté tiré du point D, en remontant vers le sommet S, comme en D*e*, jusqu'à ce que le plan ne coupe plus le cône, mais qu'il le touche seulement suivant la ligne BS.

3.° En continuant aussi à changer la position du plan coupant, depuis la ligne DP, jusqu'à ce qu'il tombe sur DB, on resserre de plus en plus l'hyperbole, & au contraire, depuis la position où il touche DB jusqu'à DP, elle s'ouvre de plus en plus, jusqu'à ce qu'elle se confonde avec la Parabole; ainsi la Parabole est comme le passage de l'Ellipse à l'Hyperbole; de sorte qu'on peut la considerer comme une Ellipse dont le grand axe est infini, ou comme une Hyperbole dont le diametre transverse est infini.

Corollaire III.

14. 3.° Que les Ellipses & les hyperboles semblables sont faites par des sections de plan paralleles entr'eux, comme D*e*, *d*L pour les Ellipses, & D*i*, *d*H pour les hyperboles, ou par des plans, dont les positions à l'égard de l'axe & de la base sont semblables; parce que les figures semblables sont celles dont les côtez, les axes & les ordonnées sont proportionels, ou décrits sur un même plan & sur un même axe.

Corollaire.

15. Que toutes les paraboles étant faites par des plans paralleles à un côté, elles ne sont pas variables, mais toutes semblables entr'elles, de sorte qu'elles ne peuvent changer que de grandeur; car *dp* & DP étant paralleles à SA, *dp* sera parallele à DP, axe de la Parabole; & quoique l'un soit plus long que l'autre dans le Cône terminé par la Base AB, il faut les considerer comme pouvant être prolongez aussi bien que le cône.

Quoique nous établissions ici comme des définitions des sections côniques, les differentes manieres dont on peut couper le cône pour

qu'il en réſulte des Cercles, Ellipſes, Paraboles & Hyperboles, on peut en démontrer la verité en faiſant voir que les courbes, auſquelles on a donné ces noms, étant conſiderées hors du cône, ſont les mêmes dans le cône; mais comme il ne nous convient pas d'entrer dans une matiere qui nous meneroit trop loin, & qui a été traitée par un grand nombre d'Auteurs, il nous ſuffit d'avancer ces veritez comme des Axiomes, ſur leſquels nous devons fonder nos raiſonnemens : Ceux qui voudront s'en inſtruire plus particulierement peuvent conſulter les Traitez des ſections côniques; il nous paroît ſeulement à propos, en faveur de ceux qui n'ont étudié que les Elemens ordinaires de la Geometrie, où il n'eſt pas parlé d'autre courbe que du cercle, d'expliquer quelques termes, & d'expoſer quelques proprietez des autres ſections côniques.

Définitions des Points & des Lignes remarquables dans les Sections Côniques.

16. DANS trois des ſections côniques on conſidere un point qu'on appelle *Centre*, ſçavoir dans le cercle, dans l'Ellipſe, & dans l'Hyperbole; mais il n'y en a point dans la Parabole.

17. TOUT le monde ſçait, que le centre du cercle eſt également éloigné de tous les points de la circonference; il n'en n'eſt pas de même dans l'Ellipſe, il n'eſt équidiſtant de la circonference qu'à l'égard de quatre points oppoſez, mais il eſt au milieu de tous les diametres; ainſi le centre C (*Fig.* 7.) diviſe en deux également les *Diametres* inégaux *Fig.* 7.
e d, *m*T, *i t*.

LE plus grand de tous les diametres s'appelle *le Grand Axe*; le plus petit, *le Petit Axe*; ces deux ſont perpendiculaires entr'eux, mais non pas les autres, comme nous le dirons ci-après.

18. DANS l'hyperbole le point appellé *Centre* n'eſt pas au dedans de la Courbe, mais au dehors, entre les deux ſections des cônes égaux oppoſez au ſommet, comme en C (*Fig.* 4.) & en *c* (*Fig.* 5.) où eſt *Fig.* 4.
le milieu de la plus courte ligne D*d*, qu'on puiſſe mener d'une ſection à l'autre, qu'on appelle *l'Axe Tranſverſe*, ou *l'Axe Déterminé*, ou *le premier Axe*, & la ligne qui lui eſt perpendiculaire S*s*, & double de la diſtance du milieu C, au ſommet S, eſt appellé le *ſecond Axe*, le premier s'appelle quelquefois *grand Axe*, & le ſecond *petit*; mais cette dénomination eſt impropre, parce que le ſecond axe peut devenir plus

grand que le premier dans tous les cas où l'angle DS*d* est aigu; les autres lignes menées d'une hyperbole à l'autre par le centre C, comme PR, (*Fig.* 5.) sont appellées *Diametres.*

19. Quant à la Parabole il n'y a point de centre; parce qu'il n'y a aucune division égale à faire dans aucun Diametre, ni dedans ni dehors de la section; au dedans, parce qu'étant ouverte & ses Diamemetres étant infinis, en ce qu'ils ne coupent la courbe que par une de leurs extremitez où est leur *Origine*, ils ne peuvent être coupez en deux également; ni au dehors, parce qu'il ne peut y avoir deux termes, puisque le plan coupant le cône étant prolongé, ne peut couper l'opposé au sommet, à cause qu'il est parallele à son côté.

20. On appelle *Diametre* toute ligne droite qui en coupe également deux autres paralleles entr'elles, terminées de deux côtez à une circonference; & *Axe*, le diametre qui les coupe perpendiculairement, & passe par le sommet principal de la section; ainsi, par exemple, dans la parabole (*Fig.* 9.) la ligne T*u* est un Diametre; parce qu'elle coupe en deux également en *o* les deux paralleles *rs*, *z*R, & SP est un axe, parce qu'il passe par le sommet principal S de la courbe, & coupe la ligne Z*q*, en deux également, & particulierement en P, de même que D*d* dans l'hyperbole, (*Fig.* 5.) & DE dans l'Ellipse, *Fig* 6.

Apol. l. 2. *p.* 28.

21. Les lignes perpendiculaires aux Axes sont appellées *Ordonnées*, comme P*q*, *p*Q (*Fig.* 9.) *o r* OR (*Fig.* 5.) pour l'Hyperbole, & CR *o r* (*Fig.* 6.) pour l'Ellipse. On appelle du même nom les lignes obliques aux autres Diametres, qui sont coupées en deux également, comme (*Fig.* 9.) ZR, *r s* paralleles entr'elles dont nous venons de parler, ne faisant attention qu'à leur moitié ZO, *r o.*

Fig. 9. *Fig.* 5.

22. La principale marque des ordonnées est celle d'être *paralleles à la Tangeante*, qui passe par l'extremité du Diametre, auquel elles sont ordonnées; ainsi (*Fig.* 9.) si T*n* est une Tangeante au point T, extremité du Diametre T*u*, & qu'on lui mene une parallele *o r* ou OZ, ces deux lignes *or* & OZ sont des ordonnées au diametre T*u*; il en sera de même dans l'Ellipse & dans l'Hyperbole; on les appelle aussi *Appliquées*, en Latin *Ordinatim applicatæ.*

Les parties des Axes ou des autres Diametres, qui sont comprises entre l'extremité T, (*Fig.* 9.) & les points *o* & O, où ils sont coupez par les ordonnées, s'appellent *Abscises*, du Latin *abscindere*; ainsi T*o* & TO sont des Abscises du Diametre T*u* & S*p*, SP celles de l'Axe.

Fig. 9.

23. Les Abscises & les Appliquées, considerées les unes à l'égard des autres, s'appellent *Co-ordonnées.*

Les diametres T*m*, *ti* (*Fig.* 7.) qui se croisent, de maniere qu'ils sont paralleles aux Tangeantes T L, *tl*, qui passe par les extremitez T & *t* sont appellez *Conjuguez*. La même chose doit s'entendre pour les Hyperboles. *Fig.* 7. *Apol. l.* 2. *p.* 20.

24. La partie d'un Axe prolongé hors de la section, comme D Y (*Fig.* 6.) comprise entre l'ordonnée *to* à cet axe, menée du point d'attouchement *t* d'une tangeante *t* Y, & le point de rencontre Y de l'axe & de la tangeante s'appelle *Soustangeante*. *Fig.* 6.

25. La troisiéme proportionelle à deux Diametres conjuguez est appellée *Parametre*, de celui qui est le premier terme dans l'Ellipse & dans l'Hyperbole; & pour la parabole c'est la troisiéme proportionelle à l'Abscise & à l'Ordonnée, ou à la Soustangeante & à la Tangeante.

26. La ligne droite qui est la rencontre du plan de la base du cône, prolongée s'il le faut; & d'un autre plan passant par le sommet parallelement à une section cônique, est appellée *Directrice*; telles sont les lignes *e* I pour l'Ellipse, (*Fig.* 6.) K L pour l'Hyperbole, (*Fig.* 4.) & A*g* pour la Parabole, (*Fig.* 8.) La premiere de ces lignes est toute hors du cône, la seconde toute au dedans, & la troisiéme est Tangeante à la Base du cône. *Fig.* 6. 4. 8.

On appelle aussi *Directrice* une ligne qui est dans le même plan qu'une section, & perpendiculaire à un axe, à certaine distance de son sommet, comme D *i* est la Directrice de la Parabole QS*q*, (*Fig.* 9.) si elle est éloignée du sommet S au dehors, autant que le Foyer F est au dedans; plus loin de l'Ellipse, & plus près pour l'Hyperbole.

27. Outre ces lignes communes à toutes les sections côniques, il y en a encore de particulieres à l'Hyperbole, qu'on appelle *Assymptotes*, ce sont des lignes droites AY *ay*, (*Fig.* 5.) qui passent par le centre C des sections opposées, & qui en approchent continuellement sans jamais les rencontrer, proprieté merveilleuse, & difficile à concevoir, quoique la verité en soit démontrée. Ces lignes sont les intersections de deux plans, qui touchent la base du cône aux extremitez L & K de la directrice, & passent par le sommet S du cône. *Fig.* 5. *Fig.* 4.

28. Les points qu'on appelle *Foyers* méritent encore d'être considerez, à cause de leurs grandes proprietez, pour la description des sections côniques; leur situation est sur un premier axe, à quelque distance de son extremité.

29. Dans l'Ellipse il y en a deux sur le grand axe, desquels si l'on

tire des lignes droites, qui se joignent à un point quelconque de la circonference, leur somme est toujours égale à la longueur de ce grand
Fig. 7. Axe; si les points F & *f* (*Fig.* 7.) sont les Foyers de l'Ellipse, A *t* T *i* la somme des lignes *fg* & F*g* est égale à l'Axe A *a*.

30. Dans les Hyperboles opposées il y en a aussi deux F & *f* sur
Fig. 5. le principal axe prolongé *d*D, (*Fig.* 5.) desquels si l'on mene deux lignes FP *f*P au même point P de la courbe, pris où l'on voudra, la difference P *q* de ces deux lignes est égale au principal Axe. *Voyez les Traitez des Sections Côniques de* M. de l'Hopital, *Article* 73.

Fig. 9.

31. Dans la parabole il n'y en a qu'un en F sur l'axe S P (*Fig.* 9.) duquel si on mene une ligne F *h* à un point quelconque de la parabole Q S *q*, cette ligne sera égale à la ligne *hi*, menée du même point à la directrice D *i*, parallelement à l'axe DP.

Exposition de quelques proprietez des Lignes menées au-dedans & dehors des Sections Côniques, dont la connoissance fournit differens moyens de les décrire, dans certaines circonstances de Lignes & de Points donnez.

32. Si l'on tire deux lignes paralleles au dedans d'une section Cônique terminées à sa circonference de part & d'autre, & qu'on les divise en deux également, la ligne qui passe par leur milieu, & qui se termine à sa section est un *Diametre*, cette proprieté est une suite de la définition que nous avons donné des lignes appellées Diametres.

Des Abscises & des Ordonnées des Sections Côniques.

Nous avons dit que le triangle étoit la premiere section du cône; mais comme elle est rectiligne il n'en est pas question ici, où nous ne parlons que des courbes. Cependant nous remarquerons en passant, qu'elle a ses abscises & ses ordonnées, qui ont un certain rapport. Si l'on fait *y* F parallele à CA, (*Fig.* 2.) S *y* sera une abscise, &
Fig. 2. *y* F une ordonnée à l'axe SC du triangle BSA, on trouvera donc que

Le Rectangle fait de son abscise S *y*, par la moitié de sa base CA, est

égal

égal au Rectangle fait de son Ordonnée yF par son Axe ; car à cause des paralleles $Sy : yF :: SC : CA$; donc $Sy \times CA = yF \times SC$. Fig. 10.

33. Dans le cercle le Rectangle fait des Abscises, l'une par l'autre, est égal au quarré de l'ordonnée $AO \times OB$ (*Fig.* 10.) $= \overline{OR}^2$, cela est démontré dans les élemens de la Geometrie d'Eucl. l. 3. pr. 35.

34. Dans l'Ellipse les *Quarrez des ordonnées sont entr'eux, comme les Rectangles des Abscises*, si ADB est une demie Ellipse $\overline{ot}^2 : \overline{CD}^2$ ou $\overline{or}^2 : \overline{CE}^2$ dans la demie Ellipse AFB :: $AO \times OB : AC \times CB$: cette proprieté est démontrée dans tous les traitez des sections côniques.

35. Dans la Parabole *les Quarrez des Ordonnées* or, OR (*Fig.* 8.) *sont entr'eux comme les abscises* Do, DO, ainsi $\overline{OR}^2 : \overline{or}^2 :: DO : Do$. Fig. 8.

36. Dans l'Hyperbole le rapport des Quarrez des Ordonnées entr'eux, & aux Rectangles des Abscises est le même que dans l'Ellipse, en ajoutant aux abscises le Diametre qui est au dehors de l'Hyperbole entre les sections opposées ; ainsi $\overline{or}^2 : \overline{Ft}^2 :: Do \times od : DF \times Fd$. Fig. 5.

Corollaire I.

37. D'ou il suit que les ordonnées également éloignées du centre d'une section qui en a un, sont égales entr'elles, puisqu'elles ont un même rapport à des rectangles égaux $\overline{eo}^2$ (*Fig.* 7.) . $mO \times OT :: \overline{no}^2 : mo \times oT$; mais à cause de $OC = oC$ par la supposition $mO \times OT = mo \times oT$, donc $eO = no$. Fig. 7.

38. Dans la parabole la proposition doit s'appliquer aux Ordonnées équidistantes d'un Diametre, comme si $or = oS$, on aura $rx = Sy$, (*Fig.* 9.) ce qui est clair, parce que la figure $rxyS$ est un Parallelograme. Fig. 9.

Corollaire II.

39. Dans toutes les sections côniques les lignes paralleles à un Diametre TO, équidistantes du point d'attouchement T d'une Tangeante AD (*Fig.* 11.) comprises entre la tangeante & la courbe, comme Br, Cv, AR, DG sont égales entr'elles ; car si par les points r & R on mêne des paralleles à la tangeante AD, ces lignes seront des Ordonnées au diametre TO, qui les coupe en deux également au point O & o ; donc le parallelograme $TorB = ToVC$, & le parallelograme $TORA = TOGD$; donc $Vr = CB$, & $AR = DG$. Fig. 11.

COROLLAIRE III.

40. Si deux ou plusieurs lignes paralleles *eh*, *ti* terminées à la circonference d'une Ellipse, ou d'une autre section cônique, sont coupées par une troisiéme HK, les rectangles faits des parties des paralleles, comparez à ceux des parties de celle qui les coupe, sont en-
Fig. 7. tr'eux en même raison $tq \times qi : Hq \times qK :: ep \times ph : hp \times pK$; parce que chacun de ces rectangles a même raison au quarré de la Tangeante, qui est parallele aux lignes dont il est formé, ce qui est démontré dans les traitez des sections côniques.

Proprietez particulieres à l'Ellipse.

Le grand usage que nous avons à faire de l'Ellipse m'engage d'ajouter ici quelques proprietez qui lui sont particulieres, & qui servent à la décrire dans certaines circonstances.

Fig. 10. 41. Si le Diametre AB d'un cercle ou demi cercle AEB, est commun à une Ellipse ou demie Ellipse, décrite sur le diametre au dedans ou au dehors du demi cercle, comme ADB ou AFB, & qu'on lui mêne
Fig. 10. les ordonnées *or* CF, *les ordonnées au Cercle seront entr'elles comme celles de l'Ellipse*, OR : CF :: O*t* : CD, & OR : O*r* :: CE : CF ; parce que l'Ellipse n'est qu'un cercle alongé ou rétressi, & que les quarrez des Ordonnées auront toujours le même rapport entr'eux que celui des mêmes rectangles AOB, ACB.

42. Cette proprieté est encore vraïe, quand même les ordonnées
* Fig. 12. ne seroient pas perpendiculaires à l'axe AB, comme sont *or* & CD;* car si par leurs extremitez *r* & D on mêne des parelleles au Diametre AB, qui couperont les ordonnées au cercle CE, & *o*R en F & *g*, il se fera deux triangles semblables CPFD & *ogr*, qui feront voir que les ordonnées de l'Ellipse sont en même raison que celles du cercle, puisque si l'on fait CF : CE :: *og* : *o*R, les points F & *g* seront à la circonference d'une Ellipse ; mais CD : CF :: *or* : *og* ; donc CD : CE :: *or* : *o*R. C. q. f. d.

43. La somme des deux Axes est plus petite que celle de deux diametres conjuguez quelconques, & leur difference est plus grande que celle de ces diametres.

44. Cependant la somme des quarrez de deux diametres conju-

guez *m*T, *ti* eſt égale à celle des quarrez des deux axes A*a*, B*b*; Fig. 7.
cela eſt démontré dans tous les traitez des ſections côniques.

Des Tangeantes des Sections Côniques.

45. SI par un point *t* on mêne une tangeante *t*Y, qui rencontre un axe ou diametre quelconque, prolongé en Y, & une ordonnée *to* à ce diametre, la partie YD de la ſouſtangeante Y*o* ſera égale à l'abſciſe D*o* dans la parabole; elle ſera plus grande dans l'Ellipſe, & plus petite dans l'hyperbole; ainſi l'arc de la ſection qui paſſera entre D & Y, ſi D étoit le milieu de OY, ſera une hyperbole, & celui qui paſſera entre D & O, dans la même ſuppoſition, ſera une Ellipſe. Cela eſt démontré dans les traitez des ſections côniques. Fig. 6. 8. 5. Fig. 8.

46. Dans la même Fig. 6. ſi une tangeante *t*Y rencontre l'axe ED prolongé, ou un autre diametre, & que du point d'attouchement *t* on lui mêne une ordonnée *to*, les lignes C*o*, CD, CY ſeront continuellement proportionelles, non ſeulement dans l'Ellipſe, mais auſſi dans l'hyperbole, on aura C*o*: CD :: CD: CY. Fig. 6. Fig. 5.

47. Si deux lignes *a*T, *at* qui concourrent en *a*, touchent une ſection cônique quelconque aux points T & *t*; la ligne menée du point *a* par le milieu *m* de la ligne T*t*, qui joint les points d'attouchement, eſt un diametre, & par l'inverſe, ſi elle eſt un diametre, elle paſſera par *m*. Fig. 13. Apollonius l. 2. p. 19. & 20.

48. Si une ſection cônique eſt touchée par deux lignes *at*, *a*T [Fig. 13] la ligne T*t*, qui paſſe par les deux points d'attouchement, étant prolongée vers *b*, ſi de ce point pris à volonté, l'on tire deux autres tangeantes *b*N, *b*E, elles couperont les deux précedentes en F & D, je dis que la ligne F*a* ſera diviſée *harmoniquement*, c'eſt-à-dire, que les trois lignes *a*F, *at* & *a*D ſont harmoniquement proportionelles; la premiere ſera à la troiſiéme, comme la difference de la premiere & de la ſeconde eſt à la difference de la ſeconde & de la troiſiéme F*a*: *a*D :: F*t*: *t*D. Cette proprieté nous ſervira à trouver les points d'attouchement dont nous aurons beſoin au deuxiéme Livre, par une méthode très-facile.

On ne s'arrête pas ici à démontrer toutes ces véritez, qui en ſuppoſent d'autres, auſquelles il faudroit remonter; il ſuffit qu'elles le ſoient dans les Livres connus, comme ſont les ſections côniques d'Apollonius, de M. de la Hire & du Marquis de l'Hopital, pour

nous ſervir à raiſonner conſéquemment dans les uſages que nous devons en faire.

De quelques differences de Poſition des Sections Côniques dans les Cônes Scalenes.

Quoique les Cônes Scalenes ne ſoient pas d'une nature differente de celle des cônes droits, l'obliquité de leur axe ſur le plan de la baſe occaſionne quelque difference dans les ſections, à ne conſiderer que leur poſition reſpective.

49. Premierement. Nous avons fait voir que la ſection d'un plan, oblique à l'axe du cône ſcalene, dont il coupe les deux côtez, pouvoit être un cercle, quoique naturellement cette ſection ſoit une Ellipſe.

50. Secondement. Les ſections faites par des plans paralleles à la baſe, qui ſont des cercles dans les cônes droits, peuvent être des Ellipſes dans les cônes ſcalenes, s'ils ſont conſiderez comme des cônes droits ſur une baſe Elliptique ; car ſi l'on ſuppoſe que la baſe *bead*

Fig. 3. [*Fig.* 3.] eſt une Ellipſe, & qu'une ligne *sa* immobile ſur ſon point *s*, parcourt vers ſon autre extremité *a* le contour de cette Ellipſe, la figure qui en réſultera ſera un cône ſcalene de baſe Elliptique; on peut imaginer la même generation pour un cône droit, comme ſi la

Fig. 2. baſe B*g*A [*Fig.* 2.] étoit une Ellipſe.

Il ſeroit toujours évident que toutes les ſections faites par des plans paralleles à ces baſes ſeroient des Ellipſes ſemblables à celles de la baſe ; car tous les diametres poſſibles DF, BA d'une ſection par l'axe BSA, ou KI, *ba* [*Fig.* 3.] ſeroient proportionels à ceux d'une autre ſection par l'axe du même cône.

Mais toutes les ſections obliques dans ce cône ne ſeroient pas des Ellipſes, car ſans s'arrêter à la ſection ſouſcontraire, qui n'a pas lieu dans ce cas ; puiſque la baſe n'eſt pas circulaire, on pourra toujours démontrer que de tels cônes peuvent être coupez par un plan incliné à l'axe, & qui ne ſera pas avec les côtez des angles égaux à ceux de la baſe, c'eſt-à-dire, des côtez du triangle par l'axe avec la baſe, dont la ſection ſera un cercle, ainſi que la ſouſcontraire; car ſi l'on tire la droite *sx* ſur la ſurface du cône, & *nc* dans la baſe au centre C, & *om* parallele à *nc* ; puiſque *om* : *nc* :: S*m* : S*c* le diametre *om* ſera plus petit que *nc* dans le rapport de K*m* a *bc*. Si, par exemple, *bc* : *cn* :: le grand axe eſt au petit, le même rapport ſera entre K*m*

& $m o$, donc Km fera plus grand que $m o$; or il eſt clair qu'en changeant l'inclinaiſon du plan de la ſection, par exemple, en r, on peut racourcir ce demi axe Km juſqu'à ce qu'il devienne égal à $m o$, comme ſi du point m pour centre & pour rayon mo on coupoit le côté bS en r, ce qui eſt poſſible à l'égard de pluſieurs côtez diametralement oppoſez, puiſque mK eſt plus grand que $m o$, alors les points r & o feront également éloignez du centre m, par conſéquent les axes étant égaux entr'eux la ſection ſera un cercle. S'il s'agiſſoit au contraire d'alonger le petit axe, il eſt viſible qu'il n'y auroit qu'à incliner le plan de la ſection du côté de ce petit axe.

THEOREME I.

La ſection plane Elliptique faite dans l'intervale de deux Cônes Concentriques & ſemblables, comme entre les ſurfaces concaves & convexes d'un cône creux d'égale épaiſſeur, *eſt une couronne compriſe par deux circonferences d'Ellipſes, qui ne ſont pas équidiſtantes, & qui ne peuvvent être concentriques que dans les cônes ſcalenes, lorſque la ſection eſt perpendiculaire à l'axe.*

Soit [*Fig. 6.*] un cône FsG concentrique & ſemblable au cône BSA, dans lequel on le ſuppoſe, il eſt évident par la ſuppoſition, que leurs côtez BS, Fs; AS, Gs feront non ſeulement paralleles, mais équidiſtans dans la ſection du triangle par l'axe BSA. *Fig. 6.*

Il eſt encore clair que le plan de la ſection oblique DE, que nous ſuppoſons perpendiculaire au triangle par l'axe, étant également incliné à l'axe commun SX, de l'un & de l'autre cône, il fera des Ellipſes ſemblables DRE dans le grand, & $d h e$ dans le petit.

Il faut préſentement faire voir que quoique les deux ſurfaces des cônes ſoient équidiſtantes, & leurs baſes, concentriques, les ſections Elliptiques ne le ſont pas; des points D & e ſoient tirées les perpendiculaires Dx, eK, qui feront égales par la ſuppoſition.

Puisque l'angle Dds exterieur au triangle dse eſt plus grand que l'interieur oppoſé $d e s$, ou ſon égal DES, la ligne Dd, compriſe entre les deux paralleles SB, sF ſera plus courte que la ligne eE compriſe entre les paralleles équidiſtantes de ces premieres; car puiſque Dx $=$ eK, faiſant K$y = dx$, le côté ey ſera $=$ Dd; or puiſque l'angle eEK eſt plus petit que eyK, c'eſt-à-dire, la ligne eE plus oblique ſur

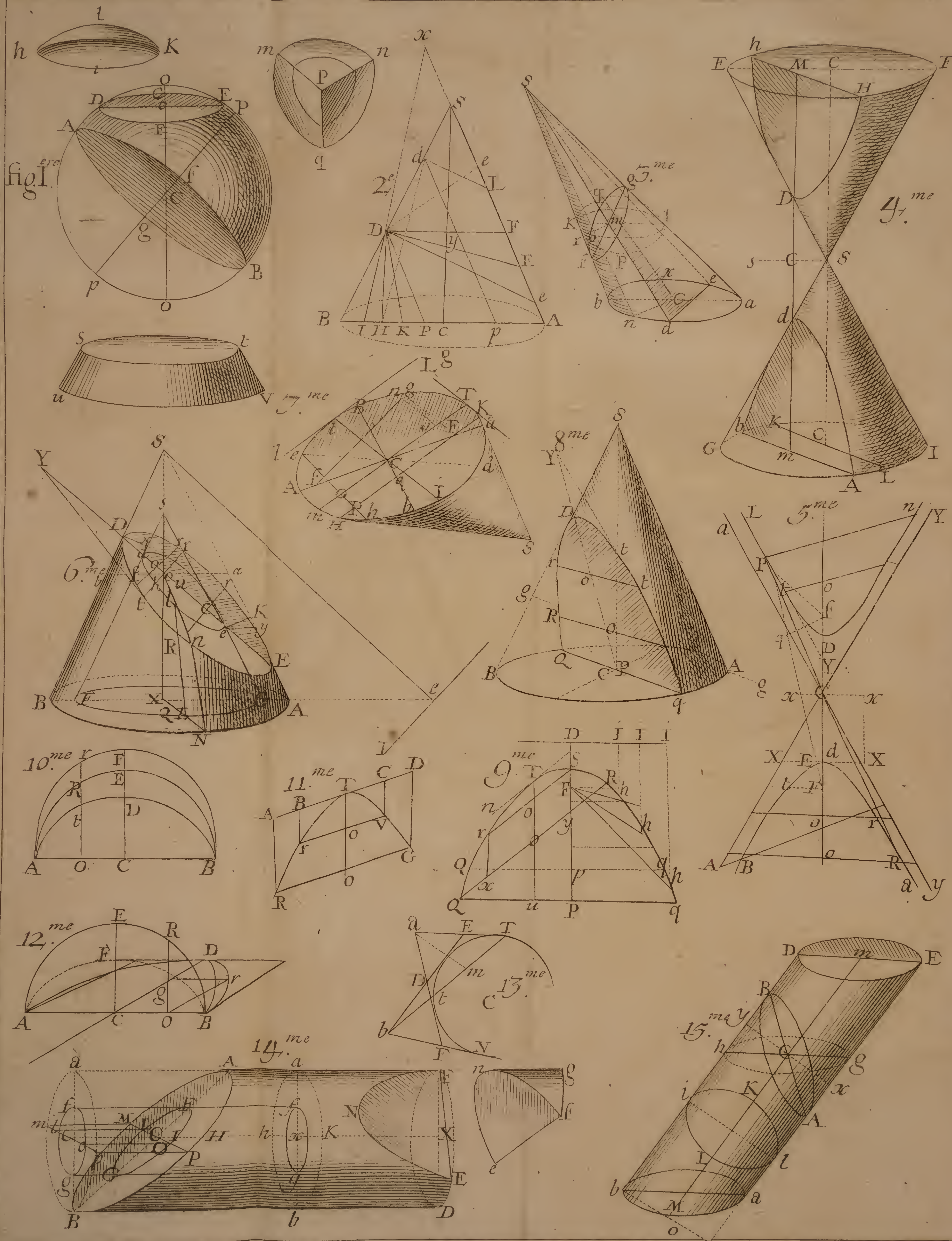
EK, elle sera plus grande que *ey*, *ce qu'il falloit démontrer*; donc les Ellipses DRE & *dhe* s'approcheront plus vers D que vers E sur l'axe DE; par conséquent elles ne seront ni équidistantes, ni concentriques, *ce qu'il falloit* premierement *démontrer.*

Secondement. Si le cône au lieu d'être droit étoit scalene, il est clair que l'axe étant oblique à sa base circulaire sera perpendiculaire à quelques sections Elliptiques; dans ce cas nous pouvons considerer la figure 6. differemment du cas précedent, en supposant la base BA Elliptique, & la section oblique DE circulaire [si l'on veut] ou Elliptique.

Il est clair que les distances des Ellipses de la base AB dans la section du triangle par l'axe BSA sont égales en BF & AG; parce que le diametre commun BA est également incliné aux côtez des cônes intérieur & extérieur; mais entre ces deux extremitez on ne peut trouver aucune partie des deux circonferences des Ellipses, qui ne soient plus ou moins éloignées. Pour le démontrer, soit un plan SNX perpendiculaire au triangle par l'axe BSA, qui coupera les Ellipses ou les cercles DRE & *dhe* suivant une ligne *on*, qui sera perpendiculaire à ce triangle, de même que XN; par conséquent ces deux lignes *on*, XN seront paralleles entr'elles, donc leurs parties *ln*, LN comprises aussi entre deux paralleles SN & *s*L seront égales entr'elles; mais l'intervale *ln* des circonferences de la section oblique n'est pas égal aux intervales D*d*, & E*e*; puisqu'il est plus long que l'un & plus petit que l'autre; donc l'intervale LN des deux Ellipses de la base ne sera pas égal aux distances BF, AG; en effet la section *ba* par la perpendiculaire *on* parallelement à la base BA sera des Ellipses semblables dans l'un & l'autre cône, ausquelles l'axe *on* est commun avec une ordonnée de la section oblique; or les distances des deux cônes en D*d* & *bf* sont entr'elles comme DO à *b*O; ainsi le rapport de D*d* à *bf* augmente depuis le triangle par l'axe jusqu'à la section perpendiculaire au plan en Q*n*, & au contraire elle diminuë depuis le point *n* jusqu'en E; donc la distance LN sera moyenne entre celle des extremitez BF & AG. Elle sera plus petite si DE ou BA est un grand axe, ou plus grande si BA est un petit axe.

De cette inégalité de distances des Ellipses concentriques à leur axe, s'ensuit nécessairement celle de tous les points d'une extremité d'un diametre à l'autre; puisqu'elles se rapprochent & s'éloignent d'une distance proportionelle à celle des axes; donc les Ellipses de la base, quoique concentriques, ne sont pas équidistantes, *ce qu'il falloit démontrer.*

pag. 23. TRAITÉ DE STEREOTOMIE LIV. I.ER PLANCHE I.ERE



Scolie.

Il faut cependant remarquer, que, quoique les Ellipses concentriques semblables ne soient pas équidistantes, mesurées sur differens axes & diametres, elles le sont cependant sur les mêmes axes & sur les mêmes diametres; & même non seulement sur toutes les lignes droites qui traversent ces deux circonferences, mais encore sur celles qui ne font que toucher l'intérieure sans la couper, ce qui fournit une maniere aisée de faire une Ellipse *Asymptotique* à une autre donnée; il suffit d'en avoir un seul point, comme nous le dirons au second Livre. Je me sers de ce terme, parce que cette proprieté qui est semblable à celle de l'hyperbole à l'égard des asymptotes, a donné occasion à M. de la Hire * d'appeller les sections côniques, concentriques, & semblables *Asymptotiques*. * *Sect. con. l. 6. p. 127.*

Corollaire I.

On peut étendre cette proposition aux autres sections qu'aux Ellipses, si l'on veut considerer avec les Mathematiciens la parabole, comme une Ellipse dont l'axe est infiniment long, & l'hyperbole comme une Ellipse renversée, qui a ses Foyers en dehors; en effet si l'on coupe un cône creux d'égale épaisseur, de maniere que le plan coupant fasse une de ces deux sections, on remarquera visiblement, que la courbe de la surface intérieure n'est pas parallele à celle de l'extérieure.

Application à l'Usage.

Cette proposition fait voir que les arcs des arêtes de Doële & d'Extrados des faces des voutes côniques, qui sont obliques à la direction de l'axe, comme aux Trompes biaises & surbaissées à leur face, ne doivent pas être paralleles entr'eux, comme les font quelques Auteurs de la Coupe des pierres; car si l'arc de doële n'est pas plus près de l'extrados à une Imposte, qu'à l'autre du côté de l'angle le moins aigu, la voute deviendra moins épaisse du côté opposé qui est le plus long, de sorte que le côté & le piédroit le plus long & le plus chargé deviendroit le plus foible, ce qui est évidemment contre la bonne construction.

Il ne faut pas dire que cette difference est si peu considerable, qu'on lui peut préferer la simetrie extérieure de la face; car sans faire de supposition de cas extraordinaire, l'axe ED peut fort bien être perpendiculaire au côté SB, si l'angle S étoit plus ouvert, par exem-

ple, de 60. degrez, alors le même axe feroit en E un axe de 30. degrez avec le côté SA, or dans cette fuppofition il eft clair que la voute feroit moitié moins épaiffe à l'impofte SE qu'à l'impofte SD; car les diftances des paralleles SB, *s* F, SA, *s* G font en raifon des finus des angles, que la ligne ED fait avec les côtez; mais le finus total eft double de celui de 30. degrez, donc la diftance *e k*, c'eft-à-dire l'épaiffeur de la voute vers E *i* ne fera que la moitié de D *x*, qui eft celle du côté SD. Il n'eft pas néceffaire de démontrer ce rapport qu'on apperçoit d'un coup d'œil par celui des triangles femblables EK*e*, & ESD, fi l'angle D eft fuppofé droit, & l'angle S de 60. degrez, ce qui n'eft pas de même dans la figure 6; or *e* K eft égal à la diftance des paralleles vers D & *e* E, celle des mêmes ou de leurs égales prife obliquement fur la ligne ED; donc, &c.

En fecond lieu, ce problême fait voir, que lorfqu'un ceintre eft Elliptique on ne peut lui faire un ceintre parallele qui foit auffi Elliptique, de forte que s'il s'agit, par exemple, d'un Bandeau ou d'une Archivolte, & que l'on faffe les deux arêtes de doële & d'intrados Elliptiques, il fera inégalement large, & s'il eft par-tout également large les deux arêtes ne feront pas exactement Elliptiques, ce qui eft furprenant & incroyable aux Ouvriers, & aux gens qui n'ont point de Theorie.

THEOREME II.

Pl. 2. *Une Section Cônique donnée peut être celle d'une infinité de Cônes differens.*

Fig. 16. 17. & 18. Soit [*Fig. 16. 17. & 18.*] une fection cônique DAC, dont AB eft un diametre, auquel la ligne CD eft une ordonnée, divifée en deux également en M, on lui menera par ce point une perpendiculaire FE, de longueur prife à volonté fur un plan incliné à celui de la fection cônique donnée, d'une telle inclinaifon que l'on voudra (ce qu'on ne peut repréfenter dans ces figures qu'en perfpective) fur cette ligne FE comme diametre, on décrira un cercle FDEC, dont la ligne DE fera une corde commune à l'ordonnée de la fection cônique: fi par les points EABD on tire les lignes ES, FS, qui fe rencontreront en S, je dis que le fommet S fera celui d'un cône, qui aura pour bafe, ou ce qui eft la même chofe, pour fection parallele à la bafe, le cercle FDEC, & pour autre fection la fection donnée DAC, ce qui eft clair par la conftruction & par la generation du cône, fuppofant qu'une ligne SB, immobile fur fon point S, parcourt la circonference du cercle DFCE; puifque par la même conftruction cette ligne paffera par les deux points communs DE, & par les extremités des diametres AB, EF des deux fections le cercle & l'Ellipfe; or puifque le diametre du

tre du cercle FE peut être varié de longueur, & que l'on peut même changer la poſition de ſon centre en l'approchant ou l'éloignant du point M, il eſt viſible que le point S changera auſſi de poſition, puiſqu'elle dépend de celle des extremitez de ce diametre, par exemple, ſi au lieu du terme E on en prenoit un autre plus en dehors en K ou en L, le point S tomberoit en x ou en y, & de même ſi l'on rapprochoit ou éloignoit l'autre terme F, le point S tomberoit plus haut ou plus bas; donc on peut faire paſſer une infinité de ſurface de cônes differens par la circonference de la ſection cônique donnée, *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 17.

Corollaire.

De-la il ſuit que ſi une ligne AS, immobile ſur le point S, pris à volonté, ſe meut au tour d'une ſection cônique ouverte, comme la parabole ou l'hyperbole, il ſe formera une pyramide mixte, qui ſera toujours une portion de cône, & par conſéquent dont les ſections qui ne feront pas paralleles à la baſe ouverte donnée, pourront être connuës en cherchant la baſe du cône, dont cette pyramide mixte eſt une partie, de la maniere que nous venons de le dire. *Fig.* 19.

Ou bien ſans achever le cône, ni connoître le cercle de la baſe, on peut les connoître par la comparaiſon des parties des ſouſtangeantes, qui ſont au deſſus & au dehors du cône [par l'article 45.]

Soit, par exemple, la baſe donnée ARP une parabole, ſi l'on ſuppoſe la pyramide ARPS coupée par un autre plan incliné à cette baſe, dont l'interſection ſoit AP, & qui coupe le côté SR en H, on menera par un point quelconque de la baſe, comme T, une tangente TN, qui rencontrera l'axe MR de la baſe prolongé en N, & ayant tiré NS, on imaginera un plan TNS, qui touchera la pyramide ſuivant la ligne TS menée du point d'attouchement de la baſe au ſommet S, laquelle coupera la courbe AHP en u, par où on menera dans le plan incliné une ligne ux parallele à AP, & un autre uy tangeante à la même courbe, qui rencontrera en y l'axe My, qui eſt dans le même plan que MN; ſi la longueur Hy eſt plus petite que Hx, c'eſt une marque que la ſection qu'on veut connoître eſt une hyperbole; ſi au contraire elle étoit plus grande, comme LE à l'égard de Ed, ce ſeroit une Ellipſe, & ſi elle étoit égale, comme on ſuppoſe mR & RN, qui ne le ſont cependant pas dans la figure, par exemple, dI & In, ce ſeroit une parabole, ce qu'il eſt plus facile d'appercevoir en examinant, ſi les plans nd & NM ſont paralleles entr'eux.

Application à l'usage.

Cette proposition fait voir que l'on peut appliquer à toute sorte de voutes côniques tel ceintre de face qu'on jugera à propos, avec telle position ou inclinaison de l'axe qu'on jugera convenable à la voute qu'on se propose de faire, par exemple, qu'on peut faire une Trompe de niveau ou rampante, dont le ceintre de face soit surhaussé ou surbaissé de telle mesure qu'on voudra, & connoître dans quelle situation sa doële sera circulaire.

Secondement, elle fait connoître les changemens qui arriveroient, si le ceintre de face étoit d'une section ouverte, par exemple, parabolique, comme il l'est en effet dans les *Trompes sur le coin* à plomb, dont l'axe est de niveau; ainsi supposant que le mur soit en talud, la courbe se changera en hyperbole, & s'il étoit en surplomb elle deviendroit une Ellipse; cependant l'Architecte est le maître de choisir pour ceintre de face la courbe qu'il voudra.

De même si le ceintre de face d'une Trompe cônique à pans à plomb, qui est ordinairement une hyperbole, lorsque l'axe est de niveau, est changé par un talud, il ne changera pas de genre de courbe, mais il deviendra seulement une hyperbole differente de celle qui étoit le ceintre à plomb.

En un mot ce Theoréme fait connoître la nature de tous les changemens que peuvent causer les differens contours des ceintres de face des Trompes, & ceux de leurs *Trompillons*, qui peuvent ne leur être pas paralleles, & tous ceux qui proviennent des inclinaisons à l'horison, & déclinaison de la perpendiculaire sur la face, ce qui comprend toutes les trompes biaises & rampantes, ascendentes ou descendentes, & les joints de Téte; de sorte qu'on peut dire que ce Theoréme est le fondement de toutes les voutes côniques. Passons aux cylindriques.

CHAPITRE III.

Des Sections des Cylindres coupez par des Plans.

55. On divise les cylindres comme les cônes, en *Droits & Scalenes.*

Ils sont appellez *Droits*, lorsque leur axe est droit, c'est-à-dire,

perpendiculaire à leur base, comme le cylindre BDF *a* est droit sur la ponctuée B*a* [*Fig.* 14.] parce que son axe XC est perpendiculaire sur B *a*. *Fig.* 14.

56. Ils sont appellez *Scalenes*, lorsque leur axe *m*M [*Fig.* 15.] est *Fig.* 15. oblique sur la base *ba* ou DE du cylindre *b*DE*a*.

Cette difference de position d'axe à l'égard de la base, en peut faire dans la position des sections du cylindre, comme elle en fait dans celles du cône.

57. La section d'un cylindre coupé par une surface plane ne peut varier que de trois manieres.

I.° Lorsque le plan coupant passe au long de l'axe ou parallelement à l'axe, la section est un *Parallelograme* rectangle, si le cylindre est droit, & obliquangle, s'il est scalene, ou il peut aussi être rectangle, si la section est perpendiculaire au plan passant par D *a*.

58. 2.° Lorsque le plan coupant est parallele à la base B *a* comme *a b*, la section est un *Cercle*; parce qu'on suppose toujours un cylindre de base circulaire, & que la section parallele lui doit être semblable & *Fig.* 14. égale, à cause que tous les côtez du cylindre étant paralleles à l'axe, les diametres seront tous égaux.

59. 3.° Lorsque la section est oblique, comme B A, elle est toujours une Ellipse dans le cylindre droit, quelle que puisse être l'obliquité du plan coupant à l'égard de l'axe; mais dans le cylindre scalene, la section, quoiqu'oblique, peut être un cercle, lorsque le plan coupant [*Fig.* 15.] étant perpendiculaire au parallelograme, par l'axe *b*DE*a*, fait avec les côtez des angles égaux à ceux de la base, mais en sens *Fig.* 15. *contraire*, c'est-à-dire, que l'angle DBA soit égal à l'angle *b a* E, ou (ce qui est la même chose) BAE égal *a*D*b a*; car si par le point C, milieu de B A, on méne *b g* parallele à *b a*, & que par le même point on tire *y x* perpendiculaire aux côtez *b* D, *a*E, on aura deux triangles égaux C*x*A & C*xg*; parce qu'ils sont rectangles en *x*, & qu'ils ont les angles en A & *g* égaux (*par la supposition*) & le côté C*x* commun; donc les côtez CA, C*g* seront égaux entr'eux, de même que leurs opposez au sommet *b*C & CB, donc les diametres *bg* & BA sont égaux au diametre *b a* de la base circulaire, & les plans qui passent par ces lignes étant perpendiculaires à celui du parallelograme par l'axe, les sections seront égales; par conséquent celle par BA sera un cercle, & tout au contraire *y x* perpendiculaire aux côtez sera une Ellipse, dont *y x* sera le petit axe, de même que toute autre section oblique, qui ne sera ni parallele à la base, ni *sous-contraire* comme BA.

COROLLAIRE.

D'ou il ſuit que [de même que dans le cône] les ſections Ellíptiques peuvent varier infiniment, ſelon l'angle plus ou moins aigu, ou obtus, que le plan coupant fait avec l'axe du cylindre, enſorte qu'elles s'alongent ou ſe racourciſſent, depuis la poſition perpendiculaire à l'axe, juſqu'à ce qu'il lui devienne parallele.

61. Ou il faut remarquer, qu'il n'y a aucune difference de ces Ellipſes à celles du cône, ce qui ſurprend ceux qui n'ont pas fait une étude de cette matiere; il leur ſemble que l'Ellipſe cylindrique eſt uniforme à ſes deux extremitez, mais que la partie de celle du cône, qui eſt plus près du ſommet, doit être plus aiguë que celle qui eſt vers la baſe; on voit cette erreur exécutée dans une pratique des *Inſtitutions Geometriques d'Albert Duret*, où la courbe fait un jaret à chaque extremité de ſon axe; nous en montrerons la fauſſeté lorſque nous ferons voir, que la même Ellipſe peut être une ſection commune au cône & au cylindre. On en ſentira facilement la verité dès-à préſent, ſi on ſe rappelle ce que nous avons dit [*Art.* 37.] que les ordonnées à un axe, qui ſont également éloignées du centre de l'Ellipſe, ſont toujours égales entr'elles, non ſeulement dans le cône, mais encore dans le cylindre; puiſque leurs quarrez ſont entr'eux en raiſon des rectangles des abſciſes, qu'on ſuppoſe égales, proprieté eſſentielle à l'Ellipſe.

Inſtitutionum Geometricar. l. 4. fol. Arnhemiæ 1606.

Art. 37.

62. LA ſeule difference qu'il y a dans ces ſections c'eſt, que l'axe du cylindre paſſe par le centre de l'Ellipſe cylindrique, & que l'axe du cône droit ne paſſe pas par celle de la cônique, mais plus ou moins près, ſuivant qu'elle eſt plus ou moins oblique, comme on le voit à la Fig. 6. où l'axe du cône coupe celui de l'Ellipſe en *o*, la raiſon en eſt bien ſenſible dans le cône droit, où l'axe du cône XS diviſe l'angle du ſommet BSA en deux également, il ne peut diviſer de même une ligne terminée à ſes côtez, qui ne lui eſt pas perpendiculaire, comme DE, dans le triangle par l'axe; puiſque n'étant pas parallele à BA, ſes parties D*o* & *o*E, ne ſont pas proportionelles à BX & XA; mais cette difference ne fait rien à la figure de l'Ellipſe. Toutes les ſections que l'on peut faire dans le cylindre reviennent aux trois dont nous avons parlé, quoiqu'elles ne ſoient pas entieres; car la ſection
Fig. 14. NFE, qui ne coupe le cylindre [*Fig.* 14.] qu'en partie, eſt une portion d'Ellipſe, qui ſeroit entiere, ſi le cylindre avoit été coupé entierement, comme il le ſeroit étant prolongé.

63. CETTE ſection incomplete retranche un ſolide en *fg*, qu'on

appelle un *Onglet*, à cauſe de ſa reſſemblance avec l'ongle d'un doigt.

Application à l'uſage.

La connoiſſance des ſections du cylindre eſt la baſe de celles des differences des ceintres des faces de berceaux, & des courbes de leurs joints de tête; je ne parle point de ceux de lit, qui ſont des ſections preſque toujours rectilignes.

Les Berceaux, dont les *Arcs-droits* ſont circulaires, ſont de vraïes portions de *Cylindres Droits*, & ceux qui ſont ſurmontez ou ſurbaiſſez ſont des portions de cylindres ſcalenes, ce que l'on peut démontrer de la même maniere que nous avons fait pour les cônes de baſe Elliptique; car ſi le petit axe de l'Ellipſe, faite par la ſection perpendiculaire au parallelograme par l'axe du cylindre, ne peut atteindre à la circonference d'un cercle, qui aura pour diametre la perpendiculaire *il*, ſur les côtés *b* B, *a*E, il eſt viſible qu'en inclinant ce plan vers L ou K, le diametre LK peut être alongé, au point qu'il devienne égal à *il*, ainſi quoique la baſe *ba*, oblique à l'axe M*m*, ou *bo* perpendiculaire à cet axe, ſoit ſuppoſé Elliptique, ſi étroite que l'on voudra, la ſection *i*L*l*K pourra être un cercle, & le cylindre ſera ſcalene dans un ſens different de ce qu'il eſt ici. *Fig.* 15.

Il peut arriver, & il arrive en effet, comme nous le dirons au Livre 4. par quelque raiſon de conſtruction, qu'un Architecte juge à propos de faire le ceintre de l'arc droit d'un berceau en Courbe hyperbolique ou parabolique, alors il ne s'agit plus de conſiderer la voute comme une portion de cylindre proprement dit, mais d'un Cylindroïde, dont nous allons examiner les ſections.

THEOREME III.

La Section plane des Eſpeces de Cylindres, qui ont pour Baſe une Parabole ou une Hyperbole, eſt une Section Cônique de même eſpece. Planc. 2.

Si l'on ſuppoſe qu'une ligne A*a* (*Fig.* 20.) ſe meut parallelement à elle-même autour d'une ſection cônique ouverte, elle formera par ce mouvement une eſpece de cylindre, que nous appellerons un *Cylindroïde*; parce qu'il reſſemble au cylindre ordinaire, qui a pour baſe un arc de cercle ou d'Ellipſe. *Fig.* 20.

Soit le cylindre A*ad* DB*b*, qui a pour baſe une courbe ADB,

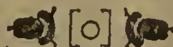
que je suppose ici une parabole, je dis que s'il est coupé par un plan parallele ou oblique à sa base ADB, la section sera encore une parabole.

Si le plan coupant est parallele à la base, la proposition est évidente.

S'il ne l'est pas, supposons qu'il soit incliné comme en Ld, & qu'il coupe celui de la base prolongée suivant la ligne MK, à laquelle soient menez deux plans paralleles Ab, Fe, qui coupent les précedens en ABHI & FE, fe perpendiculairement à celui de la base MO, & parallelement à MK.

A cause des paralleles SC, dD, perpendiculaires au plan de la base; on aura les triangles semblables LCc, LGg, LDd dans le plan de l'axe CD de la parabole; & Cs du cylindre, & à cause que MK (par la construction) est parallele à AB & FE, elle le sera aussi à HI & fe; donc HI est parallele à AB, & fe à FE, & AI & Fe sont des parallelogrames; puisque Aa, Bb, Ff, Ee, qui sont les côtez du cylindre, sont paralleles entr'elles; donc $AH = BI$, & $Ff = Ee$ de même que $HI = AB$, & $FE = fe$; par conséquent $LD : Ld :: LG : Lg :: LC : Lc$, & en divisant $CD : cd :: GD : gd$; mais par la supposition que la base ADB soit une parabole, on aura $\overline{CB}^2 : \overline{GE}^2 :: CD : GD :: cd : gd$, & puisque $CB = cI$ ou $AB = HI$, & $FE = fe$ & ou sa moitié $GE = ge$, on aura $\overline{cI}^2 : \overline{ge}^2 :: cd : gd$, c'est-à-dire, les quarrez des ordonnées en même raison que les abscises; donc HdI est une parabole, si ADB en est une, *ce qu'il falloit démontrer.*

On peut démontrer la même chose de l'hyperbole, si la base ADB est hyperbolique, ou de l'Ellipse, si elle étoit portion d'une Ellipse, avec cette difference, que dans cette derniere la section pourroit devenir un cercle, comme nous l'avons dit des cylindres scalenes; car faisant abstraction de ce cas, les ordonnées correspondantes CB, cI seront toujours égales entr'elles, de même que GE, ge, & les abscises DC, dc, DG, dg auront toujours le même rapport dans la base & dans la section oblique, ce qui est clair en les considerant comme des parties des côtez du triangle LdD, coupé par des paralleles cC, gG, dD; par conséquent les abscises restant de la longueur de leurs diametres seront encore en même raison; donc il y aura même rapport des rectangles de leurs parties aux quarrez des ordonnées.





Application à l'usage.

On voit par cette propoſition quelles doivent être les courbes des ceintres de face, ou les joints de Doële des Berceaux Biais ou Rampans, ou en Talud, dont les arcs-droits ne ſont pas circulaires, mais de quelqu'autre des ſections côniques, qui les rendent ſurhauſſez ou ſurbaiſſez en portion de parabole, d'hyperbole ou d'Ellipſe; car quoique nous ayons mis les Berceaux Elliptiques au rang des cylindres ordinaires, mais ſcalenes, ils peuvent être compris dans cette propoſition, qui montre plus generalement, pourquoi la ſection oblique & la baſe ſont de même eſpece.

Et pour donner un exemple particulier de pratique, cette propoſition fait voir, que les arêtes des joints de Lit de cette eſpece de voute, en ſaillie hors du mur, qu'on appelle *Trompe en Tour ronde, érigée ſur une ligne droite*, dont l'arc droit eſt hyperbolique, comme il le doit être à celles qui portent les cabinets de l'Hôtel de la Feüillade, ſur la ruë des Bons Enfans, auprès de la Place de Victoire, à Paris, ſont toutes des arcs d'hyperboles differentes, plus ou moins, alongées, ſelon qu'elles s'approchent ou s'éloignent du milieu.

En ſecond lieu, elle fait voir que la projection d'une ſection cônique quelconque, inclinée au plan de la baſe horiſontaleou verticale eſt encore une Courbe de même eſpece; parce qu'on peut imaginer que les lignes perpendiculaires à ce plan paſſant par tous les points du contour de la courbe, forment un cylindre ou cylindroïde, dont la baſe eſt la Courbe de projection, & la courbe projettée peut être conſiderée comme la ſection oblique de ce cylindre.

THEOREME IV.

La Section d'un Cylindre creux, dont l'épaiſſeur eſt par-tout égale, coupé par un plan qui n'eſt pas parallele à ſa baſe, eſt une Couronne d'Ellipſe, compriſe par deux Ellipſes ſemblables & concentriques, mais non pas équidiſtantes, excepté la ſection ſouſcontraire dans les cylindres ſcalenes, où elle eſt une Couronne de Cercle. Planc. 2.

Soit [*Fig.* 14.] une portion de cylindre *a a b* B, creuſe d'une cavité F *f* G *g*, qui eſt une eſpace cylindrique concentrique, & ſemblable à ce cylindre ſur l'axe commun C *x*, auquel la ſection plane AHB eſt oblique, je dis que les Ellipſes AHB & FIG, formées par cette ſection à la ſurface interieure & exterieure de ce cylindre creux, ne ſont pas équidiſtantes, quoiqu'il ſoit par-tout également épais. *Fig.* 14.

DEMONSTRATION.

Si l'on coupe un plan paſſant par l'axe du cylindre a abB, il ſe formera à l'interſection des ſurfaces des triangles ſemblables ABa, FBf, dont les lignes aA & fF ſont paralleles par la ſuppoſition, que les ſurfaces exterieure & interieure ſont équidiſtantes ; donc Ba : BA :: Bf : BF, & en diviſant :: af : aF ; mais Ba côté d'un angle droit, BaA eſt plus petit que BA, qui eſt l'hypotenuſe ; donc fa, diſtance des deux ſurfaces à la baſe droite eſt plus petite que FA, diſtance des mêmes à la ſection oblique, *ce qu'il falloit* premierement *démontrer*.

Presentement nous pouvons démontrer, que l'intervale de ces mêmes ſurfaces, coupées par un plan perpendiculaire au premier, ou ſi l'on veut, au triangle aBA, & par l'axe cC, ſera égal, dans la ſection oblique AB, à celui de la baſe droite aB, par la ſeule raiſon que l'interſection MP du plan eſt perpendiculaire à l'axe Cc, comme le Rayon de la baſe ca eſt perpendiculaire au même axe, & comme le rayon cp de la même baſe, lequel eſt parallele à CP.

Pour le concevoir plus diſtinctement, ſoit mMPp le ſecond plan perpendiculaire au parallelograme par l'axe a abB, ce qu'il faut imaginer dans la figure, où il ne l'eſt qu'en perſpective ; parce qu'en projection ce plan ne doit être repréſenté que par une ligne droite ; or puiſqu'il paſſe par l'axe, il ſera deux parallelogrames, un à la ſurface interieure lLOo, l'autre à l'exterieure mMPp, dont les côtez ſeront paralleles entr'eux, & équidiſtans d'un côté & d'autre par la ſuppoſition ; donc PO eſt égal à po, mais po eſt auſſi égal à fa ; donc PO eſt égal à fa, c'eſt-à-dire, que l'intervale des deux Ellipſes AHB & FOG au petit axe, eſt le même que celui de la vraïe épaiſſeur du cylindre ; mais hors de cet axe il s'alonge continuellement juſqu'au grand axe AB, où cet intervale FA eſt le plus grand ; donc les intervales des deux Ellipſes ſont inégaux, quoique les ſurfaces ſoient équidiſtantes entr'elles, *ce qu'il falloit démontrer*.

COROLLAIRE.

De-la il ſuit que la portion du grand axe, qui eſt entre les deux Ellipſes, peut autant varier, à l'égard de celle du petit axe, qui marque la vraïe épaiſſeur du cylindre, qu'une ligne tirée obliquement entre deux paralleles à l'égard de la perpendiculaire ; ainſi ſuppoſant que l'angle d'inclinaiſon ABa, de la ſection oblique à l'axe cC, ſoit de 60 degrez, la diſtance FA ſera double de l'épaiſſeur fa, comme GB de Bg.

Ce

Ce que nous venons de démontrer dans le cylindre Droit eſt encore vrai dans le ſcalene, comme il eſt aiſé de l'appercevoir en ſuppoſant, que la courbe BMAP eſt un cercle, qui ſoit la baſe du cylindre ſcalene, alors la courbe B*m*a*p* ſera une Ellipſe; la ſeule difference qui en réſulte, eſt un changement de poſition dans les axes de la ſection inclinée à la baſe; car la ligne *m p* devient alors le grand axe, parce qu'elle eſt égale au diametre du cercle MP, égal par la ſuppoſition à B A, lequel eſt plus grand que Ba, comme l'hypotenuſe d'un triangle rectangle AaB à l'égard de ſon côté B a.

Application à l'uſage.

Par le moyen de cette propoſition nous ferons voir au quatriéme Livre, qu'on ne peut faire deux ceintres Elliptiques de doële & d'extrados, qui ſoient équidiſtans à la Face d'une voute biaiſe, qu'on veut faire d'égale épaiſſeur, ſans la rendre inégale à l'Arc-droit. Elle fait auſſi voir les inégalitez qui réſultent à l'épaiſſeur des voutes biaiſes, lorſque leurs ceintres de face ſont faits d'Ovales, compoſées de portions de cercles concentriques; enfin elle ſervira à montrer la fauſſeté de l'ancien trait des voutes ſphéroïdes ſur un plan Elliptique.

CHAPITRE IV.

Des Sections Planes de quelques Corps régulierement irréguliers.

On peut imaginer une infinité de corps formez par des révolutions de lignes courbes, autour de leurs axes, ou de leurs tangentes, ou par le mouvement de quelques ſurfaces muës de differentes manieres; mais nous nous bornons à ceux dont on voit des exemples dans les parties des voutes uſuelles, qui ſe réduiſent à trois ou quatre eſpeces.

66. *La premiere*, eſt de ceux qui ſont formez par la révolution des Ellipſes, qu'on appelle ſphéroïdes; ſi la révolution ſe fait ſur le petit axe, le corps qui en réſulte ſera appellé *Sphéroïde Applati*, tels ſont à peu près les Oignons, les Pomes & quelques Citroüilles. Si la révolution ſe fait ſur le grand axe AX, nous l'appellons *Sphéroïde oblong*, tels ſont les Melons, & pluſieurs autres fruits, & particulierement les œufs. *Fig.* 21.

Fig. 22. 23. 67. *La seconde espece*, est de ceux qui sont formez par la révolution d'une section cônique ouverte, Parabole, ou Hyperbole; tournant sur son axe, on l'appelle *Conoïde*, tels sont les corps ASB, aux figures 22. & 23.

La troisiéme espece, moins réguliere, est celle des corps appellez *Ellipsoïdes*, qui ne sont formez par la révolution d'aucune Ellipse, constante sur un de ses axes, mais par la révolution d'une Ellipse sur un axe constant, dont l'autre varie de longueur; suivant le contour d'une autre Ellipse, qui est perpendiculaire à la premiere, ou si l'on veut en prendre une autre idée, c'est une suite d'Ellipses perpendiculaires à un axe, laquelle diminuë suivant le contour de deux autres Ellipses, qui se croisent sur cet axe commun, c'est ce que j'appelle *Ellipsoïde*, & qui est appellé en Architecture, *Voute Sphérique surhaussée ou surbaissée sur un plan ovale.*

Fig. 24. *La quatriéme espece*, est celle des corps formez par la révolution d'une section cônique fermée, cercle ou Ellipse, autour de sa tangente, ou autour d'un autre cercle ou d'une Ellipse, au plan duquel celui de l'Ellipse ou du cercle generateur est toujours perpendiculaire. Dans le premier cas le corps s'appelle *Anneau fermé*, & dans le second simplement *Anneau*, telles sont les *Voutes sur le Noyau.*

Fig. 25. *La cinquiéme espece*, est celle des corps formez par le mouvement d'un cercle ou d'une Ellipse tournant autour d'une Hélice ou ligne en vis, ensorte que son plan soit dirigé à l'axe de l'Hélice, ou perpendiculaire à sa Tangente. J'appelle ce corps *Hélicoïde*, tels sont les vis & colomnes torses, & en fait de voute, les *Berceaux tournans & rampans, & vis St. Giles.*

THEOREME V.

La Section d'un Sphéroïde & d'un Conoïde régulier, coupé par un Plan perpendiculaire à son Axe, est un cercle, & s'il lui est parallele ou oblique elle est une Ellipse.

Fig. 21. 22. & 23. La premiere partie de ce Theorême est évidente, car puisque le sphéroïde ou conoïde est supposé formé par la révolution d'une demie Ellipse ABX, ou d'une section cónique ouverte ASB (*Fig.* 22. & 23.) immobile sur un de ses Axes, chaque ordonnée à cet axe, comme CB, Kg, (*Fig.* 21.) ou CB, gT (*Fig.* 22. & 23.) décrira par sa révolution un cercle dont elle est le rayon, & comme on peut appliquer une ordonnée à chaque point de l'axe, il suit que toutes les sections

faites par des plans qui lui ſont perpendiculaires, ſont des cercles dans les ſphéroïdes, alongez ou applatis, & dans les conoïdes.

Quant à la ſeconde partie de ce Theorême, touchant les ſections paralleles & obliques à l'axe, elle eſt démontrée dans la 15. propoſiton des Conoïdes & Sphéroïdes d'Archimede.

Premierement. Il n'eſt pas difficile à comprendre, que les ſections paralleles à l'axe ſont des courbes ſemblables à la Generatrice. Il n'eſt pas tout à fait ſi clair que les obliques ſont des Ellipſes; nous allons comprendre l'un & l'autre cas dans une démonſtration differente de celle d'Archimede.

Soit l'Ellipſe ADXB la ſection du ſphéroïde par ſon axe AX, laquelle eſt la même que l'Ellipſe generatrice : ſi l'on ſuppoſe deux plans paralleles entr'eux BD, gh, & perpendiculaires à l'axe AX, & au plan paſſant par cet axe, leurs ſections dans le ſphéroïde ſeront des cercles repréſentez en perſpective par les courbes BLD, gmh, de même que celle du plan paſſant par l'axe perpendiculaire au plan BADX, ſera une Ellipſe repréſentée par la courbe ALX, laquelle aura deux ordonnées CL, Km communes aux cercles BLD, gmh. Enfin ſi l'on coupe le ſphéroïde par un plan incliné à l'axe AX, comme en EF, & perpendiculaire au plan BADX, la courbe de la ſection repréſentée par EmnF aura auſſi deux ordonnées communes aux ſections circulaires, ſçavoir In, Km, il faut démontrer que les quarrez de ces ordonnées ſont entr'eux, comme les rectangles $EI \times IF$ & $EK \times KF$.

Par une proprieté dont nous avons parlé (Article 40) les lignes paralleles menées dans une ſection cônique, & coupées par une troiſiéme perpendiculairement ou obliquement, ſont des parties d'abſciſſes, dont les rectangles ſont proportionels, $BI \times ID : EI \times IF :: gK \times Kh : EK \times KF$; mais à cauſe des cercles des ſections perpendiculaires à l'axe, $BI \times ID = \overline{In}^2$ & $gK \times Kh = \overline{Km}^2$; donc $EI \times IF : EK \times KF :: \overline{In}^2 : \overline{Km}^2$; c'eſt-à-dire, que les quarrez des ordonnées ſont entr'eux comme les rectangles des abſciſſes; donc la courbe EmnF eſt une Ellipſe, *ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

D'ou il ſuit, que ſi le plan coupant eſt parallele à l'axe, la ſection ſera une Ellipſe ſemblable à la generatrice.

Et que ſi deux plans inclinez à l'axe ſont paralleles entr'eux, leurs ſections ſeront des Ellipſes ſemblables, ce qui s'étend auſſi aux cô-

noïdes Paraboliques ou Hyperboliques, ce que nous allons démontrer par une autre maniere, qui eſt celle d'ARCHIMEDE.

Fig. 22. 23.

SOIT (*Fig.* 22.) la courbe ASB la ſection d'un conoïde parabolique, coupé par un plan paſſant par ſon axe SC & DF, la ſection d'un plan perpendiculaire au précedent, ſoit menée PT, parallele à DF, & tangente à la parabole au point T, duquel ſoit mené T*g*, ordonnée à l'axe SC, & parallele à AB, & par S la ligne S*i*; ſoit enfin E*x* perpendiculaire à DF, qui ſera auſſi dans le plan du cercle A*x*B baſe Droite du conoïde, & par conſéquent une ordonnée commune à cette baſe & à la courbe D*x*F. Par la proprieté du cercle $\overline{Ex}^2 = AE \times EB$; or * $DE \times EF : AE \times EB :: \overline{TI} : \overline{Is}^2$, & $TI = IP$, parce que par la proprieté de la parabole $gS = SP$*; donc $DE \times EF : \overline{Ex}^2 :: IP : IS$; donc $\overline{Ex}^2 : DE \times EF :: \overline{SI}^2 : \overline{IP}^2$, & parce que les triangles FD*h*, PIS ſont ſemblables, on démontrera de même que les quarrez des autres ordonnées au diametre DF, auront toujours un même rapport aux rectangles des abſciſſes, que le quarré D*h* au quarré DF, dont la ſection ſera toujours une Ellipſe.

* *Voyez la Hire, Prop. 29. l. 3.*

* Art. 45.

Il eſt viſible que DF eſt le grand diametre, & que le petit ſera égal à D*h*.

Fig. 23.

SECONDEMENT. Pour la ſection oblique du conoïde Hyperbolique, tout étant diſpoſé comme à la figure précedente, (*Fig.* 23.) $AE \times EB : DE \times EF :: \overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$, or $\overline{Ex}^2 : DE \times EF :: \overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$, qui eſt une proprieté de l'Ellipſe. On démontrera de même que les quarrez des autres ordonnées à ce diametre auront un pareil rapport à leurs abſciſſes, comme $\overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$; or SI eſt plus petit que IT, puiſque PI eſt plus petit que IT par la proprieté de l'hyperbole, donc la ſection faite par DF eſt une Ellipſe, dont le grand diametre eſt DF.

Art. 45.

COROLLAIRE.

DE-LA il ſuit, que la ſection plane d'un ſphéroïde creux, d'égale épaiſſeur, eſt une Couronne compriſe dans la circonference de deux Ellipſes ſemblables & concentriques; mais non pas équidiſtantes, comme nous l'avons dit des ſections du cylindre & de quelques-unes du cône; ce qui nous ſervira au quatriéme Livre à montrer l'erreur du trait des voutes ſphériques, ſuivant les Auteurs de la Coupe des pierres.

La seconde espece de corps régulierement irréguliers que nous avons à connoître pour la pratique des voutes, sont les *Annulaires*, qui sont des cylindres pliez sur leurs axes, ordinairement en portion circulaire, ensorte que les axes & les côtez sont des arcs de cercles concentriques.

THEOREME VI.

La Section d'un Corps Cylindrique Annulaire, dont l'Axe est courbe, en forme de circonference de Cercle, & qui est coupé par un Plan, perpendiculaire à celui qui passe par l'Axe courbe, est une Ovale du quatriéme Ordre.

Soit le corps cylindique HDb, fait par la révolution du petit cercle GHI, élevé perpendiculairement sur le plan du grand cercle IDi, dont le centre est C, autour duquel s'est fait la révolution du petit cercle GHI, ensorte que le diametre GI ait toujours été dirigé au centre C; si l'on suppose ce corps coupé par le plan ALBO perpendiculairement au plan IDi, dont la commune section soit AB, il se formera à la surface du cylindre annulaire une courbe ALBOA, qui sera une ovale du quatriéme ordre. *Fig.* 23.

Par un point quelconque N de la commune section AB, considerée comme l'axe de la courbe, soit tiré du centre C le rayon CMK, qui coupe en M le cercle gFG, concentrique à iDI, & sur sa partie MK = GI ou gi, soit élevé un plan perpendiculaire au plan IDi, qui coupera celui qui passe par AB, & dont la commune section sera NL perpendiculaire à l'axe AB de la courbe cherchée ALB.

Soit donc le rayon Ci, ou son égal CD que l'on suppose mené perpendiculairement à AB $= a$, le diametre du petit cercle GI ou gi ou MK $= b$, AE $= c$ ou AB $= 2c$, l'abscisse AN $= x$, l'ordonnée NL ou NO $= y$, on aura par la nature du cercle CE $= \sqrt{aa - cc}$ & EN $= c - x$; donc CN $= \sqrt{aa - 2cx + xx}$, & KN $= a - \sqrt{aa - 2cx + xx}$, MN = KM − KN $= b - a + \sqrt{aa + 2cx + xx}$; mais par la nature du cercle le rectangle KN × MN = NL^2; ainsi multipliant KN × MN, & égalant le produit à yy, on trouvera $ab - 2aa + 2cx - xx + \overline{2a - b}\sqrt{aa - 2cx + xx} = yy$. Pour abreger la réduction, soit nommé $2a - b = e =$ Ig ou iG, ce qui étant substitué, on aura cette équation $-ae + 2cx - xx + e\sqrt{aa - 2cx + xx} = yy$, ou bien en transposant pour mettre tous les rationels d'un côté $xx - 2cx + ae + yy = e\sqrt{aa - 2cx + xx}$; pour en ôter l'Asymmetrie, il faut

quarrer les deux membres de l'équation, ce qui donnera $x^4 - 4cx^3 + 2aexx + 2yyxx + 4ccxx - 4acex - 4cyyx + 2aeyy + y^4 = -2ceex + eexx$, réduisant cette équation à o. selon l'ordre des dimensions de x suivant la coutume on aura :

$$\begin{array}{llll} x^4 - 4cx & + 2aexx & - 4acex & + y^4. \\ & - ee & + 2cee & + 2aeyy \\ & + 4cc & - 4cyy & \\ & + 2yy & & \end{array} = 0$$

Laquelle équation exprime la nature de la courbe ALB de la maniere la plus simple, dans son état de generalité ; ainsi c'est une courbe du quatriéme ordre ; parce que les co-ordonnées x & y montent à la quatriéme dimension ; mais il y a des cas particuliers où elle devient plus simple, par exemple :

Si la section AB passe par le centre, il est visible que la courbe ALB se partage en deux cercles ihg & IHG, dont l'équation est $xx \begin{smallmatrix} + e \\ -2a \end{smallmatrix} x + yy = 0$. Aussi dans ce cas notre équation trouvée se laisse diviser par ce diviseur $xx \begin{smallmatrix} -2a \\ 1-e \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} +2ae, \\ +yy \end{smallmatrix}$ & le quotient donnera ladite équation $xx \begin{smallmatrix} + e \\ -2a \end{smallmatrix} x + yy = 0$, pour le cercle ihg ou IHG, comme il doit arriver, si l'on prend IG égal à tout le grand diametre Ii, c'est-à-dire, si Ig ou e est égal o, auquel cas le corps Annulaire HDh devient une sphère, ensorte que la courbe de la section ALB en sera un cercle mineur. Notre équation la doit marquer en effet, si vous y omettez les termes où se trouve la lettre e; puisque $e = 0$, l'équation generale se change en celle-ci.

$$x^4 - 4cx^3 \begin{smallmatrix} + 4cc \\ + 2yy \end{smallmatrix} xx - 4cyyx + y^4 = 0$$

Dont on peut tirer la racine quarrée $xx - 2cx + yy = 0$; or il est clair que cette équation particuliere est pour le cercle, dont le diametre est $2c = AB$, qui marque évidemment, que la section ALB dégenere en cercle.

Ce sont là tous les cas possibles où la courbe en question puisse devenir d'un ordre inferieur que du quatriéme.

La troisiéme espece, de corps régulierement irréguliers, dont nous

avons besoin de connoître les sections, & celle des *Cylindriques Hélicoïdes* (en termes d'Architecture) des voutes en *vis*.

Nous appellons *Cylindre Hélicoïde* un corps cylindrique, qui, au lieu de tourner dans un plan autour d'un centre, tourne en s'élevant autour d'un axe, comme le Lierre ou plutôt le Liseron, s'éleve en embrassant un arbre, d'où vient le mot *d'Hélice*, usité en Architecture, tiré du Grec *Heliso*, *circumvolvo*. Tel est le corps E G M *g* D, (*Fig.* 25.) *Fig.* 25.

Corollaire I.

De cette définition on peut conclure, que la section de ce corps, coupé par un plan parallele à son axe, ne sera pas d'une espece differente de celle du corps Annulaire dont nous venons de parler, si la base ou projection de l'Hélice est un cercle; car toutes les distances de l'axe à ce corps, mesurées horisontalement seront égales à celle de la section de l'anneau à son centre, & toutes les sections verticales par l'axe seront des cercles égaux, comme celles de l'anneau, coupé par un plan passant par le centre C, (*Fig.* 24.) & perpendiculairement au plan *i* D I, supposant l'un & l'autre corps cylindrique d'égale grosseur; il n'y aura donc de difference, que celle du changement de hauteur de toutes ces sections circulaires, qui s'élevent comme par degré les unes audessus des autres, au long d'un axe incliné au plan de la base.

Corollaire II.

D'ou il suit que pour connoître & tracer la section de l'Hélice, il faut commencer par tracer celle de l'anneau supposé sur sa base, & coupé à même distance du centre, que l'Hélice l'est de son axe, & donner à l'axe de l'Hélice l'inclinaison qu'il doit avoir, laquelle se trouve par la hauteur de la ligne *ab* (*Fig.* 25.) Nous ne nous arrêtons pas ici à la description de l'une & de l'autre courbe, que nous donnerons au second Livre; il suffit d'exposer aux yeux leur rapport par la figure 26.

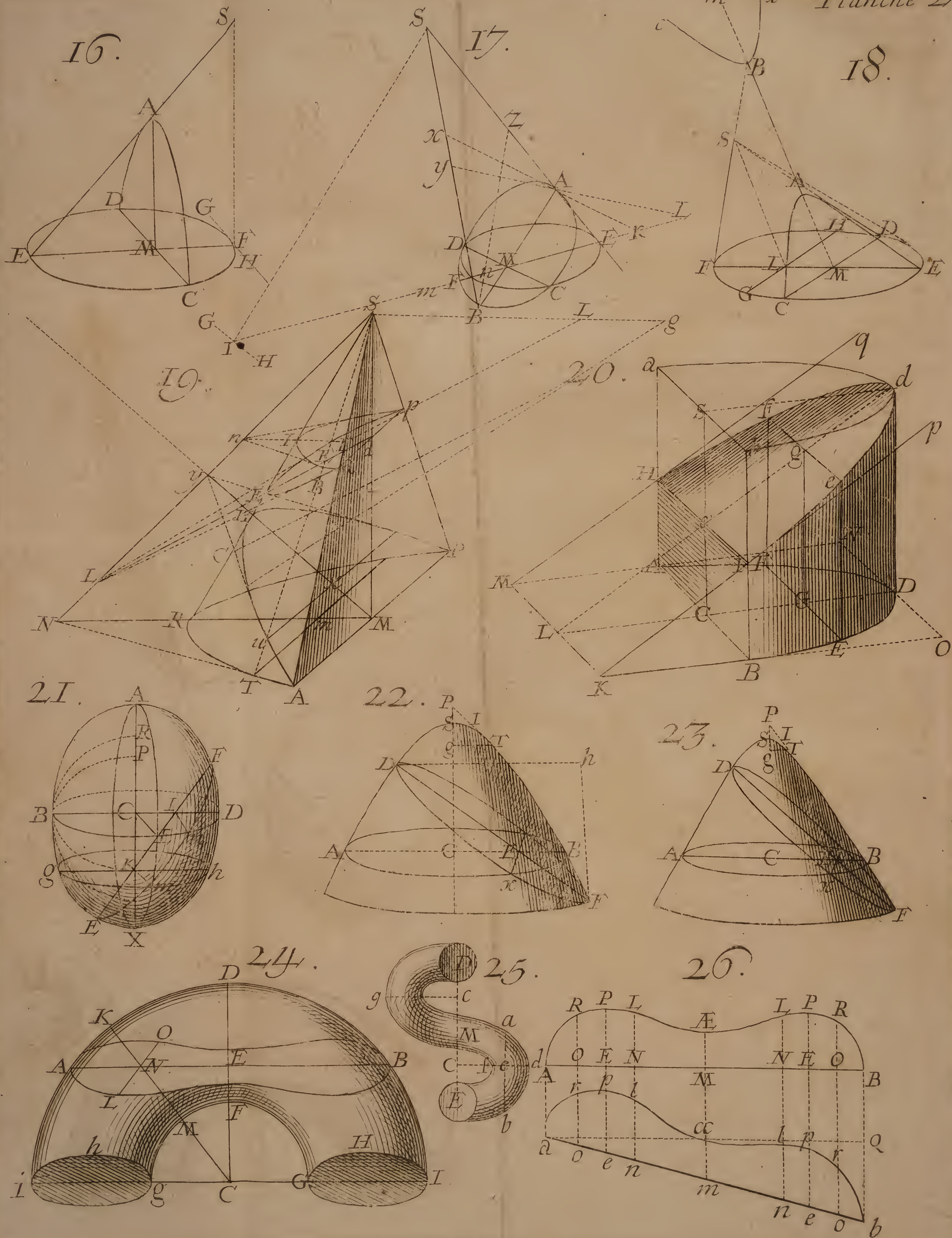
Application à l'usage.

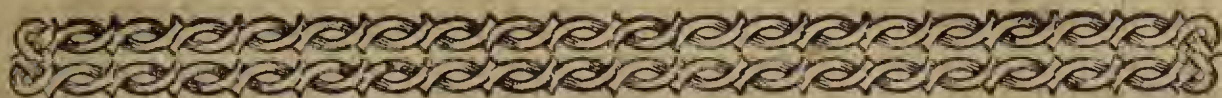
74. Cette proposition fait connoître quelle est la courbure du ceintre d'une interruption de voute sur le noyau par un mur ou une saillie droite, comme pourroit être la Tour quarrée d'un clocher, au chevet d'une Ellipse, ainsi voutée à son bas côté; mais il sert principalement à trouver la Cherche droite, qui doit guider la cour-

bure de la doële d'une voute ſur le noyau, ou d'une vis St. Giles perpendiculairement au rayon, venant du centre de la courbure de l'axe & des côtez, comme on en a beſoin pour l'appareil, ce que nous ferons voir dans le quatriéme Livre, où il s'agit de l'appareil; nous croyons n'avoir pas beſoin de nous étendre davantage ſur les changemens qui peuvent arriver à ces Courbes, par ceux qu'on peut faire aux ceintres des cercles generateurs IHG, ſoit en les ſurhauſſant ſoit en les ſurbaiſſant, ou à la courbure de l'axe, laquelle au lieu d'être circulaire pourroit être Elliptique ; parce que nous pourvoirons dans la pratique à l'exécution de toutes ces variations; nous ne pouſſerons pas plus loin la Theorie des ſections planes, croyant en avoir dit aſſez pour les beſoins de la Coupe des Pierres; c'eſt pourquoi nous paſſerons à la ſeconde Partie de ce premier Livre, où nous tâcherons de connoître les Sections, que nous appellons *Solides*; parce qu'elles ſont faites par la pénetration des Corps.



SECONDE


Planche 2.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.



SECONDE PARTIE
DU PREMIER LIVRE.

Des Sections faites à la surface des Corps par la pénetration d'autres Corps.



Es Sections Planes dont nous venons de parler ne conviennent qu'aux ceintres des voutes simples, qui n'ont qu'une surface principale uniforme, & terminée par des plans; mais dans les voutes composées, qui sont contiguës & liées avec d'autres, il se fait à leurs rencontres des angles & des courbes, qui les divisent par des sections tantôt planes tantôt *Solides*, je veux dire, qui ne peuvent être formées que par la pénetration des solides, lesquelles ne sont pas dans une surface plane; ces dernieres sont presque les plus ordinaires, & parce que nous ne pouvons les connoître sans les rapporter à des corps réguliers, dont les voutes sont des imitations parfaites, nous allons examiner les sections solides des Sphères, Cônes & Cylindres, qui se pénetrent mutuellement.

Premierement. Les sections faites à la surface d'une Sphère, pénetrée par une autre Sphère, par un Cylindre, ou par un Cône.

Secondement. Celles des Cylindres par d'autres Cylindres, & par des Cônes.

Troisièmement. Des Cônes par d'autres Cônes, situez differemment entr'eux.

Nous avons touché légerement les sections planes de ces corps, parce qu'on ne manque pas de livres qui en traitent amplement; nous nous sommes contentez d'en dire ce qui étoit indispensablement nécessaire à notre sujet; mais parce qu'il n'en est pas de même de leurs sections *Solides*, c'est-à-dire, qui sont faites par la pénetration mutuelle des mêmes corps, nous en étendrons un peu davantage la Theorie.

En effet, si peu d'Auteurs en ont traité, qu'elles n'ont pas même de noms particuliers; le P. Coursier dans un Opuscule Latin, qu'il

ſemble avoir fait pour l'Optique, eſt le premier que je ſçache, qui en ait parlé : il les appelle *Curvitegæ*, c'eſt-à-dire, qui couvrent des ſurfaces courbes; mais comme cette expreſſion n'eſt pas uniquement propre à nos ſections, puiſqu'une ſurface plane en peut couvrir une courbe, comme un cercle couvre un ſegment de ſphère, un parallelograme, celui d'un cylindre; j'ai cru que j'étois en droit de leur donner d'autres noms, pour éviter les Périphraſes & les équivoques; je les tire du mot Latin *Imbrex*, qui ſignifie une tuile creuſe, à laquelle on peut aſſez bien les comparer, ou du moins la ſurface qu'elles renferment; il auroit été plus naturel de les comparer au cylindre, ſi je n'avois craint la confuſion des idées, ayant auſſi égard à la facilité de la compoſition des mots tirez *d'imbrex*. M. CLAIRAUT le Fils, de l'Academie des Sciences, nous a donné un excellent traité des *Courbes à double courbure* en general, qui comprend celles dont il eſt ici queſtion, parmi pluſieurs autres de differentes eſpeces, dont il découvre les proprietez par l'Analyſe avec beaucoup d'art & de netteté; cet Ouvrage eſt d'autant plus digne d'admiration, qu'il a été la production d'un Jeune Homme de ſeize ans. Mais comme notre Stereotomie n'eſt qu'un traité de Geometrie lineaire, j'ai cru que je devois donner une Theorie de même nature que les Problémes de pratique, auſquels elle doit ſervir d'introduction; c'eſt pourquoi j'ai ſuivi une méthode tout-à-fait differente, croyant qu'elle deviendra plus utile aux gens qui ſe mêlent d'Architecture; c'eſt ce que je vais expliquer.

De la nature des Sections Solides par la pénetration mutuelle des Sphères, Cônes & Cylindres.

DEFINITION I.

PLANC. 3. *Fig.* 27. 75. SI par les extremitez S T, du diametre d'un cercle S A T B (*Fig.* 27.) on fait paſſer une ligne courbe plane S *c* T, dont l'axe ſoit C *c*, ſuivant laquelle les ordonnées à ce diametre ST s'abaiſſent ou s'élevent parallelement à celles mêmes d'un mouvement uniforme, enſorte que leur milieu ſoit toujours dans le plan ST*c*, la courbe S *a* T *b*, qui terminera la ſurface creuſe, qu'elles auront formé par cette arrangement, s'appellera un *Cicloïmbre*, par abreviation de l'expreſſion Latine, *Circulus imbricatus*, cercle en façon de tuile creuſe.

POUR ſe former une idée nette de ce changement de poſition des ordonnées, il n'y a qu'à ſe repréſenter un cercle tracé ſur la tran-

che d'un livre dans la presse, lorsque le Relieur l'a coupée d'une section plane; si ensuite il la renfonce vers le milieu, comme il arrive lorsqu'il donne de l'arrondissement au dos, ce cercle qui étoit plan devient un Cicloïmbre; parce que chaque feüille se reculant de suite, plus ou moins, selon qu'elle est près du milieu ou des extremitez de la tranche, forme l'espace d'une surface creuse en façon de cylindrique, dont le contour n'est plus un cercle comme auparavant, mais une *Courbe à double courbure*, sçavoir une autour du centre, & une en profondeur ou éloignement du plan passant par les extremitez du diametre S T.

Corollaire I.

De cette generation il suit, 1.° que quoique la surface creuse ou convexe du cicloïmbre soit plus grande que celle du cercle plan generateur, elle ne contient pas plus d'ordonnées, puisque le nombre des feüilles, dans l'exemple de la tranche du livre, n'a pas augmenté en se reculant ou en s'avançant au-delà de ce plan, depuis les extremitez S T, ce que l'on voit clairement dans la figure, par les paralleles qu'on a mené d'un côté aux lignes A *a*, C *c*, & de l'autre par les paralleles au diametre A B, qu'on suppose perpendiculaire au plan ST*c*. On voit seulement que supposant une ligne *c t* parallele & égale à C T, divisée en parties égales, les lignes paralleles à la ligne C *c*, passant par ces divisions, coupent la partie *c*T en parties inégales, quand même on les supposeroit infiniment petites.

Ce que nous disons de l'axe courbe *c* T, auquel toutes les ordonnées sont appliquées, est encore vrai à l'égard du Contour à double courbure *a d* T, quoiqu'il soit plus grand que l'axe & le contour du cercle generateur ATBS, qui est ici représenté en perspective, où l'on apperçoit une petite notion des merveilles de la Geometrie de l'infini.

Corollaire II.

Il suit en second lieu que les diametres, c'est-à-dire, les lignes droites, menées d'un des points du contour de la courbe à double courbure à son opposé, passant par l'axe C *c*, hors de la surface cylindrique, comprise par cette courbe, sont égaux entr'eux, comme les diametres du cercle generateur. Ainsi *g d* est égal à GD, *a b* à AB, &c. parce que les points G & D, A & B étant mûs parallelement à l'axe C*c* à distances égales, il est clair que G D *d g* est un parallelograme; par conséquent *g d* sera égal à G D.

Ou il faut remarquer que ſi la courbe S *c* T n'étoit pas uniforme, mais à differentes inflexions, ces diametres pourroient être inégaux, & alors la courbe ne ſeroit plus un cicloïmbre ; parce que c'eſt de l'égalité de ſes diametres que vient l'Analogie du nom.

COROLLAIRE III.

ON peut remarquer que de tous les diametres du cicloïmbre, il n'y en a qu'un, ſçavoir *a b*, qui ſoit dans la ſurface cylindrique, compriſe par ſon contour, lequel eſt celui qui paſſe par le ſommet *c*, de la courbe S *c* T, perpendiculairement au plan de cette courbe ; tous les autres ſont hors de cette ſurface.

COROLLAIRE IV.

DE ce que nous venons de dire, il ſuit que l'axe C *c* de la courbe, que j'appelle axe de *profondeur* S *c* T, coupe en deux également tous les diametres de la courbe du contour du cicloïmbre, plus ou moins loin de la ſurface cylindrique, ſelon qu'ils ſont plus ou moins obliques au plan de la courbe S *c* T.

COROLLAIRE V.

IL eſt viſible que ſi au lieu d'une ſeule courbe S*c*T, on en ſuppoſoit encore une ſeconde plus haut ou plus bas, audeſſus ou audeſſous du diametre ST, du même cercle generateur, il ſe formeroit deux cicloïmbres differens, qui auroient une profondeur inégale, mais dont le contour ſeroit à la ſurface du même cylindre, qui auroit pour baſe le cercle generateur ATBS ; puiſque tous les points de ces contours doivent être iſſus d'un de ceux du cercle generateur, mû parallelement à l'axe C *c* de la courbe de profondeur S *c* T.

DEFINITION II.

Fig. 28. 76. SI au lieu d'un cercle generateur ou ſuppoſe une Ellipſe BDLE, dont les ordonnées ED, GH s'écartent ou ſe rapprochent, de la même maniere que nous l'avons dit du cicloïmbre, non pas toujours perpendiculairement à un axe B L de cette Ellipſe, mais auſſi obliquement ſuivant un angle quelconque, comme BC*c* ou LC*c*, à peu près comme une chaîne lâche penduë aux extremitez d'un bâton incliné à l'horiſon, la ſurface formée par l'arrangement de ces ordonnées, ſuivant une courbe ſemblable, ſera terminée par un contour courbe, que nous appellons une *Ellipſimbre*, par abréviation de l'expreſſion Latine *Ellipſis imbricata*.

La néceſſité de donner des noms à des courbes, qui n'en avoient point, s'étend auſſi aux lignes qui leur ſont eſſentielles; nous en conſiderons quatre principales, qui méritent d'avoir un nom propre; parce que nous les nommerons ſouvent dans ce premier Livre.

Definition III.

77. Le diametre du cercle generateur, ou l'axe de l'Ellipſe plane generatrice, qui paſſe par les points S & T, ou B, L, où la courbe touche le plan du cercle ou de l'Ellipſe, s'appellera *Axe ſouſtendant*; la ligne courbe S *c* T, ou B *c* L, qui eſt dans le même plan que cet axe, qui coupe la ſection en deux parties égales, comme S *c* T, ou B *c* L, s'appellera *Axe courbe*; la ligne correſpondante au diametre perpendiculaire à l'axe ſouſtendant, qui eſt le petit ou le grand axe de l'Ellipſe, s'appellera *l'Axe droit*; parce que quoique droit, il ſera tout à la ſurface de la ſection concave; tel eſt *a b* (*Fig.* 27.) & *d e* (*Fig* 28.) La ligne C *c* qui eſt le plus au chemin que parcourt le centre C, dans l'abbaiſſement du diametre AB, ou DE en *ab*, ou *d e*, s'appellera *l'Axe de profondeur*, qui paſſera toujours par les deux centres de la ſection plane, & de la ſection courbe à double courbure par ſon contour. Fig. 27. 28.

Les lignes qui paſſeront par cet axe, & ſe termineront à la circonference de la ſection, s'appelleront *Diametres*.

Corollaire.

78. Puisque l'axe de profondeur C *c* peut n'être pas perpendiculaire à l'axe ſouſtendant BL, il ſuit que le diametre droit *dc* de la ſection, peut n'être pas au milieu de l'axe courbe B *c* L, puiſque le point *c*, centre de la ſection, correſpondant au centre C de l'Ellipſe generatrice, eſt évidemment plus près du point L que du point B; cependant le nombre des ordonnées de *c* en L, ſera toujours égal au nombre de celles qui ſont poſſibles de B en *c*; puiſqu'il ne peut y avoir un plus grand nombre de paralleles à C *c*, de B en C, que de C en L, ces deux diſtances étant ſuppoſées égales; l'exemple de notre tranche de livre, dont on arrondit le creux inégalement, peut ſervir à en concevoir la vérité; puiſque le nombre des feüilles n'augmente ni diminuë dans tous les changemens de concavité ou de convexité que l'on peut faire à la courbure de cette tranche.

Definition IV.

79. Si au lieu de ſuppoſer, que les ordonnées de l'Ellipſe plane gene-

ratrice d'une ſection ſolide, s'en éloignent, d'un mouvement inégal, mais uniforme dans les parties correſpondantes, & ſans changer de grandeur; on ſuppoſe au contraire qu'en s'éloignant, elles ſe ralongent ou ſe racourciſſent proportionellement à leur diſtance de l'Ellipſe plane, priſe ſur des plans convergens, qui ont tous une commune ſection, cette figure auſſi concave comme une tuile creuſe, aura pour circonference une courbe, que nous appellerons *Ellipſoïdimbre*, c'eſt-à-dire, qui imite en quelque choſe l'Ellipſimbre.

Corollaire.

80. Il ſuit de cette définition, que l'axe droit *de* ne ſera plus égal à l'axe correſpondant DE de l'Ellipſe plane generatrice, qui eſt conjugué à celui qui eſt l'axe ſouſtendant de l'axe courbe de la ſection; mais qu'il ſera plus grand ou plus petit, plus grand s'il eſt du côté oppoſé à la commune ſection des plans convergens, & plus petit s'il eſt du même côté, ce que nous expliquerons plus nettement dans les ſections faites par la pénetration des cônes.

Definition V.

81. Lorsqu'une courbe ſera compoſée de deux portions des courbes nommées ci-devant, ſoit Cicloïmbre, ſoit Ellipſimbre, ſoit Ellipſoïdimbre, elle ſera dite *Compoſée* de ces courbes.

Enfin on appellera de ſemblables noms toutes les courbes, leſquelles, ſuivant de pareilles loix, ſeront iſſuës de figures planes paraboliques ou hyperboliques, dont les ordonnées à leurs axes s'écarteront d'une maniere uniforme de leur ſommet d'un côté ſeulement; car puiſque ces figures ſont ouvertes, les ſections courbes ne les toucheront qu'en un point, & non pas en deux, comme les précedentes.

CHAPITRE V.

Des Sections ſolides des Sphères, & premierement, de leurs Variations.

Les ſections des ſphères peuvent varier de pluſieurs manieres.

1.° Par la pénetration des Sphères entr'elles.

2.° Avec les Cylindres.

3.° Avec les Cônes.

La ſection commune à la ſurface de deux ſphères, qui ſe pénetrent, ne peut varier, elle ne peut être que la circonference d'un cercle; ſur quoi l'on peut remarquer, que les ſections faites par la pénetration des ſolides, peuvent en certains cas, être auſſi des ſections planes.

Les ſections faites à la ſurface de la ſphère, pénetrée par un cylindre, peuvent varier de quatre manieres.

1.° Lorsque l'axe du cylindre paſſe par le centre de la ſphère, dans la ſuppoſition du cylindre Droit.

2.° Dans le même cas, dans la ſuppoſition du cylindre ſcalene.

3.° Lorsque l'axe du cylindre ne paſſe pas par le centre de la ſphère, & que cependant le cylindre y entre de toute ſa circonference.

4°. Lorsque le cylindre n'entre dans la ſphère qu'en partie, à l'égard de ſa circonference.

Enfin les ſections faites à la ſurface de la ſphère, par la pénetration du cône, peuvent varier d'autant de manieres que par le cylindre, ſuivant les mêmes circonſtances de poſition rélative du centre de la ſphère, à l'égard de l'axe du cône, de celle de l'axe du cône ſur ſa baſe, & de la profondeur de la pénetration.

THEOREME VII.

La Courbe qui réſulte de la Section faite par la rencontre des ſurfaces de deux Sphères, qui ſe pénetrent, eſt la circonference d'un Cercle.

Soient les ſphères ABD, BFD qui ſe pénetrent, de quelque grandeur qu'elles ſoient l'une à l'égard de l'autre, dont les centres ſont en C & E, ſoit auſſi la ſection telle qu'elle puiſſe être repréſentée par la courbe BHD, qui doit paſſer par les points B & D, communs aux deux ſphères; puiſqu'ils ſont à l'interſection de deux cercles majeurs qui ſont dans le même plan, paſſant par les deux centres C & E, (*Fig.* 29. 30. 31.) le diametre de cette ſection ſera la ligne BD, qui paſſera par ces points B & D communs aux deux ſurfaces, lequel par la differente poſition des ſphères, paſſera ou entre les deux ſphères, comme à la fig. 29. ou par un des centres, comme à la fig. 30. ou au dehors des deux centres, comme à la fig. 31; de quelque façon que ce ſoit, la démonſtration ſera toujours la même. *Fig.* 29. 30. 31.

Ayant tiré une ligne CE par les centres C & E, & pris à volonté ſur la courbe de la ſection un point H, on tirera des centres C & *c*, (*Fig.* 31.) des lignes CH, *ch*, & des points G & *g*, (*Fig.* 29. & 31.) ou E, (*Fig.* 30.) où les lignes paſſant par les centres, coupent les diametres BD & *bd*, des lignes au même point H, comme GH, EH ou *g h*.

Il eſt évident par la définition de la ſphère, que les lignes CB, CH, CD ſont égales entr'elles, étant des rayons de la ſphère ABD, de même que EB, EH, ED, (*Fig.* 29. & 30.) & *eb*, *eh*, *ed*, (*Fig.* 31.) il eſt encore évident, que les lignes BD ſont coupées également & perpendiculairement en G, par la ligne qui paſſe par les centres C & E; donc les triangles CBE, CHE, CDE, qui ont le côté CE commun, ſont égaux en tout, de même que les triangles CBG, CHG, CDG rectangles en G, qui ont le côté CG commun, & les hypotenuſes CB, CH, CD égales entr'elles; donc les côtez GB, GH, GD ſeront auſſi égaux entr'eux; puiſqu'ils ſont d'ailleurs les perpendiculaires abaiſſées des ſommets des triangles égaux CHE, CBE, CDE; donc (par la 4. du 11. d'Eucl.) ces trois lignes ſont dans un même plan, & les rayons d'un cercle, dont les points BHD ſont à la circonference qui eſt la commune ſection des deux ſphères, *ce qu'il falloit démontrer*.

Fig. 30. La même démonſtration eſt plus ſimple dans la fig. 30. où les points E & G ſont confondus.

Application à l'uſage.

86. On connoît par cette propoſition, que le ceintre d'une voute ſphérique, qui en rencontre une autre qu'elle coupe, eſt un cercle, par exemple, une niche qui eſt audeſſus de l'impoſte d'une voute ſphérique, fait avec elle à l'arête *d'Enfourchement* un demi cercle parfait, ſuppoſé que l'une & l'autre de ces voutes ne ſoit ni ſurhauſſée ni ſurbaiſſée, & que l'Impoſte d'une Calote de dôme, renfoncée en cû-de four, audeſſus d'une voute ſphérique, eſt encore un cercle, auſſi bien que celle de la premiere voute.

THEOREME VIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cylindre Droit, dont l'axe paſſe par le centre de la Sphère, eſt un Cercle.

Soit la courbe AIBO, la ſection faite par la rencontre des ſurfaces
Fig. 32. de la ſphère ABDE, & du cylindre LNGF, dont l'axe MH paſſe par le

le centre C de la ſphère. Si du point I, pris à volonté à la circonference de cette ſection, on tire au centre C la ligne IC, & que du milieu K de la ligne AB, qui eſt ſuppoſée paſſer par les points A & B, communs à la ſurface de la ſphère, & à celle du cylindre, on mène la ligne IK, on verra, comme dans la propoſition précedente, que les triangles AKC, IKC, BKC rectangles en K, qui ont le côté CK commun, & les côtez AC, CI, CB égaux, étant rayons de la même ſphère, les côtez AK, IK, BK ſeront auſſi égaux entr'eux, & dans un même plan, donc ils ſeront les rayons d'un cercle, dont les points AIB ſont à ſa circonference; mais la ligne CK étant par la ſuppoſition une partie de l'axe du cylindre, FLNG ſera auſſi perpendiculaire au même plan; donc la ſection commune à la ſphère ABDE, & au cylindre LNGF, ſera un cercle formé par la rencontre des ſurfaces de ces deux corps, *ce qu'il falloit démontrer.*

Application à l'uſage.

87. On voit par cette propoſition quel doit être le ceintre de la rencontre des voutes ſphériques avec les Berceaux Droits, dont les axes paſſent par le centre de la ſphère, tel eſt le Pui d'une cyterne voutée en cû-de-four, comme il y en a un à Phalsbourg, telle eſt la fenêtre à la Clef de la voute du Pantheon à Rome, telles ſont les Impoſtes de Lanternes ſur les dômes dans la plûpart des Egliſes modernes, les rencontres des Nefs en berceau avec les Chevets circulaires, voutez en quart de ſphère, ou d'une plus grande portion, ſi le diametre du ſanctuaire eſt plus grand que celui du berceau de la nef; ſuppoſé que l'une & l'autre de ces voutes ne ſoit ni ſurhauſſée ni ſurbaiſſée, & que la nef ne ſoit point biaiſe ſur le Chevet, quoique la direction de ſon axe, c'eſt-à-dire, de ſon milieu, paſſe par le centre de la portion de voute ſphérique; car pour peu qu'il y ait de biais, la ſection n'eſt plus un cercle, comme nous allons le démontrer.

THEOREME IX.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cylindre Scalene, dont l'Axe paſſe par le Centre de la Sphère, eſt une Ellipſe.

Soit la ſphère ABIH, pénetrée par le cylindre ſcalene KLGF, (*Fig.* 33.) dont l'axe Xx paſſe par le centre C de la ſphère, ſi l'on ſuppoſe un plan paſſant par cet axe, il fera deux ſections differentes, ſçavoir le parallelograme KLGF dans le cylindre, & le cercle SDE dans la ſphère, lequel ſera grand ou majeur, parce qu'il paſſe par le centre C, & dont les points A & B, où ſe coupent ces deux figures, ſont com- *Fig.* 33.

muns aux deux ſurfaces de la ſphère & du cylindre, de même que les points I & H de la ſection oppoſée, qui ſont ſur les côtez du parallelograme, & à la circonference du cercle en même tems, & tous autres points que ces quatre ne pourront être que ſur une des ſurfaces des deux ſolides; car s'ils ſont ſur celle du cylindre, ils ſeront au dedans de la ſphère, & s'ils ſont ſur celle de la ſphère, ils ſeront hors du cylindre, puiſque les arcs ADH & BEI ſont au dehors des côtez AH & BI. Si l'on imagine un ſecond plan perpendiculaire au premier, & qui paſſe par les points A & B, il coupera ces deux corps differemment du premier, & ſera deux ſections differentes, ſçavoir un cercle A*e*B*l*, repréſenté ici en racourci de perſpective, dont le diametre ſera AB & qui ne ſera plus un grand cercle, mais un cercle mineur; parce qu'il ne paſſe pas par le centre C de la ſphère. L'autre ſection dans le cylindre ſera une Ellipſe A*d*B*k*, dont AB ſera le petit axe; parce que la ſection perpendiculaire à l'axe d'un cylindre ſcalene eſt une Ellipſe, & que le diametre KL du cercle de la baſe KMLN, incliné au côté LG eſt plus grand que AB, qui lui eſt perpendiculaire; en effet ſi on lui menoit une parallele A*r* par A, elle feroit l'hypotenuſe du triangle rectangle, dont AB ſeroit une jambe, or toute ſection qui n'eſt pas parallele à la baſe, & qui n'eſt pas ſouſcontraire eſt une Ellipſe.

Presentement puiſque le plan paſſant par AB fait deux ſections differentes, il eſt évident que ni l'une ni l'autre ne peut être commune aux deux ſurfaces; en effet l'Ellipſe du cylindre étant circonſcrite au cercle de la ſphère, avec lequel elle n'a de commun que les deux points A & B, eſt toute hors de la ſphère & le cercle de la ſphère eſt tout au dehors du cylindre, donc la ſection commune ſera une autre courbe, qui ſera hors de ce plan, & qui n'aura de commun avec les deux planes, que les points A&B, cette courbe paſſeradonc au deſſus ou au deſſous du plan, coupant ces deux corps par AB. Dans cet exemple elle paſſera du côté du centre C de la ſphère, comme A*f*B; parce que le diametre MN = *fi* eſt plus grand que AB. Il faut à préſent faire voir le rapport qu'elle a avec l'Ellipſe A*d*B, pour démontrer qu'elle eſt une Ellipſimbre, telle que nous l'avons défini ci-devant. Pour y parvenir il faut encore une préparation.

Quoique nous ayons déja ſuppoſé deux plans coupans la ſphère & le cylindre, l'un par l'axe X*x*, l'autre par les points A & B perpendiculairement au premier; il convient encore d'en imaginer au moins deux autres paralleles entr'eux, & perpendiculaires aux premiers, ſçavoir encore un par l'axe & le diametre MN de la baſe, & l'autre par l'ordonnée OPQ; cette multiplicité de plans eſt un peu embaraſſante pour le Lecteur, mais elle eſt inévitable pour la démonſtration des proprietez

de la courbe que nous examinons, on peut s'aider l'imagination par des reliefs de papier ou de carton; il ſera bon encore de ſe rappeller ici le onziéme & douziéme Livre d'Euclide; parce que tout cet ouvrage ne roule que ſur les ſections & rencontres des plans; on ſentira la conſéquence de cet avertiſſement dans la ſuite, où quelque attention qu'on ait eu à rendre les figures intelligibles, on ne ſe flatte pas d'avoir pû repréſenter bien ſenſiblement en ſaillie, ce qui eſt à plat ſur le papier, c'eſt à l'imagination du Lecteur à relever les objets, & les détacher du plan où ils ſont, pour les conſiderer où ils doivent étre.

Soient donc deux plans paralleles à l'axe du cylindre, paſſant par les ordonnées MN, OQ, les ſections de ces plans dans la ſphère ſeront des cercles, dont fSi & tsb ſont des arcs, & des parallelogrames dans le cylindre, dont $MdkN$ & $uOQZ$ ſont des portions; parce que Md & Nk ſont paralleles, étant les côtez du cylindre, & MN & dk auſſi paralleles entr'elles; parce que les plans KML de la baſe, & AdB de la ſection par AB, ſont perpendiculaires au même plan AKLB, paſſant par l'axe Xh; or puiſque la ligne MN eſt perpendiculaire à l'axe CX, c'eſt-à-dire au rayon CS prolongé, elle eſt parallele à la tangente qui paſſeroit par S de l'arc de cercle fSi, & les lignes Mm & Nn étant paralleles à cet axe, & également éloignées de part & d'autre, les lignes Mf Ni rencontreront cet arc en des points f & i, équidiſtans de M & N; (par l'Art. 39.) donc la ligne fi ſera parallele à MN & à dk; donc $df = ki$, & $dk = fi$, c'eſt-à-dire, que l'ordonnée dk dans l'Ellipſe AdB eſt égale à l'ordonnée de la ſection commune aux deux ſurfaces, qui paſſent par f & par i. On démontrera de la même maniere que l'ordonnée uz eſt égale à l'ordonnée tb de la ſection ſolide, qui paſſe par t; donc toutes les ordonnées à l'axe courbe AhB, de la ſection ſolide, ſont égales à toutes celles de l'Ellipſe à l'axe AB; donc la ſection eſt une Ellipſimbre, *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

88. Puisque le plan MN, par l'axe Xx du cylindre coupe perpendiculairement l'axe ſouſtendant AB de la ſection, il ſuit que la plus grande ordonnée de l'Ellipſe plane, qui eſt ici dk, s'abaiſſe perpendiculairement à AB en fi, qui eſt *l'Axe droit* de la courbe, & par conſéquent que cet axe eſt équidiſtant des extremitez de l'axe ſouſtendant AB, ce qui n'arrive dans aucun cas, que dans celui des cylindres ſcalenes.

Corollaire II.

89. En ſecond lieu il ſuit que la plus grande profondeur, ou diſtance de l'Ellipſimbre à l'Ellipſe plane, eſt à l'axe droit fi; parce que la

plus grande difference de du diametre el du cercle de la ſphère AeBl, & de l'axe dk de l'Ellipſe AdBk, eſt dans le plan de l'axe droit fi; or puiſque de ou Lk eſt la plus grande diſtance, qu'il puiſſe y avoir de la circonference du cercle à l'Ellipſe, la diſtance df ou iK ſera auſſi la plus grande qu'il puiſſe y avoir du plan AdBk à la courbe AfBi; & parce que cette difference des ordonnées du cercle à celles de l'Ellipſe, au même diametre AB, diminuë continuellement, il ſuit que la profondeur de l'Ellipſimbre diminuë auſſi depuis f juſqu'à B, où elle rejoint le cercle de la ſphère AeBl.

COROLLAIRE III.

90. POUR trouver cette profondeur ſur l'axe courbe de l'Ellipſimbre, qui eſt dans le plan de l'axe ſouſtendant AB, il n'y a qu'à décrire les ſections que font les plans paſſant par les ordonnées parallelement à l'axe du cylindre, leſquelles ſont des cercles de la ſphère, dont les
Fig. 35. centres ſont tous ſur la ligne DE, perpendiculaire à l'axe Xx du cy-
& 36. lindre par le centre C, & dont les lignes CS & WS en exprimeront les rayons; pour avoir les diſtances des côtez du cylindre, au plan paſſant par ſon axe & par AB, il faut faire à part (*Fig.* 34.) l'Ellipſe aebE, ſur les axes donnez; ſçavoir, ab égal à AB de la fig 33. & Ee égal au diametre KL de la baſe du cylindre ſcalene, dans laquelle on inſcrira le cercle adhD, qui ſera égal à celui de la ſection de la ſphère par AB de la Fig. 33. Cette préparation étant faite on tirera à part une
Fig. 36. ligne cs, (*Fig.* 36.) ſur laquelle prenant cs égal à CS de la Fig. 33. pour rayon, on décrira un arc indéfini SF, enſuite portant la diſtance sg de la fig. 33. en sg de la fig. 36, on élevera ſur ce point une perpendiculaire gd, ſur laquelle prenant ge égal au demi diametre du cercle adhD, c'eſt-à-dire à Ag de la Fig. 33. on aura le point e, où la ſection plane coupe la ſphère; mais parce que ce point eſt au dedans du cylindre, il faut porter en dehors la diſtance DE de la fig. 34. qui eſt la difference du demi diametre du cercle & de l'axe de l'Ellipſe. Si par ce point d on mêne une parallele à cs, elle coupera l'arc fs au point f, qui ſera commun au côté du cylindre df, & au cercle de la ſphère sef; & par conſéquent à la circonference de l'Ellipſimbre; donc la ligne df ſera la profondeur de cette courbe, au milieu à ſon axe droit, laquelle diſtance ſera égale à celle de l'axe courbe à l'axe ſouſtendant, dont l'un paſſe par g & l'autre par h; puiſque les ordonnées dg de l'Ellipſe, & fh de l'Ellipſimbre, ſont paralleles & égales.

Fig. 33. IL ne ſera pas difficile de trouver cette profondeur pour tous les au-
34. 35. tres points de l'axe courbe; car ſi l'on porte la diſtance CW, de
36. la Fig. 33. en cY de la Fig. 35. on aura la diſtance des plans, qui

paſſent par MN & OQ de la fig. 33. & ſi l'on mene *uu* parallele à *e*E, fig. 34. on aura les ordonnées Y*u* de l'Ellipſe, & Y*x* du cercle, & en W*s*, Fig. 33. le rayon du cercle de la ſphère, avec lequel faiſant (*Fig.* 35.) l'arc *s*T, & la fléche *ys* égale à *ys* de la fig. 33. on menera par le point *y* la perpendiculaire *yu*, qu'on fera égale à Y*u* de la fig. 34. ſi par le point *u* on mene *u*T parallele à W*s* cette ligne, qui repréſente le côté du cylindre, coupera l'arc *s*T au point T, qui ſera commun à la ſphère & au cylindre, par conſéquent à la circonference de l'Ellipſimbre, la diſtance *u*T ſera celle des ordonnées *uy* de l'Ellipſe, & T*u* de l'Ellipſimbre que l'on cherchoit; ce qui n'a pas beſoin de démonſtration, puiſque cette figure eſt une exacte repréſentation de la ſection faite dans la ſphère & dans le cylindre, par le plan OQ*bt* parallele à ſon axe & au diametre de la baſe MN paſſant par l'axe XC, dont une partie eſt repréſentée ici (*Fig.* 36.) par la ligne CS rayon de la ſphère, & WP qui lui eſt parallele par W*s*, partie de W*p*, de même que *df* de la fig. 36. repréſente une portion du côté du cylindre M*f*, & T*u* celle du côté O*t* de la fig. 33.

Application à l'uſage.

91. Ce Theoréme fait voir que lorſqu'une voute en berceau biaiſe & en plein ceintre dans ſon Arc de face, rencontre une voute ſphérique, dont le centre eſt dans l'alignement de l'axe du berceau, l'arête qui ſe forme à la jonction de ces deux voutes ne peut être en plein ceintre, ni dans un même plan Elliptique ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, mais une Courbe dont les Aplombs s'écartent de la ligne droite, menée d'une impoſte à l'autre. Ainſi ſuppoſant qu'une nef d'Ellipſe ſoit un peu biaiſe ſur le Chevet circulaire du chœur, vouté en cul-de-four, c'eſt-à-dire, en portion de ſphère, ou ſeulement dont l'Arc-Droit ſoit ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, comme il arrive très-ſouvent, la rencontre de ces voutes eſt une Ellipſimbre. L'Architecte qui n'a point de Theorie ſe trouve embaraſſé en pareil cas, pour éviter une eſpece de difformité de cette Courbe, à laquelle il ne s'attendoit pas; l'avantage de celui qui a des Principes, eſt de connoître du premier coup d'œil, ce qui doit réſulter de ſon deſſein, ce qui le met en état d'y remedier, ou par la ſaillie de quelque Arc-doubleau, ou par quelque induſtrieuſe correction des ceintres.

THEOREME X.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cylindre Droit, qui la pénetre de toute sa circonference, & dont l'Axe ne passe pas par le centre de la Sphère, est une Ellipsimbre.

Soit la sphère ABTD, pénetrée par le cylindre LNDF, dont l'axe
Fig. 38. M*m* ne passe pas par le centre C de la sphère ; si l'on suppose un plan passant par ce centre & par l'axe M*m*, ce plan fera deux sections differentes, sçavoir, un cercle ASD dans la sphère, lequel sera majeur, & un parallelograme LNDF dans le cylindre, lesquelles deux sections se couperont aux quatre points ABDE, qui seront par conséquent, communs aux deux surfaces de la sphère & du cylindre, & à la circonference des courbes opposées, formées par la pénetration du cylindre à son entrée & à sa sortie de la sphère. Nous nous contenterons d'en examiner une, parce que l'autre lui sera parfaitement égale.

Si on suppose encore, comme au Theorême précedent, un second plan perpendiculaire au premier & passant par les points A & B, il est évident qu'il fera deux nouvelles sections, sçavoir, un cercle dans
Fig. 38. la sphère, représenté dans la fig. 38. par la courbe A*f*BF, dont le diametre sera AB, & une Ellipse dans le cylindre représentée par A*g*BG, dont AB est le grand axe ; parce que le cylindre est coupé obliquement suivant cette ligne, par la supposition, & dont le petit axe sera la ligne G*g*, ou son égale KL, qui est le diametre de la base du cylindre LNDF, d'où suivent les mêmes preuves qu'on a déduites au Theorême précedent, que la section commune aux deux surfaces des corps ne peuvent être ni cercle ni Ellipse ; puisque l'un étant inscrit dans l'autre, ces figures n'ont que deux points communs A & B, qui peuvent être à la rencontre de deux surfaces, & qu'enfin la section qui leur est commune est une Courbe à double courbure, qui n'est pas dans un plan, & qui n'aura de commun avec les deux sections planes ci-devant, que les mêmes points A & B. La seule difference qu'il y a du cas du Theorême précedent à celui-ci, est que la ligne droite AB, qui passe par ces points communs, est le petit axe, & qu'ici elle est le grand axe, de sorte que l'Ellipse est toute au dedans du cercle de la sphère dans ce cas, & tout au dehors dans le précedent.

D'ou il suit que l'axe courbe de la section solide, qui est une Ellipsimbre dans l'un & l'autre cas, s'approche du centre de la sphère dans le premier, & s'en éloigne dans le second.

Au reste les ordonnées à l'axe courbe de la section seront toujours

égales à celles de l'Ellipse, appliquée à son grand axe AB, comme nous l'avons démontré à l'égard du petit, à la proposition précedente, ce qui pourroit suffire pour l'établissement de la preuve de l'énoncé de celle-ci.

Cependant comme il importe de bien concevoir la nature & les proprietez de cette Courbe, qui est la clef de toutes celles qui se forment par la pénetration des corps, nous en allons reprendre l'explication pour la rendre plus intelligible, en la présentant sous une autre face, par une figure plus distincte, où, pour éviter la confusion des lignes, on ne représente qu'une moitié des corps qui se pénetrent, parce qu'il est très-aisé de conclure pour l'autre moitié.

Soit (*Fig.* 40.) KL*e*RQE la représentation en perspective de la section faite par un plan, passant par l'axe du cylindre jusqu'au diametre RQ de la sphere, perpendiculairement au plan passant par le même axe, & les points A & B, de sorte que C^2 M de la fig. 38. est la même que C^2M de la fig. 40. le demi cercle QSR, sera la section que ce plan fait dans la sphère, & le parallelograme K*l* celle de ce même plan dans le cylindre. Soit un autre plan parallele à celui-ci, passant par T*t*, *qr*, qui fait aussi deux sections de même nature, sçavoir un demi cercle *qsr*, & un parallelograme T*tuv*. Il est évident que les intersections des côtez de ces parallelogrames avec les demi-cercles seront des points communs aux deux surfaces de la sphère & du cylindre, tels sont les points E*e*, I*i*, par lesquels le contour de la section solide doit nécessairement passer de même que par les points A & B; la courbe E*i*BI*e* sera donc à la rencontre des surfaces, depuis son axe droit E*e*, correspondant du diametre de la base du cylindre KL jusqu'au point B, où elle va toucher la section plane de l'Ellipse, passant par AB, que nous représentons ici par la Courbe AGB*g*. Cela supposé: *Fig.* 40.

Puisque le diametre KL de la base du cylindre est perpendiculaire à l'axe C^2 M, que l'on suppose droit, & que les moitiez de ce diametre KM & ML sont égales, les lignes KE & L*e* menées de leurs extremitez parallelement à cet axe, seront égales entr'elles (par l'Art. 39.) donc E*e* sera parallele & égale à KL; mais parce que par la supposition, le plan AGB*g* est perpendiculaire au plan MN*n*C^2 passant par l'axe du cylindre M, C^2, & par la ligne AB, les angles G*c*M & *gc*M sont droits; donc G*g* est parallele à KL, & par conséquent à E*e*; mais aussi à cause des paralleles K*k*, L*l*, qui sont les côtez du cylindre, E*g* est un parallelograme; donc E*e* & G*g* sont deux lignes égales: & par la même raison H*h* & *i*I le seront aussi; or G*g* & H*h* sont des ordonnées

de l'Ellipſe plane au grand axe AB; & Ee, Ii, des ordonnées de la ſection ſolide à ſon axe courbe DxB, partie de tout l'axe ADxB; donc les ordonnées de cette ſection ſont égales à celles de l'Ellipſe AGBg, paſſant par les points communs A & B; donc cette courbe eſt du nombre de celles que nous avons appellé *Ellipſimbre*, *ce qu'il falloit démontrer*.

92. Il reſte à faire voir, que l'axe courbe ADxB, qui eſt dans le même plan que le ſouſtendant AB, lequel eſt le grand axe de l'Ellipſe AGBg, s'en éloigne & s'en approche dans le rapport des ſinus verſes des arcs de cercle de la ſphère, dont les ordonnées de l'Ellipſe & de l'Ellipſimbre ſont les ſinus droits dans les ſections circulaires de la ſphère, faites par les plans paſſant par ces ordonnées parallelement à l'axe du cylindre MC^2.

Car ſi du centre C^2 on mène les rayons C^2E & C^2e, aux extremitez de l'ordonnée Ee, qui eſt la corde de l'arc ESe, on verra clairement que ſes moitiez ED, eD ſont les ſinus droits des moitiez de cet arc, dont DS eſt la fléche ou ſinus verſe; de même ſi du centre O du demi cercle qsr on menoit des lignes au point i & I, de la corde iI autre ordonnée à la ſection, on reconnoîtroit que ſa plus grande profondeur dans le cercle, qui eſt xs, ſeroit la fléche de cette corde, & le ſinus verſe de ſa moitié ix ou Ix, ce qui eſt clairement exprimé dans les deux figures 35. & 36. en hS & us, comme nous l'avons expliqué au Theorême précedent.

Il en ſera de même de toutes les ordonnées poſſibles entre les points A & D, & D & B, dont les profondeurs diminuëront depuis l'axe droit Ee, juſqu'à ces points A & B où elles ſe réduiront à rien; parce que les ordonnées du cercle AFBf de la ſphère, & de l'Ellipſe AGBS, dont la difference cauſe celle de la profondeur de la ſection, deviennent égales à o. en ces points.

Corollaire.

93. D'ou il ſuit que l'Ellipſimbre ne fait que toucher les ſections planes, circulaire & Elliptique; parce que ces deux dernieres ſe touchent ſeulement & ne ſe coupent point, & que dès le moment qu'il commence à y avoir de la difference entre les ordonnées à leurs diametres communs, dès ce moment auſſi il commence à y avoir quelque profondeur ou diſtance des ſections planes à la ſolide, dont l'axe courbe commence à s'éloigner du ſouſtendant. Donc la circonference courbe de l'Ellipſimbre ne fait que toucher les circonferences des ſections planes du cylindre & de la ſphère.

94.

94. Nous avons donné au Theorême précedent la maniere ds trouver les ſinus verſes, qui ſont la profondeur de l'axe courbe, par le moyen du compas; mais ſi l'on vouloit, pour une plus parfaite operation, les trouver par le calcul, il ne ſeroit pas difficile. Il faut ôter du quarré du rayon du cercle de la ſection de la ſphère C^2S ou *os*, le quarré de l'ordonnée ED ou *ix*, & il reſtera le quarré de C^2D ou de *ox*, dont la racine quarrée étant ôtée du rayon C^2S ou *os*, il reſtera le ſinus verſe DS ou *xs* pour la profondeur de l'axe courbe AD*x*B dans la ſphère.

Et ſi l'on veut trouver la difference des profondeurs des ordonnées de la ſection plane & de la ſolide, il ne s'agit que de faire encore une operation, qui eſt d'ôter du rayon C^2 S ou C^2 F le quarré de l'ordonnée *c*F du cercle de la ſection plane, AFB*f* reſtera le quarré de C^2c, dont la racine étant ôtée du rayon, reſtera *c*S, dont ôtant D*s* trouvé ci-devant, reſtera *c*D, difference de la profondeur de la ſection plane dans la ſphère, & de la ſection ſolide, laquelle eſt la diſtance des deux ordonnées correſpondantes dans l'Ellipſimbre & dans l'Ellipſe plane, *ce qu'il falloit trouver.*

95. Nous avons dit dans le cas du Theorême précedent, que la plus grande diſtance de l'Ellipſe plane à l'Ellipſimbre, qui eſt à l'axe droit, étoit au milieu de la ſection ſolide, à diſtance égale des points A & B, il n'en eſt pas de même dans celui-ci; car 1.° l'axe droit n'eſt pas à égale diſtance des points A & B. 2.° ce n'eſt pas à l'axe droit que la ſection ſolide eſt le plus éloignée de la ſection plane.

Que l'axe droit E*e* ne ſoit pas équidiſtant des points A & B cela eſt évident: puiſque l'axe du cylindre étant incliné à l'axe ſoutendant AB, l'angle D*c*B eſt aigu, & D*c*A eſt obtus; donc le point D, qui eſt le centre de l'Ellipſimbre, eſt plus près de B que de A.

Secondement. Pour prouver que le point D n'eſt pas le plus éloigné de la ſection plane, qui paſſe par AB, ſoit fait à part (*Fig.* 39.) l'arc de cercle majeur aT*b* égal au ſegment, que la ligne AB retranche d'un grand cercle de la ſphère, dont le milieu de la corde eſt en C, par où on fera paſſer une ligne C*e*, qui fera avec a*b* l'angle *b*C*e* égal à celui de l'inclinaiſon de l'axe du cylindre ſur la ligne AB, égal à l'angle LAB. (*Fig.* 38.) Soit auſſi *a*L*db* l'axe courbe de la ſection ſolide, & a*b* le grand axe de la ſection plane Elliptique, la plus grande ordonnée à cet axe, qui eſt le petit axe, correſpond à celle qui paſſeroit par D de l'Ellipſimbre, qui tient lieu de centre de cette courbe; il faut prouver qu'il peut y avoir un autre point, par exemple, L, qui

Fig. 39.

Fig. 38.

soit plus éloigné de ab que le point D. Pour cela, si du point C on fait CT perpendiculaire sur ab, & que du point T, où elle coupe l'arc a T b, on mene une tangente Te à cet arc, que du même point T on abaisse T Lf parallele à DC, le point L, où elle coupera l'axe courbe, sera le plus éloigné de l'axe soutendant ab; car les lignes eC, Tf, qui sont entre les mêmes paralleles ab, Te, sont égales entr'elles, & parce que SC n'est que partie de eC, elle sera plus petite que Tf; or Sd représente le sinus verse de l'arc, dont l'axe droit qui passe par D est la corde dans le cercle, qui est la section de la sphère par l'axe du cylindre perpendiculairement au cercle a Sb, & LT représente le sinus verse, ou la fléche, dont la double ordonnée, qui passe par le point L, est la corde, laquelle étant égale à celle qui passe par le point f de l'Ellipse plane peut être très-petite; de-là on peut conclure, que son sinus verse peut être plus petit que dS, qui est dans un plus grand cercle que celui qui passe par Lf, lequel est plus loin du centre C de la sphère; (*Fig.* 34.) mais quand nous supposerions ces sinus verses égaux, il sera toujours évident qu'ôtant des deux lignes inégales SC, Tf des quantitez égales Sd, TL, la partie Lf restera plus grande que dc, qui est plus petite que Tf; donc la distance oblique Lf étant plus grande que dC, la distance perpendiculaire Lx sera aussi plus grande que dy, *ce qu'il falloit démontrer*; car les triangles Lfx & CDy seront semblables.

Corollaire I.

96. D'ou il suit que plus la ligne AB est inclinée à l'axe CS, plus il doit y avoir d'irrégularité dans l'écartement des ordonnées de l'Ellipsimbre de celle de l'Ellipse plane, comme aussi dans la distance de ces ordonnées entr'elles sur leur axe courbe adb, comme on voit à la figure 41. puisque les intervales A 2, 2 3, 3d sont très inégaux, mesurez sur cette courbe AdB, quoiqu'ils soient égaux étant mesurez sur la droite AB en pqc, ou sur une perpendiculaire à leur direction, comme en mno; puisque ces ordonnées à l'axe courbe aux points 2, 3, d, 4, 5 sont émanées de celles de l'Ellipse plane, aux points pq C, &c. ou de la base du cylindre aux points m n o. *Fig.* 41.

Corollaire II.

97. D'ou il suit encore que les ordonnées à l'axe courbe de l'Ellipsimbre ne sont pas en plus grand nombre, que celles de l'Ellipse plane de part & d'autre du centre C ou D; mais qu'elles sont plus pressées d'un côté que de l'autre.

Remarque ſur la difference des cas qui peuvent arriver dans les Cylindres Scalenes.

98. Nous avons ſuppoſé dans l'énoncé de ce Theorême, que le cylindre, qui pénetre la ſphère, fût droit, parce que s'il étoit ſcalene, il pourroit arriver que la ſection commune aux deux ſurfaces ſeroit un *Cercle*, & non pas une Ellipſimbre, comme on peut le connoître par la figure 37. car ſi du centre H, de la baſe AB du cylindre ſcalene ABDE, on abaiſſe une ligne HC perpendiculaire au plan de cette baſe, & que du point C, pris ſur cette ligne à volonté, & de l'intervale CA ou CB pour rayon, on décrive un cercle GABDE, il pourra être un des majeurs d'une ſphère, qui auroit pour centre C; or ſi l'on prolonge les côtez du cylindre ABFE vers D, il eſt évident que ce cercle coupera les côtez du cylindre en DE de la même maniere qu'en AB, de ſorte que l'angle EDB ſera égal à l'angle ABD. *Fig.* 37.

Pour en ſentir la vérité il n'y a qu'à mener CG perpendiculaire ſur les côtez du cylindre juſqu'à la circonference du cercle en G, alors on reconnoîtra que les arcs GA, GE égaux entr'eux, * étant ôtez des arcs GD, GB, auſſi égaux entr'eux par la même raiſon, les reſtes AB & ED ſeront égaux, de même que leurs cordes, qui ſont les diametres de la baſe du cylindre, donc la ſection ED ſera égale à la baſe EF; égale par la ſuppoſition de la baſe AB, parce qu'elle eſt ſouſcontraire, * l'angle EDB étant égal à ABD, puiſque tous les deux ſont appuyez ſur le même arc AGE; donc ED eſt un cercle, *ce qu'il falloit démontrer.* *Eucl. l. 5. p. 3. & 28.* * Art. 49.

Le même raiſonnement ſert auſſi à prouver que les ſections oppoſées AB, ED (*Fig.* 38.) ſont égales entr'elles; puiſque leurs grands axes AB, ED ſont égaux, & que les petits axes ſont égaux à ceux de la baſe du cylindre. *Fig.* 38.

Corollaire III.

99. Il ſuit auſſi, que plus les axes AB, ED ſeront inclinez à l'axe M*m* du cylindre, plus les ſections oppoſées ſe rapprocheront, & qu'enfin ſi le côté du cylindre *l l*, *f f* devient tangent à la ſphère, les ſections oppoſées aT, *d*T ſe toucheront au point T, & ſi ce côté du cylindre eſt hors de la ſphère, ces ſections ſe croiſent également, & ſe mutilent réciproquement, comme nous l'expliquerons au Theorême ſuivant.

Application à l'uſage.

100. Cette propoſition ſert à faire connoître qu'elle eſt la Cour-

be de l'arête d'Enfourchement des lunettes en berceau, pratiquées pour des fenêtres, ou pour la décharge ou pour la décoration dans une voute ſphèrique ; car ces lunettes étant ordinairement ou au deſſus de l'impoſte de la voute ſphérique, ou inclinées en Abajour ou Rampantes, ce ſont des moitiez de cylindre ou des cylindres entiers, dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphère, & qui doivent être cenſées faire le même effet, que ſi un cylindre entier entroit dans la ſphère de toute ſa circonference, comme ſi la fenêtre étoit un œil-de-bœuf, comme ſont ceux des quatre petits dômes de St. Pierre de Rome, dont la direction ne tend pas au centre de la voute, mais au deſſous, parce que l'Abajour eſt fort incliné. Il n'y a d'autre changement que l'addition d'une moitié de contour de même nature.

THEOREME XI.

La Section faite par la pènetration d'un Cylindre, qui n'entre dans la Sphère que d'une partie de ſa circonference, eſt une Ellipſimbre Compoſée.

Fig. 42. Soit la ſphère BV*bp*, dont le centre eſt C, pénetrée par le cylindre YLND, qui n'entre qu'en partie de ſa circonference dans la ſphère, enſorte que la partie RP de ſon diametre RT (lequel étant prolongé paſſe par le centre de la ſphère) en reſte dehors.

Ayant ſuppoſé comme dans les Theorêmes précedens, un plan qui paſſe par le centre C, & l'axe M*m* du cylindre, dont la ſection ſera un parallelograme YLND, & celle dans la ſphère un cercle majeur BV*bp*, on reconnoîtra que les points B & *b* ſont communs aux deux ſurfaces du cylindre & de la ſphère ; puiſqu'ils ſont la rencontre du côté du cylindre & du cercle majeur de la ſphère, & que le point P, qui eſt commun aux deux diametres RT du cylindre, & PV de la ſphère, ne l'eſt pas aux ſurfaces, puiſqu'il eſt dans le cylindre de la profondeur RP, qui eſt la moindre, & que l'ordonnée P*p* au diametre PV, qui paſſeroit par ce point, ſeroit toute hors de la ſphère étant une tangente; donc elle ne pourroit être commune aux deux ſections, qui ſeroient faites par un plan perpendiculaire au premier, & paſſer par RV, lequel plan en feroit deux circulaires, ſçavoir RST dans le cylindre, & PBV dans la ſphère, qu'il faut imaginer en l'air, & non pas comme le repréſente la figure, ſur le plan paſſant par l'axe du cylindre & le centre de la ſphère ; mais parce que l'interſection des deux cercles RST du cylindre, & PSV de la ſphère, ſe fait en P, il ſuit que ce point S eſt à la circonference des deux ſurfaces, d'où ayant mené l'ordonnée S*q* au diametre RT, on voit que ſa partie PT eſt commune à ceux des deux corps, ſçavoir RT, PV.

Presentement si le cylindre YLND étoit scalene, & que la section par *q* & B, c'est-à-dire, E*q*B fût un cercle, elle auroit pour son égale & souscontraire F*qb*, ausquelles *q* S seroit une ordonnée commune aux deux sections des plans, coupant le cylindre par EB & F*b*, & aux deux cercles *e* B & *fb*, que ces mêmes plans seroient dans la sphère, de sorte qu'il est visible que ces deux sections planes, quoique de même espece, ne pourroient être communes aux deux surfaces; puisque ce sont deux cercles de differens diametres, qui se touchent aux points B & *b*, dont le plus petit, qui a pour diametre *e*B, seroit tout entierement dans le cylindre, & que le grand EB seroit dans toute sa circonference hors de la sphère.

La difference sera plus grande, si le cylindre est Droit; parce que la section EB dans le cylindre est une Ellipse, & que *e* B dans la sphère un cercle fait par le même plan perpendiculaire à celui qui passe par l'axe du cylindre & par la sphère; il en est de même de la section faite par le plan F*b*, passant par *q* & *b*, l'ordonnée commune *q*S retranchera une partie de ces sections planes, depuis *q* vers E, & depuis le même point *q* vers F, tant de l'Ellipse, que du cercle fait par chaque plan coupant les deux corps, qui est hors de la sphère; mais parce que la section commune à leurs surfaces ne peut être en même tems un cercle & une Ellipse, il suit qu'elle ne peut être dans le plan EB ni F*b*, quoiqu'elle y ait un point B ou *b*; donc elle s'en éloignera en se courbant vers la circonference du cercle de la sphère, ensorte que les ordonnées à l'axe courbe *q u* B deviennent communes au cylindre en *ux* de la base F*x*K, & au cercle de la sphère 2 *x* Z *y*; donc elle sera une Ellipsimbre de même nature, que celle du Theorême précedent sur chaque côté EB & F*b*, mais imparfaite, & mutilée par l'ordonnée commune *q* S où elles se rencontrent, & font un angle, de sorte que la section totale, depuis B en *b* par *q* est Composée de deux parties d'Ellipsimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Pour rendre cette explication sensible nous supposerons un cylindre scalene M L N *m*, plus petit que le précedent, dont le côté M*m* coupe la sphère aux points 2 & 4, & que la section faite par un plan passant par 4 B, & un autre par 2*b*, est un cercle parallele à sa base, ou en section souscontraire; il est évident que le même cercle sera aussi la section plane de la sphère de chaque côté en 4 B & 2 *b*, donc le section courbe commune *b* 5 B sera la rencontre de deux portions de cercles égales, qui ont une ordonnée commune au point 5, laquelle est l'intersection de deux plans, qui feroient une figure semblable à celle qui est représentée à la figure 43. en A ou en B, selon *Fig.* 43.
que le point 5. s'approchera d'un côté du cylindre ou de l'autre; car

Fig. 38. Fig. 43. ſi ce point de l'interſection des plans ſe faiſoit à la tangente, comme en T, (*Fig.* 38.) les deux arcs de cercles aboutiroient l'un à l'autre, & l'angle B (*Fig.* 43.) tomberoit ſur le point *t*; mais à meſure que le point 5 rentrera, le point B, qui eſt la rencontre des deux arcs, s'éloignera de *t*.

Fig. 42. La même choſe arrivera aux portions d'Ellipſimbre, lorſque le cylindre eſt une partie hors de la ſphère, alors ces deux courbes feront une inflexion au milieu en angle ſaillant, tel eſt l'angle curviligne 9 Z^2 10, quand la ſphère paſſera au-delà de l'axe du cylindre, comme en P; mais ſi l'axe du cylindre paſſe au dehors de la ſphère, alors la ſection compoſée, fait un angle rectangle, comme on voit dans la figure A; (*Fig.* 43.) la raiſon en eſt bien ſenſible, ſi l'on fait attention, que juſqu'à l'axe du cylindre la ſection monte dans la raiſon des ordonnées à la baſe R S T, & au contraire, que depuis l'axe elle baiſſe dans la même raiſon juſqu'au point R, auquel elle ſe joint, lorſque le côté YD eſt tangent à la ſphère, comme nous l'avons dit du point T. (*Fig.* 38.)

Corollaire.

101. D'ou il ſuit que pour trouver les points de l'Ellipſimbre compoſé, il ne s'agit que de trouver les ordonnées communes aux ſections circulaires de la ſphère & du cylindre, & pour cela il faut leur trouver des diametres en partie communs, ce qui ſe fait en menant autant de perpendiculaires que l'on voudra à l'axe M*m* du cylindre, qui coupent le cylindre & la ſphère, comme F*y*, RV, *dff*, dont les parties 2 K, P T, *gh*, ſont communes aux diametres du cylindre FK & 2*y* de la ſphère, RT, PV; *dh*, *gff*; ſi ſur chacun de ces diametres on éleve des demi-cercles F*x*K, 29*y*, PST, PBV, *dih*, *g*G*ff* leurs interſections *x*, S, *i* ſeront des points à la circonference de la Courbe, & les perpendiculaires menées de ces points aux diametres communs, qui les couperont en *u*, *q* & 7, donneront les points de l'axe courbe, & ſeront des ordonnées communes, leſquelles étant portées de W en Y, de C en Z^2, & de H en h^2, marqueront ſur un plan, qui auroit pour baſe la ligne 9, 10, des points, par leſquels faiſant paſſer une courbe 9 Y Z^2 h^2 10, on aura une expreſſion du contour de l'Ellipſimbre compoſée, ce que nous expliquerons plus au long dans les Problémes du Livre ſuivant.

Il ſera encore vrai dans le cas de ce Theorême, comme dans le précedent, que les profondeurs de la ſection ſolide dans la ſphère ſeront dans la même raiſon des ſinus verſes, dont les ordonnées ſeront les ſinus droits, comme on le voit en 2*u*, P*q*, *g*7.

27. 28. 29. 30. 31.

32. 33. 34. 35. 36.

37. 38. 39.

40. 41. 42. 43.

Si le côté LN du cylindre passe par le centre C de la sphère, & que son demi diametre ML ne soit pas plus petit que le rayon CS de la sphère, il sera aisé de décrire l'Ellipsimbre composée avec un compas, dont on mettra une pointe sur ce côté, par exemple, en T, l'autre point le décrira.

La raison en est claire, car le rayon CS ne peut tourner au tour d'un point fixe qu'en parcourant la surface d'une sphère par l'autre extrémité mobile.

Application à l'usage.

102. Cette proposition fait voir quelle est la courbe de l'arête d'Enfourchement, qui se forme à la rencontre de la surface d'une Tour ronde, qui entre en partie dans une voute sphérique, comme pourroit être un escalier à vis dans un dôme ou un pui, sur le bord d'une citerne voutée en cû-de-four, ou d'une Tour verticale, dans laquelle sont des renfoncemens en niche sphérique, comme sont les trois du dôme du Val de Grace, l'un sur le Baldaquin, & les deux autres en Croix sur le Chœur & la Chapelle opposée, qu'on appelle Niche en tour creuse, ou encore d'une voute sphérique, établie sur quatre portions d'arc-de-Cloitre, ou qui rachete un berceau. Où l'on doit remarquer, que si la voute sphérique n'avançoit pas jusqu'à la clef, il se feroit un angle en *Surplomb* contraire à la solidité; parce que les *Contreclefs* pousseroient à vuide.

De la rencontre des Surfaces des Sphères avec celles des Cônes.

THEOREME XII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cône Droit, dont l'Axe passe par le Centre de la Sphère est un Cercle.

Soit la sphère ABED pénetrée par le cône SLN, dont l'axe SM passe par le centre C; soit aussi la courbe DKE, la section faite par la rencontre de leurs surfaces, sur laquelle ayant pris à volonté un point K, on menera du sommet S la ligne KS, qui sera à la surface du cône; puisque le point K est supposé commun à sa surface, aussi bien qu'à celle de la sphère. Si par les points D, K, E on mêne des *Fig. 44.*

lignes au centre de la ſphère C, comme DC, KC, EC, & que du même centre C on tire des perpendiculaires CF, CG, CH aux côtez du cône SD, SK, SE, on reconnoîtra que les triangles FCS, HCS, GCS ſont égaux en tout; puiſqu'ils ont le côté SC commun, qu'ils ſont rectangles en F, G, H, & qu'ils ont les angles en S égaux entr'eux, qui ſont ceux de l'axe du cône avec les côtez; donc les parties de ces côtez SF, SG, SH ſont égales; de même les autres triangles FCD, GCK, & HCE ſont auſſi égaux en tout, car ils ſont rectangles par la conſtruction, ils ont les côtez DC, KC, EC égaux, puiſqu'ils ſont rayons de la même ſphère, & les côtez FC, CH, CG, comme nous venons de le démontrer, auſſi égaux entr'eux; donc les côtez DF, KG, HE le ſeront auſſi, leſquels étant ajoûtez aux lignes égales SF, SG, SH, on aura SD = SK = SE; par conſéquent les triangles SDI, SKI, SEI ſeront égaux entr'eux, puiſqu'ils ſont rectangles en I, qu'ils ont les angles en S égaux, & le côté SI commun; or les côtez ID, IK, IE étant égaux, & la ligne SI leur étant perpendiculaire, ils ſont tous dans le même plan,* & par conſéquent à la circonference d'un cercle, dont le centre eſt en I; mais par la ſuppoſition, les points D, K, E ſont à la ſurface de la ſphère, & à celle du cône dans l'interſection faite par leur pénetration, donc la ſection d'un cône droit, qui pénetre la ſphère, & dont l'axe paſſe par ſon centre, eſt un Cercle, *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Eucl. l.* 11. *p.* 5.

On démontrera la même choſe de la ſection oppoſée AB, vers le ſommet du cône, qui eſt évidemment toujours plus petite que celle qui ſe fait vers la baſe.

Application à l'uſage.

103. Cette propoſition fait voir, quelle eſt la courbe de l'enfourchement d'une Trompe, d'une *Lunette ébraſée*, ou voute en canoniere droite, qui rachete une voute ſphérique, lorſque leurs impoſtes ſont de niveau, & leur direction tendant au centre de la voute ſphérique.

Si la trompe ou la lunette étoit biaiſe, quoique la direction de leur milieu tendit au centre de la ſphère, la courbe ne ſeroit plus un cercle, de même que ſi la direction ne tendoit pas au centre, comme on va le démontrer.



THEOREME

THEOREME XIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cône Scalene, dont l'Axe passe par le Centre de la Sphère, est une Ellipsoidimbre, *ou un cercle si elle est souscontraire.*

Soit une sphère a*b*BA (*Fig.* 45.) dont le centre est C, par lequel passe l'axe SX du cône scalene SDE, qui la pénetre, il est clair, comme dans la proposition précedente, que si l'on suppose ces deux corps coupez par un plan, passant par l'axe SX du cône, les quatre points a, *b*, B, A seront communs à la surface du cône, & à celle de la sphère; puisqu'ils sont l'interfection d'un cercle majeur de la sphère, & du triangle par l'axe du cône. *Fig.* 45.

Si l'on suppose encore un plan perpendiculaire au premier, & passant par A & B, il fera deux sections differentes, sçavoir un cercle dans la sphère, que nous représentons ici par AKB, & dans le cône scalene (la section A B n'étant pas souscontraire) une Ellipse que nous représentons ici par ALB, lesquelles sections n'ayant de communs, que les points A & B, ne pourront être ni l'une ni l'autre commune aux deux surfaces; donc la section solide passera au dehors des deux plans, avec lesquels elle doit cependant avoir les deux points A & B communs.

Soit menée *h i* parallele à la base DE par le point M, interfection de l'axe SX & de la ligne AB, il est évident que *h i* sera le diametre d'un cercle, dont la moitié M*h*, portée en ML perpendiculairement sur AB, sera une ordonnée commune à l'Ellipse sur l'axe AB.

De même si l'on mene *d e* parallele à D E par le point *m*, milieu de l'axe soutendant AB, & qu'on prenne une moyenne proportionelle entre *d m* & *m e*, cette ligne que nous supposons ici égale à *m* L sera aussi une ordonnée de l'Ellipse, qui sera égale à la moitié du grand axe de la section Elliptique du cône, puisqu'elle l'est sur le milieu *m*, & qu'elle est plus grande que *m r*, rayon de cercle fait sur le diametre AB plus petit que *d e*.

Soit de plus menée par le point *m* la ligne S*m*, du sommet du cône S, qui coupera le cercle a *b* B A en H & I; sur HI, comme diametre, on décrira le demi cercle H*f*I, qui sera une section de la sphère perpendiculaire au cercle majeur A B *b a*, puis sur la même HI on élevera au point *m* la perpendiculaire *m g* égale à *m*L; si du point *g* on mene au sommet S la ligne *g*S, elle coupera le cercle H*f*I, de la sphère au point *f*, qui sera commun aux deux surfaces, par conséquent à la section, puisque S*g* est un côté du cône, qu'il faut se représenter

en l'air perpendiculairement au plan ASB. A present si du point f on mene fy parallele à Sm, à cause des triangles semblables gfy & gSm, on aura Sm : mg :: fy : yg, c'est-à-dire, que la distance Sm du sommet du cône à l'ordonnée de l'Ellipse plane, qui en est la section par AB, sera à cette ordonnée, comme la distance de l'Ellipse à la section solide, prise sur un plan passant par le sommet du cône, est à la difference gy des ordonnées gm, fx de l'Ellipse plane, & de la
* Art. 79. section solide AxB, ce qui est suivant notre définition 4. * la proprieté de *l'Ellipsoïdimbre* ; mais parce qu'on peut trouver autant de points f que l'on voudra, qui donneront toujours une pareille analogie, quoique leur distance fy soit plus ou moins grande, il suit que la courbe est une Ellipsoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

104. D'ou il suit que si par le point f on mene fx parallele à gm, & qui coupe la ligne Sm au point x, ce point sera celui de la profondeur de l'axe courbe dans la sphère au-delà du point m, correspondant dans la section plane AB, & parce que les points m & M, & tout autre pris à volonté, produira suivant la même construction differens points f, plus près de y, on aura autant de points x que l'on voudra, sur differentes lignes Sm ou SM, venant du sommet S du cône sur l'axe soutendant AB, & par conséquent donneront la courbure de l'axe AxB.

Corollaire II.

105. Il suit encore que lorsque AB est le petit axe de l'Ellipse plane de la section du cône, la section solide s'approchera du côté du sommet S dans la grande section AB, & s'en éloignera dans la petite opposée ab, & au contraire, si AB est le grand axe de l'Ellipse, comme nous le verrons dans le Theorême suivant, qui servira d'explication à celui-ci.

Theoreme XIV.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Cône, qui la pénetre de toute sa Circonference, & dont l'Axe ne passe pas par le Centre de la Sphère, est une Ellipsoïdimbre. Si le Cône est Scalene elle peut être un Cercle.

Fig. 46. Soit la sphère AabB (*Fig.* 46.) pénetrée par le cône DSE, dont l'axe SX ne passe pas par le centre C de la sphère, soit aussi dans les mêmes circonstances qu'au Theorême précedent la ligne AB, par la-

quelle paſſe le plan perpendiculaire au triangle par l'axe, coupant les deux corps, dans leſquels il fait differentes ſections, ſçavoir une Ellipſe ALB dans le cône, qu'il coupe obliquement, & un cercle AKB dans la ſphère; il ſera clair pour peu qu'on donne d'attention à cette figure, où on a mis les mêmes lettres qu'à la précedente, qu'il s'agit de la même ſection; car ni le cercle de la ſphère, ni l'Ellipſe du cône, qui n'ont que deux points communs A & B, ne peuvent être la rencontre des deux ſurfaces, qu'en ces deux points; par conſéquent la courbe faite par leur interſection, s'écartera de leur plan, & y reviendra aux points A & B par où elle doit paſſer.

Pour reconnoître en quels points de la ſphère entre les deux A & B, cette Courbe doit paſſer, il faut ſuppoſer des plans perpendiculaires à celui qui paſſe par ASB, que nous ne pouvons repréſenter ici qu'en les couchant ſur le même plan, & ſur la ligne droite de leur interſection. Soit, par exemple, un de ces plans paſſant par SI, la moitié de la ſection de ce plan coupant la ſphère, ſera le demi cercle H*u*I, qu'il faut imaginer en l'air, & parce que ſon diametre HI coupe AB en *m*, l'ordonnée *m*P à ce diametre ſera en partie commune à l'ordonnée de l'Ellipſe à l'axe AB; mais elle excedera, parce que le cercle AKB de la ſphère eſt circonſcrit à l'Ellipſe ALB du cône; pour trouver donc où ſe termine cette partie commune, c'eſt-à-dire, la longueur de l'ordonnée de l'Ellipſe, paſſant par le point *m*, on ſçait qu'il n'y a qu'à prendre une moyenne proportionelle entre *dm* & *me*, puiſque *de* eſt le diametre du cercle, fait par la ſection du cône parallelement à ſa baſe, lequel a une ordonnée, commune avec l'Ellipſe de la ſection oblique AB au point *m*.

Soit *mr* l'ordonnée de l'Ellipſe égale à *m*R, la ligne S*r* paſſant par le ſommet du cône, & le point *r* qui eſt à ſa circonference, ſera le côté du cône; mais à cauſe que ce point *r* eſt dans la ſphère, il faut prolonger S*r* juſqu'à ce qu'il rencontre ſon cercle H*u*I au point *y*, lequel ſera commun au cône & à la ſphère, & ſi par ce point *y* on mene *yx* juſqu'à la rencontre de l'interſection des plans perpendiculaires en SI, le point *x* ſera un de ceux de l'axe courbe de la ſection ſolide. Or ſi l'on fait comme dans le Theorême précedent *rg* parallele à SI, à cauſe des triangles ſemblables S*mr*, S*xy*, *rgy*, on aura S*m* : *mr* :: *rg* : *gy*. C'eſt-à-dire, que la diſtance du ſommet du cône à l'ordonnée de l'Ellipſe plane, ſera à cette même ordonnée, comme la diſtance de la ſection ſolide à l'Ellipſe plane, meſurée ſur un plan paſſant par le ſommet S, eſt à la difference des ordonnées de la ſection ſolide, & de la ſection plane du cône; & parce qu'on peut imaginer autant de plans que l'on voudra, perpendiculaires au plan ASB, comme

So, au lieu de Sm, & qu'on aura toujours la même Analogie à l'égard des ordonnées de l'Ellipse, & de la section solide; il suit par
* Art. 79. notre quatriéme définition * qu'elle est une Ellipsoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Pour une plus ample explication, qui pourroit être un peu difficile aux commençans, nous avons jugé à propos de répeter la fig. 46.
Fig. 47. en façon de perspective, au nombre 47. mais dans un sens different, ce qui fait qu'on ne peut représenter les cercles que par des Ellipses.

Soit APB*p* le cercle de la section plane de la sphère par la ligne AB, lequel est perpendiculaire au triangle par l'axe ESF; soit aussi ARB*r* l'Ellipse de la section oblique du cône, qui passe par les mêmes points A & B; puisque la section solide n'est pas dans ce plan, elle passe par dessous, comme dans la partie A*hy*B. Nous n'en avons pas représenté davantage pour éviter la confusion des lignes. Si l'on mene des ordonnées à l'axe AB, comme P*p*, Q*q*, qui coupent l'axe AB en M & *o*, & que par ces points on mene des lignes du sommet, comme S*x*, S*z*, & d'autres par les extremitez des ordonnées de l'Ellipse, comme S*y*E, SYF, SV*h*, S*u*H; ces lignes qui seront des côtez du cône, rencontreront la surface de la sphère en quelque point, comme en *y*, Y, *h* & H, par lesquels on menera des paralleles aux ordonnées de l'Ellipse *y*Y, *h*H, lesquelles seront les ordonnées de la section solide; enfin si par les points *r*, R, V, *u*, de l'Ellipse on mene des paralleles aux lignes S*x*, S*z*, sçavoir *rt*, RT, V*i*, [illegible], on reconnoîtra comme dans la démonstration précedente, que les triangles *yrt*, *y*S*x*, *r*SM seront semblables, de même que *h*V*i*, *h*S*z*, VSo; donc SM : M*r* :: *rt* : *ty*, & SO : OV :: V*i* : *ih*; dont la courbe B*yh*A est une portion d'Ellipsoïdimbre, *comme il a été démontré ci-dessus.*

106. On voit qu'ici les ordonnées de la courbe solide excédent celles de l'Ellipse; le contraire arrive à la section opposée *ab*, vers le sommet, où les ordonnées de la courbe sont plus petites que celles de l'Ellipse plane de la proposition précedente, où l'on a vû le contraire dans l'une & l'autre section, comme nous l'avons remarqué; la petitesse de la figure ne nous a pas permis de trouver celle qui est près du sommet; mais pour peu d'attention qu'on y donne la chose est claire, & ne mérite pas une plus longue explication; puisqu'il est évident que la section solide sera toujours plus grande ou plus petite que l'Ellipse plane; parce que les côtez du cône étant essentiellement convergens, ne peuvent passer par l'extremité de deux ordonnées paralleles & égales.

107. Il faut remarquer que l'excès, ou le défaut des ordonnées de

la section solide sur la section plane Elliptique, n'est pas proportionel d'une ordonnée à une autre, entre l'axe droit *y*Y, & le point A ou B; mais qu'il augmente à mesure que l'ordonnée approche de l'axe droit *y*Y, & diminuë en tirant vers A ou B; parce que le sommet du cône S étant commun à tous les triangles formez par la section des plans, qui le coupent par ces ordonnées, ces plans sont inclinez entr'eux; or si M*r* étoit à *xy*, comme OV à *zh*, S*x* seroit à SM comme S*z* seroit à SO; donc *xz* seroit parallele à MO, ce qui est contre ce que nous avons démontré ci-devant; puisque l'axe courbe B*xz*A doit passer par A & B, & s'éloigner du plan de la section plane passant par AB; donc M*r* n'est pas à *ty* comme OV est à *ih*; & par conséquent les ordonnées de l'Ellipsoïdimbre ne seront pas en même raison entr'elles, que celles de l'Ellipse, comme dans *l'Ellipsimbre*; d'où vient que nous l'appellons *Ellipsoïdimbre*, c'est-à-dire, qui imite seulement en quelque chose l'Ellipsimbre; en effet cette courbe a un rapport essentiel avec l'Ellipse dans les ordonnées, prises dans la section triangulaire d'un plan, qui passe par le sommet du cône & l'ordonnée de l'Ellipse quelconque, dont l'excès ou le défaut est proportionné à l'éloignement des deux sections mesuré sur le même plan de la section triangulaire, & non pas à la distance absoluë, qui seroit prise sur deux plans paralleles passant par les mêmes ordonnées.

Corollaire I.

108. Il n'est pas moins facile dans cette proposition que dans la précedente, de trouver autant de points que l'on voudra de l'axe courbe de l'Ellipsoïdimbre, ce qui donne un moyen commode d'en faire la projection, comme nous le dirons en son lieu; car (*Fig.* 46.) si l'on veut avoir les points *x* & *z* de l'axe courbe correspondans aux points *m* & *o*, ayant mené par ces points des lignes *de*, *hi* paralleles à la base DE, & par ces mêmes points des lignes S*m*I, S*o*Q, qui couperont le cercle majeur de la sphère en H & I, *q* & Q, on décrira sur ces lignes, comme diametres, des demi-cercles, comme H*u*I, auquel on menera par le point *m*, *m*P perpendiculaire à HI, ensuite ayant pris sur *m*P la longueur *mr* égale à la moyenne proportionelle entre *dm* & *me*; du sommet S on menera par le point trouvé *r* la ligne S*ry*, qui coupera le demi cercle H*u*I au point *y*, par lequel menant *yx* parallele à *m*P, le point *x* où elle coupera la ligne SI, sera celui que l'on cherche; car le cercle H*u*I est une section de la sphère par un plan, qui passe par le sommet S, & le point *r*, qui est à la circonference de l'Ellipse de la section oblique du cône, donne le côté du cône S*y*, qui coupe le cercle en *y*; donc ce point est commun aux deux surfaces; & parce que ce plan est perpendiculaire à celui qui passe par *Fig.* 46.

ASB, lequel eſt auſſi perpendiculaire à celui qui paſſe par AB, l'interſection de ces trois plans ſera une ligne perpendiculaire au plan S*mx*, ſur lequel doit être meſurée la diſtance du point *m* au point *x* par une parallele à l'ordonnée de l'Ellipſe plane, & qui paſſe par le point *y*; donc *x* eſt un point de l'axe courbe, correſpondant au point *m*, *ce qu'il falloit trouver.*

109. Si l'on veut trouver cette diſtance par une Analogie, connoiſſant la diſtance du ſommet à l'Ellipſe ſur le côté du cône, en diviſant
Fig. 47. le rectangle P*rp* par *rb*, on aura *ry*; parce que la proprieté du cercle P*r*×*rp* = *br*×*ry*; & alors à cauſe des triangles ſemblables S*mr* & *rty* ou (*Fig.* 46.) *rgy* on aura S*r* : *ry* :: S*m* : *rt* ou *rg*.

Corollaire II.

110. Il faut remarquer que l'axe du cône ne paſſe pas ordinairement par le centre de l'Ellipſoïdimbre, parce qu'il ne paſſe pas par celui de l'Ellipſe plane; car l'axe du cône SX diviſe en deux également l'angle du ſommet DSE du triangle par l'axe; donc, par la huitiéme du ſixiéme d'Euclide, AS : AB :: AO : OB; or AS eſt plus petit que SB; donc AO eſt plus petit que OB; mais le centre de l'Ellipſoïdimbre doit ſe trouver au point correſpondant à G, milieu de AB, dans une ligne menée du point S par G, donc le point *z*, où l'axe du cône coupe l'axe courbe de l'Ellipſoïdimbre, n'eſt pas le centre de cette courbe, *ce qu'il falloit démontrer.*

111. Nous avons excepté dans l'énoncé de ce Theorême, touchant la pénetration du cône dans le ſphère, le cas qui peut arriver, ſi le cône eſt ſcalene, lorſque la ſection plane faite par la ligne a*b* (*Fig.* 48.)
Fig. 48. eſt ſouſcontraire; parce qu'alors étant un cercle dans le cône comme dans la ſphère, elle peut être commune à la ſurface des deux corps, non ſeulement dans une ſection comme a*b*, mais encore dans ſon oppoſée *ef*, c'eſt-à-dire, dans l'immerſion & dans l'émerſion du cône dans la ſphère, ſans que l'axe de l'un paſſe par le centre de l'autre; car puiſque le rectangle *fs* × *bs* = *es* × a*s*, *es* : *sf* :: *sb* : *s*a, & ſi l'on mene *fh* parallele à *b*a, les triangles *fsh*, *fse* ſeront ſemblables, & l'on aura *bs* : *s*a :: *fs* : *sh* :: *es* : *sf*; donc les angles *sfh*, *sef* ſeront égaux, c'eſt-à-dire, que la ſection *ef* ſera ſouſcontraire de la ſection a*b*, *ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire III.

112. Plus le côté *sf* s'éloigne du centre C, & plus les ſections oppoſées a*b* & *ef* ſe rapprocheront, de ſorte que s'il devient tangent à la

ſphère, comme s'il paſſoit par le point T, les ſections a T & T*e* ſe toucheront en ce point T; & ſi le côté SK eſt hors de la ſphère, alors il ſe formera une ſection compoſée de deux Courbes, qui ne ſeront plus des arcs de Cercles; parce qu'ils ne pourront être communs à la ſphère & au cône, qui eſt en partie dehors; mais de deux portions d'Ellipſoïdimbre, comme nous l'allons expliquer ci-après.

Application à l'Uſage.

113. Ces deux Theorêmes font voir quelle eſt la Courbe de l'enfourchement d'une trompe ou lunette Ebraſée, ou voute en canoniere, qui rachete une voute ſphérique de biais, ſoit parce que la direction de leur milieu ne tend pas au centre de la voute ſphérique, ſoit que, lorſqu'elle y tend, elle ſoit ſurhauſſée ou ſurbaiſſée dans ſon ceintre primitif, qui tient lieu d'arc-droit.

THEOREME XV.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces de la Sphère & d'un Cône, dont l'Axe ne paſſe pas par le Centre de cette Sphère, & qui ne la pénetre pas de toute ſa Circonference, eſt une Courbe compoſée de deux portions d'Ellipſoïdimbre, ou d'autres Courbes de même nature, appartenant au Cercle, à la Parabole ou à l'Hyperbole.

Soit la ſphère aT*e* (*Fig.* 49.) pénetrée par le cône SGL, en partie ſeulement, enſorte que le côté SG ſoit hors de la ſphère. Soit menée du point S une tangente ST, qui touche le cercle majeur aT*e* au point T; ſi l'on ſuppoſe les deux points a & *e* communs aux ſurfaces des deux corps, & des lignes a T *b*, *e* T *f* menées de ces points à celui d'attouchement T, qu'on peut conſiderer comme les ſections de deux plans perpendiculaires au plan du triangle par l'axe, paſſant par le centre de la ſphère, les parties de ces lignes qui ſont dans la ſphère, comme aT, *e*T, ſeront les diametres des cercles des ſections de la ſphère, & les lignes *e f*, a*b* ſeront les grands axes des Ellipſes faites par les ſections obliques du cône; or ces cercles & ces Ellipſes n'ont rien de commun que les points a & *e*, donc ni les unes ni les autres de ces figures ne peuvent être les ſections communes aux ſurfaces de ces corps; donc les ſections ſolides ne ſeront pas dans leurs plans *ef* & a*b*, & ne pourront avoir deux points communs avec chaque ſection plane; puiſque les points *f* & *b* ſont hors de la ſphère, & les parties de l'Ellipſe, qui ſe croiſent au point T, & qui ſont hors de la ſphère, ſont mutilées par le plan qui paſſeroit par la tangente T, perpendiculairement au plan a T *e*, lequel en retranche les parties T*f* & T *b*, & la jonction de ces

plans a pour interſection l'ordonnée commune, qui paſſe par le point T; mais comme ces Ellipſes ne ſont pas communes aux ſurfaces des deux corps, donc la ſection eſt une Ellipſoïdimbre par le Theoréme précedent, il ſuit qu'on aura deux portions de cette eſpece de Courbe, correſpondantes aux deux portions d'Ellipſe, ce que nous appellons une *Ellipſoïdimbre compoſée.*

114. Il faut remarquer que puiſque les ſections ſolides s'écartent des plans des ſections planes, l'ordonnée commune aux deux portions d'Ellipſoïdimbre, ne ſera pas au point T, mais en quelqu'autre comme x; parce que l'une edf paſſe au deſſus de fe, & l'autre agb paſſe au deſſous de ab, comme nous l'avons dit des cas où la ſection Elliptique du cône eſt au dehors de la ſection circulaire de la ſphère.

Corollaire I.

115. D'ou il ſuit que l'Ellipſoïdimbre compoſée ſera toujours un angle d'inflexion; non pas à ſon milieu comme l'Ellipſimbre compoſée, mais plus près d'un des points communs a ou e que de l'autre; parce que les ſections oppoſées étant eſſentiellement inégales à cauſe de la diminution du cône vers ſon ſommet, la partie de la Courbe qui en eſt plus près, comme ax, ſera plus petite que celle qui eſt vers la baſe,
Fig. 49. comme ex, ainſi qu'il eſt repréſenté dans la figure 49. par les courbes eiX & Xha.

Secondement, que cette inflexion ſera un angle ſaillant, ſi les ſections oppoſées ſe croiſent au-delà du centre de la ſphère, & un angle rentrant, ſi elles ſe croiſent en-deça, comme nous l'avons dit des Ellipſimbres compoſées; de ſorte que ſi la tangente SH étoit le côté du cône, l'angle d'inflexion ſeroit le plus ſaillant & le plus aigu qu'il puiſſe être, puiſque les axes ne peuvent ſe croiſer plus loin des points a & e, & cet angle diminuëra à meſure que le point x ſe rapprochera de la ligne a e.

Nous donnerons dans la ſuite la maniere de tracer cette Courbe compoſée, ſoit par la projection ſur un plan, comme nous l'avons déja indiquée par celle de tracer l'Ellipſimbre compoſée, ſoit en effet dans ſon contour naturel ſur un cône ou ſur une ſphère.

Corollaire II.

116. Quoique nous ayons parlé dans cette propoſition de la ſection qui produit l'Ellipſoïdimbre, nous n'avons pas prétendu qu'il n'en puiſſe arriver d'autres cas, où elle ne produit pas la même figure. Le cône en

ne en effet peut être ſitué de bien des façons à l'égard de la ſphère, qu'il ne pénetre qu'en partie, ce que l'on pourra connoître par la combinaiſon des differentes ſituations des côtez de ſon triangle par l'axe, & de l'inclinaiſon des axes des ſections planes, qu'on ſuppoſe toujours paſſer par les points communs aux côtez de ce triangle, & aux cercles majeurs de la ſphère, coupée par le même plan, qui forme le triangle par l'axe du cône, & enfin par le point d'attouchement de la ligne menée du ſommet du cône tangente au cercle majeur de la ſphère.

117. Premierement, puiſqu'un des côtez du cône doit couper la ſphère en deux points, & que ſa baſe, où un ſecond plan paſſant par un point commun aux deux ſurfaces, & par le point d'attouchement d'une ligne menée du ſommet, doit couper les côtez du cône, il ſuit que dans toutes ces ſections compoſées de portions de Courbes, il y en aura toujours une rélative au cercle ou à l'Ellipſe; mais parce qu'un des deux plans, que nous ſuppoſons comme l'origine de ces ſections, peut être ſitué de maniere qu'il ne coupe le cône que d'un côté, la ſection qui en réſultera appartiendra à la parabole ou à l'hyperbole, & ſera une courbe, à laquelle nous pouvons donner le nom de Paraboloïdimbre ou d'Hyperboloïdimbre, c'eſt-à-dire, que dans toutes ces ſections, il ſera toujours vrai que les ordonnées à leur axe courbe, qui eſt dans le plan de l'axe droit de la ſection plane & du ſommet du cône, auront un excès ou un défaut ſur les ordonnées de la ſection plane correſpondantes, rélativement à leur diſtance dans un plan paſſant par le ſommet du cône & par les deux ordonnées; de ſorte que connoiſſant cette diſtance on pourra toujours connoître la difference des ordonnées de la ſection plane & de la ſolide par cette analogie, comme la diſtance du ſommet du cône à l'ordonnée de la ſection plane:

Est à la longueur de la même ordonnée;

Ainsi la profondeur ou diſtance de l'ordonnée de la ſection ſolide à celle de la plane, priſe dans un plan paſſant par le ſommet du cône:

Est à la difference des deux ordonnées, c'eſt-à-dire, à l'excès ou au défaut de l'ordonnée de la ſection plane.

Il eſt clair que par le moyen de cette difference, ajoutée à l'ordonnée de la ſection plane, connuë par les ſections côniques, ou retranchée de cette ordonnée, on aura un point du contour de la ſection ſolide, telle qu'elle puiſſe être, Ellipſoïdimbre, Paraboloïdimbre, ou Hyperboloïdimbre.

Nous avons repréſenté dans les cinq figures ſuivantes les differentes combinaiſons de ces ſections compoſées.

Fig. 50. DANS la 1.re figure où les points a & *e* ſont communs à la ſphère & au cône, & le point T celui d'attouchement de la tangente menée du ſommet S du cône au cercle majeur de la ſphère *e* a T; le plan Fig. 51. paſſant par *e* T perpendiculairement à la tangente ST, fait pour ſection un cercle dans la ſphère & un dans le cône, dont *ef* eſt le diametre, & l'autre plan paſſant par les points a & T fait une Ellipſe dans le cône, dont le grand axe eſt a *b*.

Fig. 54. DANS la figure 2.e le plan paſſant par les points *e* & T fait un cercle dans le cône, dont EF eſt le diametre, & l'autre plan paſſant par A & T fait une parabole dans le cône; parce que A *b* eſt ſuppoſé parallele à SG.

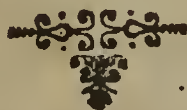
Fig. 50. DANS la figure 3.e le plan *e*T fait une Ellipſe dans le cône, dont le grand axe eſt *ef*, & le plan aT fait une parabole, dont l'axe eſt a *b*.

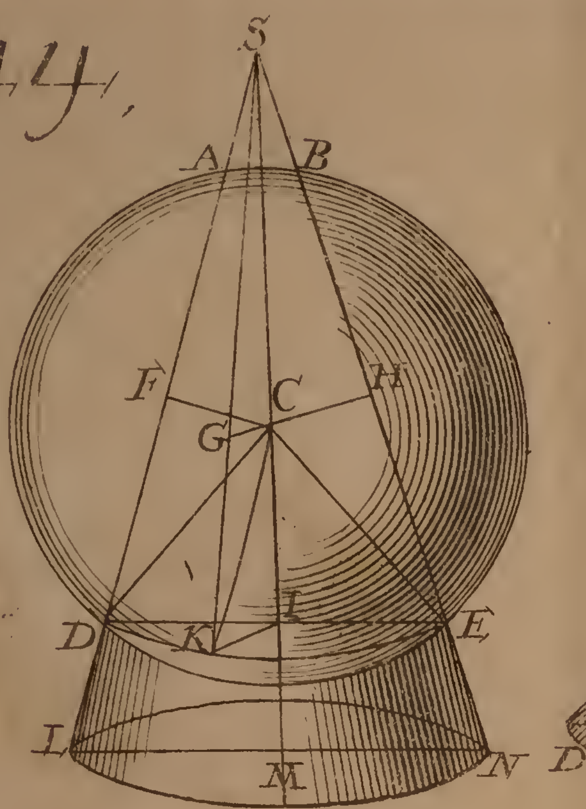
Fig. 52. DANS la figure 4.e le plan ET fait un cercle dans le cône, dont le diametre eſt EF, & le plan aT, qui rencontre le côté du cône SF, prolongé vers *z*, fait une hyperbole, dont a *z* eſt l'axe déterminé, & le point a ſon ſommet.

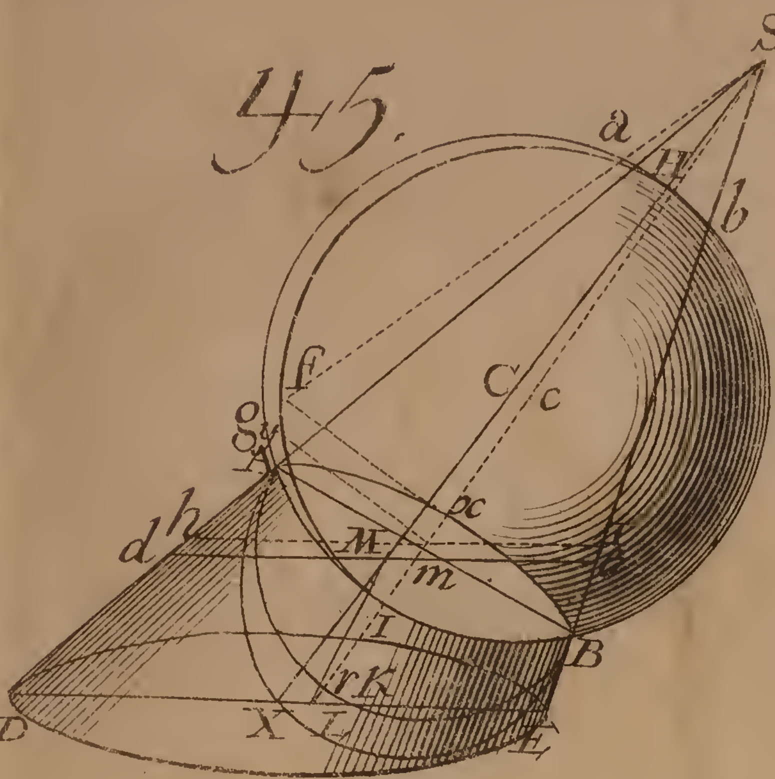
Fig. 53. DANS la figure 5.e le plan ET, qui coupe les deux côtez du cône SE & S*f* fait une Ellipſe, dont E*f* eſt le grand axe, & le plan AT, qui rencontre le côté *f*S, prolongé en *y*, fait une hyperbole, dont l'axe déterminé eſt A*y*, ſuppoſant toujours la ligne ST tangente au cercle majeur de la ſphère EAT.

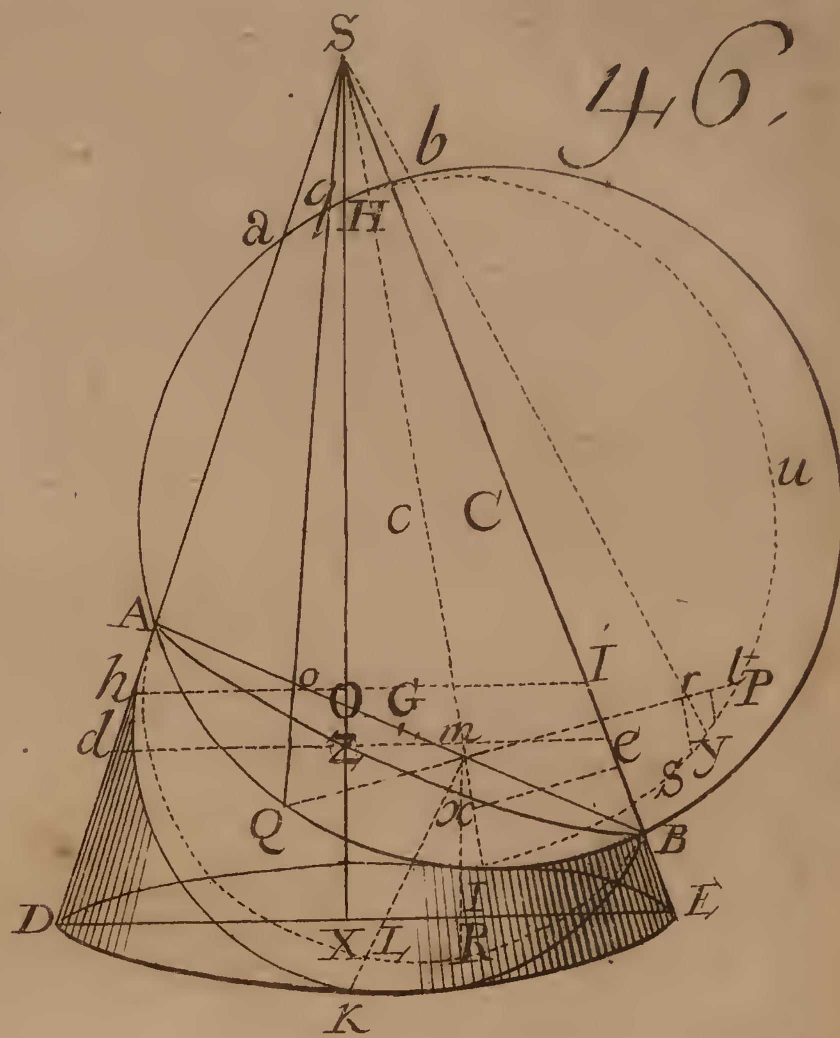
Application à l'uſage.

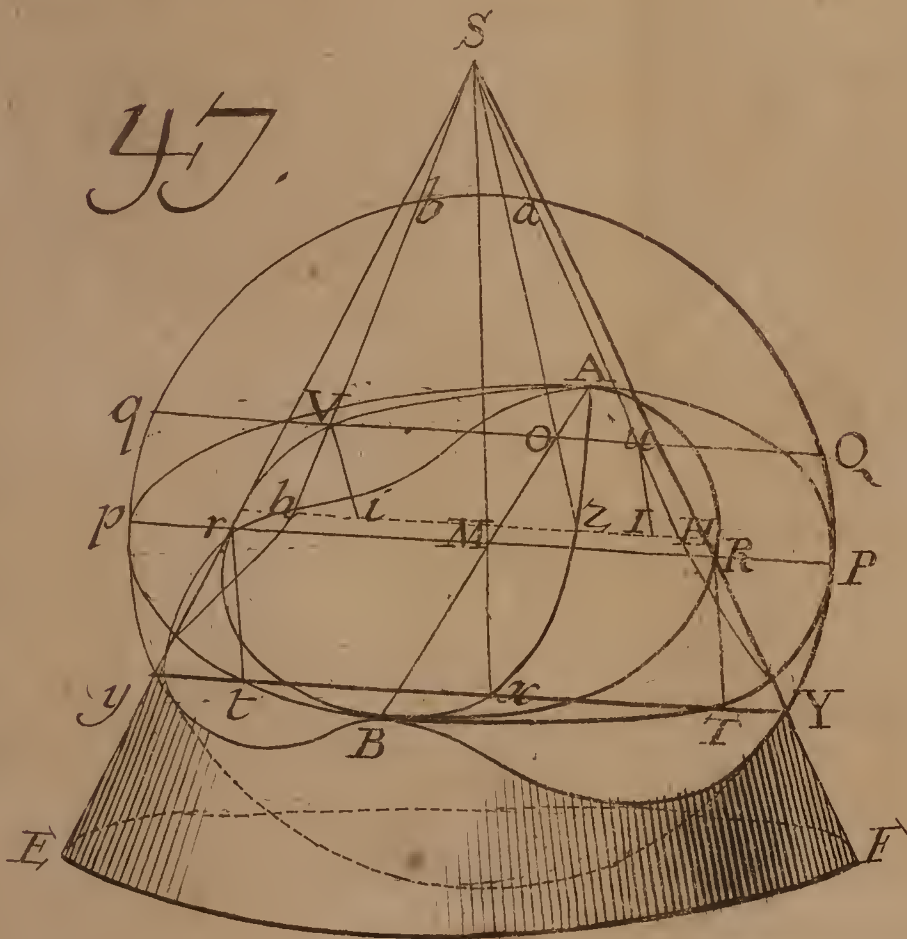
118. CE Theoréme ne paroît pas d'une grande utilité pour la pratique; on ne l'a mis ici que pour la perfection de la doctrine, il ſert ſeulement à faire connoître quelle ſeroit la courbe de l'arête d'enfourchement d'une Trompe ou voute en canoniere, qui rachéteroit par le côté une voute ſphérique, ce qui ne pourroit arriver que dans une conſtruction bizarre.

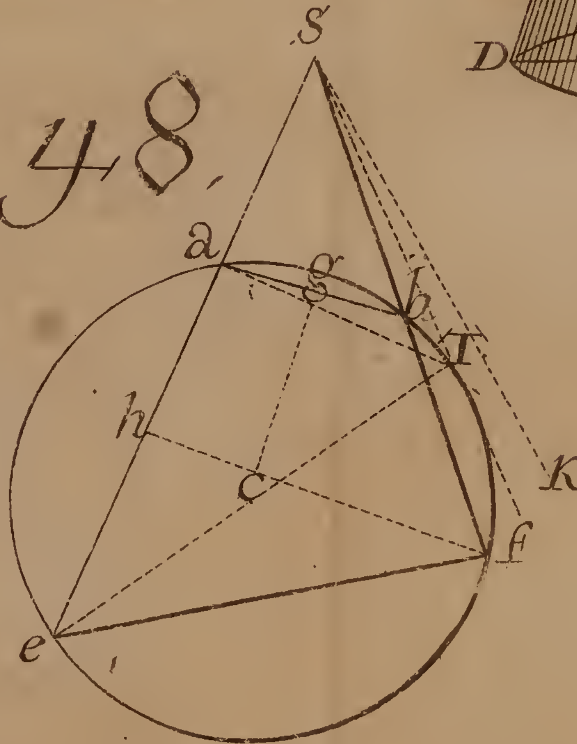


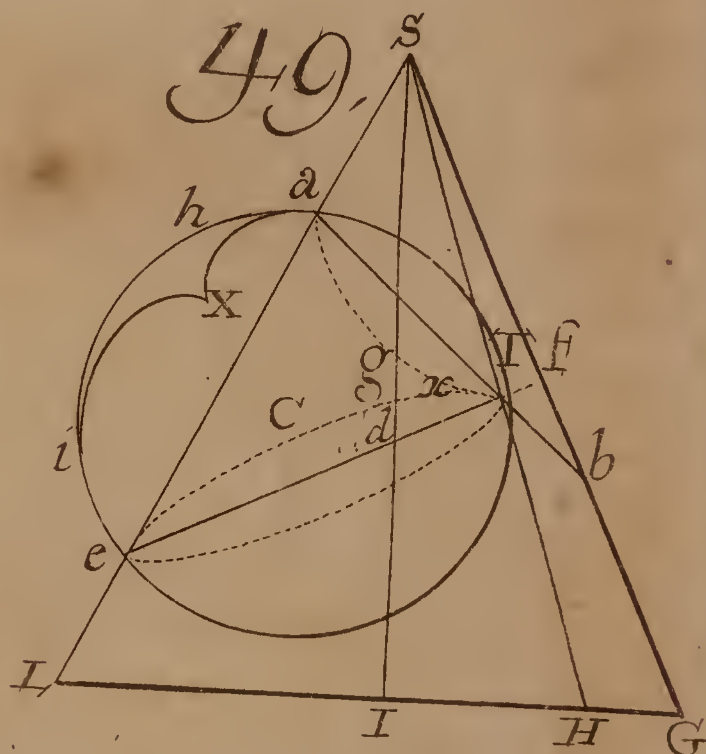

44.

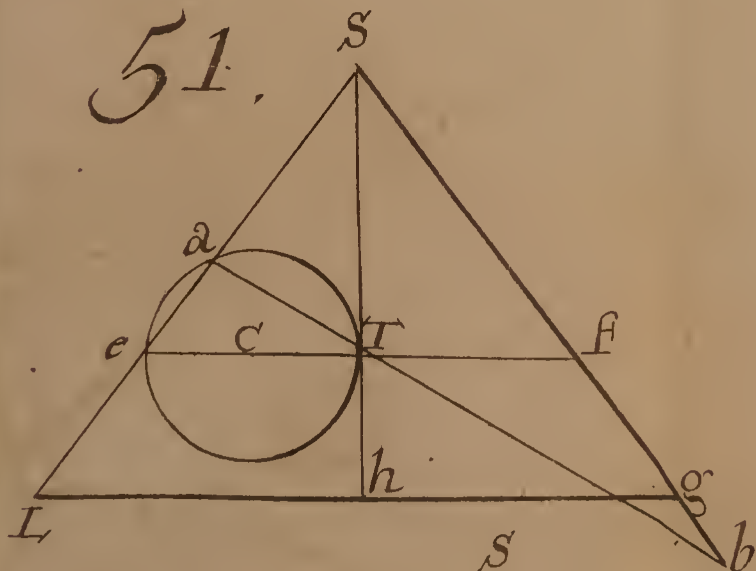

45.

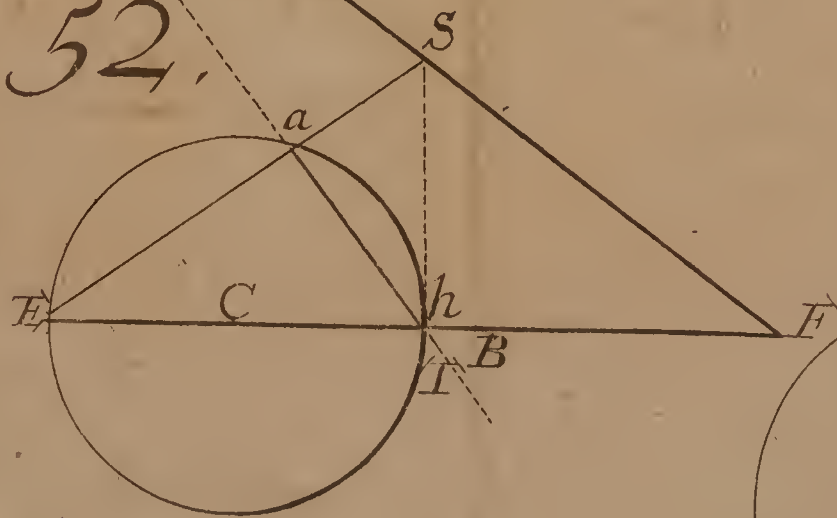

46.

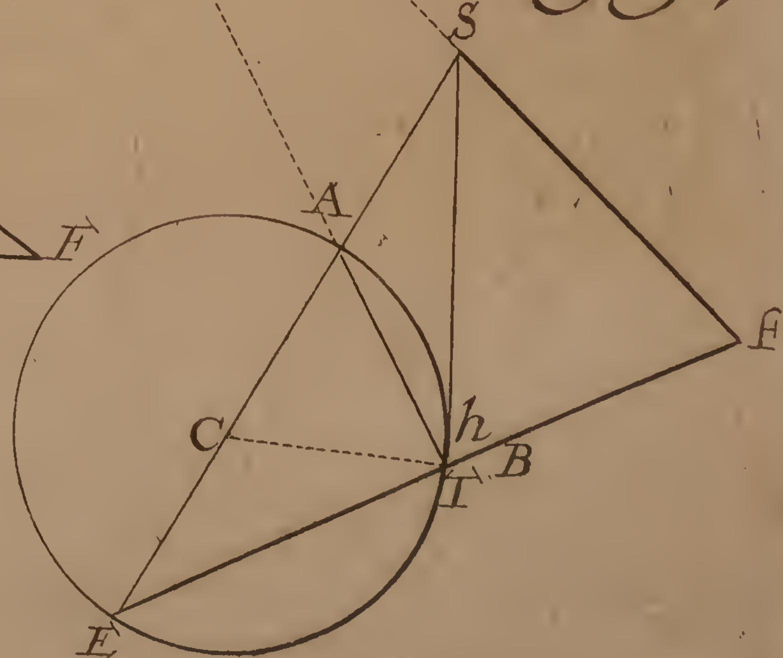

47.

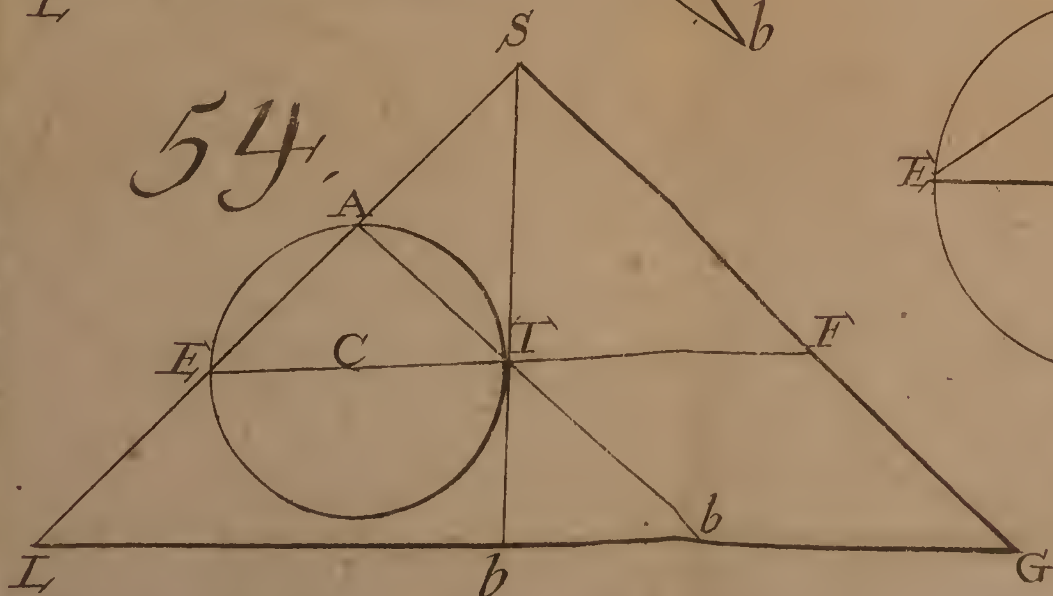

48.


49.


51.


52.


53.


54.

CHAPITRE VI.

Des Sections faites par la pénetration des Cylindres entr'eux & avec les Cônes.

THEOREME XVI.

La Section faite par la pénetration des Cylindres de même nature, égaux ou inégaux, dont les Axes sont égaux en longueur, & paralleles entr'eux, est un Parallelograme.

LA démonstration de cette proposition est trop facile pour s'y arrêter; car puisque la section d'un cylindre, faite par un plan passant parallelement à son axe, est un parallelograme (*Fig.* 55.) ceux qui passeront par des cordes égales de leurs bases & dans une même longueur, seront égaux; or on voit que la ligne AB, qui joint les points A & B de l'intersection des cercles des deux bases, est une corde commune aux deux cercles, donc le parallelograme, qui aura pour côtez cette corde & une égale longueur d'axe, sera commun aux deux cylindres. *Fig.* 55.

Application à l'usage.

119. Cette proposition fait voir pourquoi les voutes Gotiques, qu'on appelle en *Tiers-point*, font un angle rentrant à la Clef, qui se continuë en ligne droite, comme une division marquée entre les deux côtez, & les pendentifs de celles qui se croisent, parce que leurs Ceintres sont composez de deux arcs de cercle CA, A*c*, qui sont les parties des bases de deux cylindres, dont les axes sont autant éloignez que les centres C & *c* de ces arcs, qui le sont ordinairement de la longueur de leur rayon CA; ainsi la rencontre AD de ces portions de cylindre est un des côtez du parallograme de leur intersection totale s'ils étoient entiers. *Fig.* 55.

Dans l'Appareil des angles des murs on trouve aussi fréquemment des cylindres qui se pénetrent dans la même circonstance, comme on en voit à l'ancien Temple de la Galluce, & à l'Eglise de la *Sapience* à Rome, dont les plans sont des arcs de cercle inscrits dans un Cercle entier, de sorte que les murs sont des portions de cylindre, qui se croisent parallelement à leurs axes; mais cet Appareil n'a point de difficulté.

THEOREME XVII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces de deux Cylindres égaux ou inégaux, dont les Axes se coupent perpendiculairement ou obliquement, & qui ont un Diametre égal & semblablement posé sur un Plan passant par leurs Axes, est une Ellipse ; & si l'un des Cylindres est Droit & l'autre Scalene, ou tous les deux Scalenes & de Bases égales, elle peut être un cercle.

Fig. 56. *Premierement.* SOIENT deux cylindres AF, FD(*Fig.* 56.) égaux, entr'eux la diagonale menée par la rencontre de leurs côtez est également inclinée sur les uns comme sur les autres ; donc le plan passant par cette diagonale, & perpendiculairement à celui qui passe par leurs axes, coupera les deux cylindres d'une obliquité égale ; par conséquent sera une Ellipse commune à tous les deux.

Fig. W. & 57. *Secondement.* SI les deux cylindres sont inégaux, comme KE & EN, (*Fig.* W. & 57.) ou il y en aura un droit qt, & un scalene, ou ils seront tous deux scalenes, comme KE : EN (*Fig.* W.) dans ce cas il est clair que la diagonale BE, menée par la rencontre de leurs côtez KB, LE & BN, ME peut être le diametre du cercle de la base d'un cylindre scalene, & par conséquent de l'autre, qui a ce cercle aussi pour base, soit qu'il soit droit comme qt, ou scalene comme KE, de sorte qu'il peut être commun aux deux cylindres qui se rencontrent.

Fig. W. *Troisiémement.* SI la rencontre des cylindres inégaux ne se fait pas à leur base, il est évident que le plan passant par la diagonale BE, (*Fig.* W.) menée par les angles de rencontre de leurs côtez KB, LE & BN, EM, & perpendiculairement au plan passant par les axes ac & CP sera une Ellipse égale dans chaque cylindre, car l'axe BE de l'Ellipse est commun aux deux, & l'axe conjugué xX est supposé aussi égal & semblablement posé ; donc la section sera une Ellipse commune aux deux cylindres; puisqu'elle est équivalante à deux égales, *ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 58. 120. IL en sera de même des sections des cylindres inégaux, ayant un diametre égal, lorsqu'au lieu de se rencontrer simplement par leur extrémité, ils se croisent comme à la figure 58. & se pénetrent réciproquement ; car la section EB sera commune aux quatre cylindres LEBK, gEBf, hBEi, nBEm, & la section AD sera commune aux quatre cylindres hDAi, LDAk & fADg, mADn, qui aboutissent les uns aux autres, comme dans le cas précedent ; donc BE & AD sont deux Ellipses. Mais si les cylindres sont inégaux, & qu'ils n'ayent pas un diametre égal & semblablement posé, leur section commune ne sera plus une figure plane, comme nous le démontrerons au Theoréme suivant.

Application à l'usage.

121. Cette proposition est des plus nécessaires pour la connoissance des courbes des *Enfourchemens* des voutes les plus usuelles, qui sont les Berceaux; elle fait voir que lorsqu'ils sont de même hauteur, quelle que puisse être leur largeur, leur ceintre d'enfourchement, est toujours une Ellipse, soit qu'ils aboutissent l'un à l'autre, perpendiculairement ou obliquement, & alors l'angle de leur rencontre est moitié rentrant vers l'angle saillant de leurs côtez, comme depuis C en B, ce que l'on appelle alors partie de voute en *Arc de Cloitre*, & moitié saillant vers l'angle rentrant des côtez, comme de C en E, ce qu'on appelle partie de *Voute d'Arête*. Soit que les deux berceaux se croisent, & alors ils sont tous saillans, & font ce que l'on appelle proprement *Voute d'Arête*. *Fig.* W. *Fig.* 58.

Cette observation est nécessaire pour faire connoître la fausseté du Trait du ceintre surhaussé des voutes d'arêtes, Berlongues dans le Livre de la Coupe des Bois du Sr. Blanchard, qu'il fait en Tiers-point non seulement dans la figure de la planche 17. mais encore dans le discours, car il dit *Page* 68. *que leurs élevations*... *tendent au centre supposé* 18. *de sa Planche* 27.

THEOREME XVIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces de deux Cylindres Droits inégaux, dont les Axes se coupent perpendiculairement, est un Cicloïmbre.

Soit le cylindre ABED, dont l'axe FG est perpendiculaire à l'axe CO d'un autre cylindre plus petit HILK, & dont la base est le cercle HMIN, ayant supposé un plan qui passe par les deux axes, si l'on en suppose d'autres qui lui soient perpendiculaires & à l'axe FG, ces plans qui seront paralleles entr'eux feront deux sections differentes chacun, sçavoir un parallelograme MNQR, dans le cylindre superieur HILK, qu'ils couperont par l'axe, ou parallelement à son axe, & un cercle QSRT dans le cylindre inférieur ABED, qu'ils couperont perpendiculairement à son axe, lesquelles deux sections se rencontreront en deux points opposez RQ, *rq*, qui seront par conséquent communs à la surface des deux cylindres, & à la circonference de la Courbe, qui est formée par l'intersection des deux surfaces, aussi bien que les points K & L, qui sont à l'intersection des deux parallelogrames, formez par la section du premier plan, passant par les deux axes des cylindres; de sorte que cette courbe passera nécessairement par les points KR*r*L d'un côté, & KQ*q*L de l'autre, & si l'on joint les points opposez par des lignes QR, *qr*, ces lignes seront perpendiculaires au plan passant par les deux axes des cylindres, qui les coupe en deux également *Fig.* 59.

aux points P & p, par où passe l'axe courbe de la section solide KPpL; or il est aisé de voir que ces ordonnées sont paralleles & égales à celles de la base du cylindre MN, *mn*; puisque cette base HMIN est perpendiculaire au plan passant par les axes, aussi bien que QR & *qr*, qu'elles sont entre mêmes paralleles QM, RN, ou *qm*, *rn* qui sont les côtez du cylindre, étant dans le même plan MR, ou *mr* passant par l'axe OP, ou parallelement à cet axe, & s'il restoit quelque doute sur l'égalité des côtez MQ, NR; pour établir le parallelisme de MN
Art. 39. & QR, il n'y a qu'à se rappeller l'article 39. où l'on a fait voir que MN étant parallele à la tangente du cercle QSR par S, & les points M & N étant également éloignez du point O, qui est dans le diametre TS prolongé, les paralleles à ce diametre MQ & NR, terminées à la circonference du cercle, seront égales entr'elles; donc les ordonnées QR & *qr* sont égales aux correspondantes de la base du cylindre dans les mêmes plans MN & *mn*. On prouvera la même chose de toutes les ordonnées possibles. Donc la section creuse KLRQ est celle que nous avons appellée un *Cicloïmbre*, par la premiere dé-
Art. 75. finition, *ce qu'il falloit démontrer.*

Il n'est pas nécessaire d'ajouter que les ordonnées de cette section solide ne sont pas dans un même plan, puisqu'il est évident qu'elles s'éloignent de celui qui passeroit par l'axe soustendant KL, à mesure qu'elles s'éloignent de ces deux points, jusqu'au milieu QR, qui répond au diametre MN, perpendiculaire au plan passant par les axes des cylindres; or il est aisé de faire voir dans quelle raison elles s'éloignent ou se rapprochent de l'axe soustendant KL; car puisque toutes les sections faites dans le cylindre AE, par les plans passans par les ordonnées de la base HMIN au diametre HI, parallelement à l'axe OP, sont des cercles égaux à celui de la base AD; il suit que les ordonnées de la section solide, qui sont égales à celle de la base HMIN, sont autant de cordes inscrites dans un cercle égal à la base du cylindre AE, qu'on a mis en suite en a*d* par les lignes ponctuées PP^2, pp^2 p^2; de sorte que la profondeur de ces cordes dans le cercle est mesurée par la longueur de leurs fléches aP^2, ap^2 égales à SP, *sp*, qui font voir de combien la Courbe s'éloigne du plan, qui passeroit par l'axe KL soustendant de l'axe courbe KPpL, à mesure qu'elle approche du milieu de ces deux points communs KL; de sorte qu'elles augmentent continuellement en longueur dans la raison de celle des ordonnées de la base HMIN, & de profondeur dans le rapport des fléches des doubles ordonnées, inscrites dans la base du cylindre AE; ou si l'on veut prendre les ordonnées pour des sinus droits, leur profondeur sera mesurée par les sinus verses, ce qui montre évidemment que toutes les doubles ordonnées prises ensemble forment une surface courbe, en façon de tuile creuse, plus ou moins

profonde ſelon la grandeur rélative des deux cylindres, qui ſe pénetrent perpendiculairement; de ſorte que s'ils ſont égaux la ſection eſt la plus profonde qu'elle peut être; parce qu'alors la plus grande ordonnée du milieu, que nous appellons l'axe droit, paſſera par l'axe du cylindre AE, c'eſt-à-dire, par le centre C^2 du cercle aR^2dQ^2, & alors la ſection change de nature, & devient plane comme au Theorême précedent, ſe diviſant en deux parties, qui font un angle rentrant KCL.

122. Il reſte à démontrer que tous les diametres de cette ſection ſolide ſon égaux, c'eſt-à-dire, toutes les lignes, qui, paſſant par l'axe de profondeur SP, ſont terminées à la circonference de la courbe. Premierement il eſt clair que l'axe ſouſtendant KL = HI eſt auſſi égal à l'axe droit QR = MN = HI; puiſque ce ſont les diametres du même cercle HMIN. Il en ſera de même des diametres WV & Uu, qui ſeront entre mêmes paralleles WU & Vu, & d'une égale profondeur au deſſous de KL, mais tous hors de la ſurface creuſe, formée par les ordonnées, qui forment la circonference de la ſection; car ils coupent l'axe SP au deſſus du centre P, par exemple, en x. Donc par la définition premiere la ſection ſera un Cicloïmbre, *ce qu'il falloit démontrer.* Art. 75.

Corollaire I.

123. Non ſeulement les ordonnées au plan paſſant par KPL, dans lequel eſt l'axe courbe, ſont égales aux correſpondantes ordonnées au diametre HI, mais encore celles qui ſeroient perpendiculaires au plan paſſant par QSR, dans lequel eſt l'axe droit, ſeroient égales aux paralleles à l'axe HI, correſpondantes dans un plan parallele à l'axe OP, leſquelles renfermeroient une portion cylindrique, terminée par la courbe KRLQ.

Lorsque nous avons dit que tous les diametres du cicloïmbre ſont égaux, nous n'avons entendu parler que des lignes droites, menées d'un point de la courbe à ſon oppoſé en paſſant par l'axe de profondeur SP; car ſi l'on voûloit appeller diametres les lignes courbes, qui paſſent à la ſurface du cylindre par le point S, & les points oppoſez de la circonference du cicloïmbre, on s'apperçoit bien que de tels diametres ſeroient tous inégaux en longueur & en courbure, le plus grand eſt l'arc de cercle QSR, dont l'axe droit QR eſt la courbe, & les autres ſeroient des portions d'Ellipſe, toujours moins concaves à meſure qu'elles s'éloigneroient de cet arc de cercle, & qu'elles approcheroient de l'axe ſouſtendant KL, où l'arc Elliptique ſe change en ligne droite, dans la ſuppoſition qu'elles paſſent toutes par le milieu S; & parce que tous ces arcs inégalement courbes, auroient pour corde des

diametres droits, égaux entr'eux; il suit que ces courbes seroient toutes inégales en longueur dévelopée, c'est-à-dire, rectifiée.

Corollaire II.

124. D'ou il suit que le cicloïmbre, consideré comme une portion de la surface du cylindre, étenduë en surface plane, seroit une Ovale, dont le grand axe seroit QSR, & le petit KL.

Corollaire III.

125. Il suit encore que plus le cylindre HL sera petit à l'égard du cylindre AE, moins la section solide sera creuse; & au contraire, plus le cylindre HL sera grand à l'égard du cylindre AE, plus elle sera creuse, soit qu'on la considere comme portion de la surface du cylindre, ou comme une autre surface formée par une suite d'ordonnées à l'axe courbe KPL; de sorte qu'en cas d'égalité, comme nous l'avons dit, la section solide devient égale à deux moitiez de sections planes Elliptiques, qui se rencontrent au diametre passant par l'axe FG; parce qu'alors les côtez MQ, NR du cylindre HL deviennent tangens au cylindre AE, & par conséquent ne le coupent qu'en un point chacun, qui est à l'extremité du diametre du cylindre AE; de sorte que la profondeur sera SC, qui ne peut être plus grande; parce qu'au cas que le cylindre HL divienne encore plus grand, ce ne sera plus lui qui pénetrera, mais qui sera pénetré par le cylindre AE.

On remarque bien aussi que dans le cas d'égalité des cylindres, les plans des demi-Ellipses, qui se rencontrent en C, se coupent à angle droit; puisque les rayons KS, SL & SC sont égaux, les angles imaginez en KCS & LCS sont de 45. degrez; donc KCL sera de 90. c'est-à-dire Droit.

Corollaire IV.

126. De ce que nous avons dit que la profondeur du cicloïmbre dans le cylindre, étoit mesurée par les fléches des cordes égales aux ordonnées à son axe courbe, inscrites dans la base du cylindre, on tire une maniere fort aisée de trouver autant de points que l'on voudra de son axe courbe; car ayant fait un cercle aRdQ, & lui ayant mené par le point a une tangente *t*aT, perpendiculaire au diametre a*d*, on portera sur cette tangente les ordonnées PR, & *pr* en aT & az, & par les points T & 2 on menera TR^2, $2r^2$ paralleles au diametre a*d*, qui couperont la circonference du cercle aux points R^2 r^2, par où menant

nant des paralleles à la tangente aT, on aura ſur le diametre ad, qu'elles couperont, les fléches aP^2, ap^2, qui ſont les profondeurs des points de l'axe courbe, correſpondans aux ordonnées MN, mn de la baſe du cylindre HL, égales à celles du cicloïmbre.

Si l'on vouloit trouver ces profondeurs par le calcul, on ſe ſervira de la même méthode qu'on a donnée ci-devant au Theorême IX. pour trouver celle de l'Ellipſimbre, avec cette difference qu'elle eſt plus aiſée dans celui-ci, parce que toutes les ordonnées s'inſcrivent dans un même cercle, & que pour l'Ellipſimbre de ce Theorême elles devoient toutes être inſcrites dans des cercles inégaux.

Il eſt inutile de faire remarquer que les cicloïmbres oppoſez ſont égaux dans l'immerſion d'un cylindre dans un autre, comme dans ſon émerſion; cette vérité ſe fait ſentir par le paralleliſme des côtez de l'un & de l'autre de ces ſolides.

Application à l'uſage.

129. Rien n'eſt plus ordinaire dans les voutes que la Courbe dont nous parlons, on voit preſque par-tout les berceaux en plein ceintre, percez de Lunettes droites, auſſi en plein ceintre, dont les impoſtes ſont à même hauteur que la naiſſance de la voute, comme ſeroient celles de la nef du Val de Grace, ſi les vitraux étoient parfaitement en demi cercle. On connoît donc par cette propoſition, que la courbe de l'arête de leur enfourchement eſt un *Cicloïmbre.* Cette courbe n'eſt pas moins commune dans l'Architecture militaire; car les ſoupiraux circulaires des ſouterrains en berceaux de niveau & en plein ceintre, & poſez à plomb ſur la clef, ſont des cylindres qui en pénetrent d'autres perpendiculairement ſur leur axe, tels ſont encore les puis des citernes, poſez au milieu des voutes, comme à Phalsbourg.

THEOREME XIX.

La Section faite par la rencontre des Surfaces de deux Cylindres inégaux, dont les Axes ſe coupent obliquement, & qui ſe pénetrent de ſorte, que l'un entre dans l'autre de toute ſa circonference, eſt une Ellipſimbre.

La démonſtration de cette propoſition eſt ſi ſemblable à celle de la précedente, qu'on peut l'appercevoir à la ſeule inſpection de la figure 60. Soit a*bed* un cylindre droit, dont l'axe eſt *fg*, pénetré par un autre cylindre *hikl* plus petit, c'eſt-à-dire, d'un moindre diametre, dont l'axe *x*X, coupe l'axe *fg* obliquement en C. Ayant ſuppoſé comme dans la propoſition précedente un plan qui paſſe par les axes de *Fig. 60.*

ces lignes, il fera pour fection deux parallelogrames, dont les interfections des côtez, qui fe couperont en K, L, V*u* donneront les points K & L, communs aux deux furfaces. Si l'on fuppofe d'autres plans perpendiculaires à celui-ci, qui paffent par l'axe *x*X, ou parallelement à cet axe comme *my*; ces plans feront deux fections differentes, fçavoir, un parallelograme MY ou *my*, dans le cylindre *bl*, & une Ellipfe SRT, ou *srt* dans le cylindre a*d*, dont les interfections R & *r* feront communes à la furface des deux cylindres, ce qui eft évident. Si enfin l'on fuppofe un autre plan, auffi perpendiculaire au premier, mais paffant par KL, ou parallelement à a*b* par *b*I, ce plan fera pour fection dans le cylindre *b*L une Ellipfe *b*MIN, dont toutes les ordonnées à l'axe *b*I comme NO, *no* feront égales à toutes les ordonnées RP, *rp* de la fection folide, par les mêmes raifons, que nous avons expliquées fort au long dans la propofition précedente; car la ligne MN étant (par la fuppofition) perpendiculaire à OC, puifqu'elle eft l'interfection de deux plans *b*NI, ONYX perpendiculaires à un troifiéme *b*ILK, elle fera parallele à la tangente, qui pafferoit par le point S; donc NR & MQ, qui font paralleles, étant les côtez du cylindre, & également éloignées du diametre de l'Ellipfe SRT prolongé en O, couperont cette Ellipfe à des diftances égales de N & M; donc RQ fera parallele à NM, elle lui fera auffi égale, puifqu'elle eft entre mêmes paralleles NY, MZ. On démontre la même chofe de l'ordonnée *rq*, donc toutes les ordonnées à l'axe courbe KPL, de la fection paffant par KR*r*L, font égales à celles de l'Ellipfe plane *b*MIN, correfpondantes dans des plans paralleles entr'eux, & à l'axe *x*X du cylindre *bl*; or toutes ces ordonnées PR, *pr* ne font pas dans un même plan, puifqu'elles s'écartent & fe raprochent de l'axe fouftendant KL, auquel elles viennent fe terminer à rien aux points K & L; donc leur fomme forme une furface creufe, comme celle du Theorême IX. dont le contour eft une *Ellipfimbre* fuivant notre définition, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

128. ON doit tirer les mêmes conféquences de ce Theorême que du précedent. 1.° Que plus le cylindre *bi*LK fera grand par rapport au cylindre a*bde*, la fection KRLQ, fera plus profonde; de forte que fi les deux cylindres deviennent égaux, elle changera de nature, de fection folide qu'elle étoit, elle deviendra une fection plane, compofée de deux Ellipfes, qui fe rencontrent au diametre du cylindre a*d* paffant par l'axe *fg*, au point C & perpendiculairement au plan a*d*, ou fera l'interfection des plans des deux demi-Ellipfes, ce qui retombe dans le cas du Theorême XVII. & de la figure 58. où deux cylindres

inégaux ont un diametre commun ou ſemblablement poſé, à l'égard du plan paſſant par les axes des cylindres.

Et au contraire plus le cylindre *bl* ſera petit à l'égard de l'autre a*d*, moins la ſection ſera profonde; car puiſque les profondeurs de l'axe courbe ſont déterminées par les fléches, dont les ordonnées de la ſection ſont les cordes inſcrites dans une commune Ellipſe, qui a pour grand axe la ſection oblique ST, plus les ordonnées ſeront petites, moins elles entreront dans l'Ellipſe, où les plus petites cordes ſont toujours les plus éloignées du centre, de même qu'on l'a dit du Cercle.

Corollaire II.

129. Nous remarquerons auſſi comme au Theorême X. que la plus grande profondeur de l'Ellipſimbre n'eſt pas au milieu des points K & L; parce que l'axe droit correſpondant au petit axe MN de l'Ellipſe *b*MIN eſt plus près de L que de K, l'angle KSP étant plus grand que l'angle LSP, d'où il ſuit que les ordonnées à l'axe courbe KPL, qui ſont en nombre égal à celles de l'Ellipſe plane *b*MIN à l'axe *b*I, ſeront plus preſſées d'un côté que de l'autre, ſçavoir de P en L, que de P en K.

130. La méthode de trouver les profondeurs de la ſection, c'eſt-à-dire, les points de ſon axe courbe KPL eſt tout-à-fait la même que celle du Theorême précedent; la ſeule difference eſt que l'on inſcrit ici dans une Ellipſe, qui eſt la ſection oblique du cylindre, les ordonnées qu'on inſcrivoit dans le cercle de ſa baſe.

Si l'on fait l'Ellipſe SDTB (*Fig.* 61.) égale à la ſection oblique, qui a pour grand axe ST, ou S*t* de la Fig. 60. & le petit axe BD égal au diametre *bd* de la baſe du cylindre a*d*, (*Fig.* 60.) enſuite que l'on faſſe la ligne SH, perpendiculaire ſur ST grand axe, S1 = PR & S2 = *pr*, qu'enfin on mene par les points 1 & 2, les lignes 1R, 2*r*, paralleles à l'axe ST, qui rencontreront l'Ellipſe SRB aux points R & *r*, ces lignes 1R, 2*r*, ou leurs égales S*p*, SP, ſont les profondeurs des points de l'axe courbe, correſpondant aux points O & *o* de l'axe *b*I de l'Ellipſe *b*MIN. *Fig.* 61.

Dans le cicloïmbre nous avons trouvé que ces lignes SP, S*p* étoient les ſinus verſes des ſinus droits RP, *rp*, ici ce ſont des abſciſſes du diametre ST, leſquelles ſont encore en même raiſon que ces ſinus verſes; car ſi l'on fait l'angle LSC (*Fig.* 62.) égal à l'angle LSC, de la Fig. 60. & S*i* perpendiculaire ſur SC, & que l'on prenne ſur SC les parties SP & S*p*, égales aux abſciſſes de la fig. 61. ſi par ces *Fig.* 62.

points P & p, on mene PO, & po perpendiculaires à la ligne SL, les lignes SO, So feront les abſciſſes de hI, ; or il eſt clair que SP : SO : : Sp : So à cauſe des paralleles po PO. Si enfin l'on fait l'angle LSi, égal à l'angle IHi, & que l'on mêne des points o & O les lignes of, OF, perpendiculaires ſur Si, les lignes Sf, SF repréſenteront les abſciſſes du Cercle, c'eſt-à-dire les flêches, dont les doubles ordonnées de la ſection ſolide ſont les cordes, ou les ſinus verſes des ordonnées conſiderées comme ſinus droits, leſquelles ſont encore en même raiſon ; car SO : SF : : So : Sf : : SP : Sp, *ce qu'il falloit démontrer*, c'eſt-à-dire, que les abſciſſes de l'axe ST de l'Ellipſe SRTQ ſont à celles de l'axe hI, de l'Ellipſe hMIN, comme celles-cy ſont à celles du cercle.

Application à l'uſage.

131. Cette propoſition fait voir quelle eſt la Courbe de l'enfourchement d'une lunette biaiſe dans un berceau, lorſque les impoſtes de l'une & de l'autre ſont ſur un même plan, ou la courbe de l'enfourchement, d'un puits ou d'un ſoupirail circulaire, qui rachete un berceau rampant, comme on en voit au Fort St. Jean à Marſeille, & en pluſieurs Fortereſſes.

THEOREME XX.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces de deux Cylindres, dont l'un pénetre l'autre de toute ſa circonference, perpendiculairement ou obliquement à ſes côtez, ſans que leurs Axes ſe rencontrent, eſt une Ellipſimbre.

Fig. 63. Pour rendre la figure néceſſaire à l'intelligence de la démonſtration de ce Theorême, auſſi ſimple qu'il eſt poſſible, nous ne ſuppoſerons qu'une tranche du grand cylindre (*Fig.* 63.) faite par deux plans paralleles entr'eux, perpendiculaires à ſon axe, & tangens au petit cylindre HILK, que nous ſuppoſons premierement perpendiculaire aux côtez du grand cylindre, enſorte que ſon côté HB tombe à angle droit ſur le côté Vu du grand cylindre ; nous verrons cy-après qu'il peut tomber obliquement ſans qu'il arrive de changement à la ſection ſolide.

Si (comme dans toutes les propoſitions précedentes) nous commençons par ſuppoſer un plan paſſant par l'axe du petit cylindre HL, & perpendiculairement à celui du grand, nous verrons qu'il fera deux ſections differentes, ſçavoir un parallelograme HILK dans le petit, & un Cercle DVGU dans le grand, qui ſe couperont aux points AB, EF, leſquels feront par conſéquent communs aux deux ſurfaces des cylindres. Si par deux de ces points A & B, on fait paſſer un ſe-

cond plan parallele à l'axe du grand cylindre, il ſera auſſi deux ſections differentes dans ces deux corps; ſçavoir un parallelograme STUV dans le grand, & une Ellipſe AMBN dans le petit, qu'il coupe obliquement, dont le grand axe ſera AB, & le petit MN, égal au diametre de la baſe HI, & les côtez du parallelograme STUV ſeront tangens de cette Ellipſe à l'extremité de ſes axes, & par conſéquent au dehors du cylindre; donc il ne peut être la ſection commune aux deux ſurfaces; l'Ellipſe AMBN ne peut auſſi être une ſection commune, puiſqu'elle eſt toute au dedans de la ſurface du grand cylindre, avec laquelle elle n'a de commun que les points A & B; donc la ſection commune faite par la rencontre des ſurfaces ſera une courbe differente de ces deux figures avec leſquelles elle doit cependant avoir les points A & B communs, par conſéquent elle ne ſera pas dans un plan, mais une courbe à double courbure, cependant elle aura toutes les ordonnées à ſon axe courbe égales à celles de l'Ellipſe, qui eſt la ſection oblique du petit cylindre par les points communs A & B.

Pour trouver les points par où cet axe courbe paſſe, il eſt plus aiſé dans cette propoſition que dans toutes les précedentes Ellipſimbres; puiſqu'il n'eſt pas une courbe inconnuë, mais un arc de cercle APB, qui eſt portion de celui de la ſurface du grand cylindre, coupé par un plan perpendiculaire à ſon axe, & paſſant par les points DBAV, ſi le cylindre HL tombe perpendiculairement ſur les côtez du grand.

Ou dans un autre cas cet arc courbe ſera une portion de l'Ellipſe, faite par un plan paſſant par l'axe du cylindre HL, & coupant obliquement le grand cylindre par les points A & B.

Soient les points RQ & rq la rencontre des deux ſurfaces, les ordonnées menées par ces points à la courbe de la ſection ſolide, ſeront donc ſur la ſurface du grand cylindre, dont elles feront partie des côtez, telles ſont ici PR, pr, leſquelles ſeront paralleles & égales aux correſpondantes NC : no dans l'Ellipſe plane AMBN ſur des plans paralleles à l'axe xX; car les lignes paſſant par ces points NR, nr parallelement à l'axe xX ſont des parties de côtez du cylindre HL; par conſéquent paralleles entr'elles; mais parce que les doubles ordonnées NM, nm ſont paralleles à l'axe du grand cylindre, elles le ſeront auſſi aux côtez du même cylindre; donc RM & rm ſont des parallelogrames, par conſéquent $rq = nm$, & $RQ = NM$; c'eſt-à-dire, que les ordonnées ou doubles ordonnées de la ſection ſolide, ſont égales à celles de l'Ellipſe plane, dont le grand axe eſt le ſoutendant de l'axe courbe BPA; donc la ſection eſt une Ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

132. D'ou il ſuit que cette Ellipſimbre eſt beaucoup plus parfaite & plus ſimple que celles des propoſitions précedentes ; plus parfaite en ce que ſon axe courbe eſt une portion réguliere de Cercle ou d'Ellipſe ; & plus ſimple en ce que ſes ordonnées ne font pas une ſurface differente de celle du grand cylindre, comme dans les Ellipſimbres précedentes, & par conſéquent le centre P de cette ſection ſe trouve à la ſurface du cylindre, où eſt auſſi l'axe droit RQ, qu'il diviſe en deux également. Tous les autres diametres courbes, qui paſſeront par le centre P ſeront des portions d'Ellipſes, dont les cordes ſeront les diametres droits de la ſection, égaux auſſi à ceux de l'Ellipſe plane ſoujacente AMBN.

Au reſte cette Ellipſimbre a toutes les proprietez des autres, ſes ordonnées, par exemple, ſont plus ſerrées d'un côté que de l'autre, excepté qu'elle eſt encore plus ſimple dans les profondeurs de ſon axe courbe, leſquelles ſe trouvent naturellement en faiſant d'un point donné ſur l'axe ſouſtendant *ab*, mis au bas de la fig 63. l'angle *poa* ou PCa égal à celui de l'axe *x*X, avec la ligne AB, & toutes les lignes paralles à PC, ou *po* iront ſe terminer à l'arc de cercle *b*PA de la baſe du grand cylindre, ſi le petit le traverſe perpendiculairement à ſes côtez, ou à un arc d'Ellipſe *b*PA, s'il le traverſe obliquement, comme à
Fig. 64. la figure 64. ſi l'on veut avoir les profondeurs perpendiculaires à l'axe ſouſtendant *ba*, il ſera bien aiſé d'abaiſſer des perpendiculaires *pd*, PD ſur cet axe, elles donneront ces profondeurs.

133. Il nous reſte à faire voir que ſoit que le petit cylindre traverſe le grand perpendiculairement à ſes côtez, comme nous l'avons ſuppoſé (*Fig.* 63.) ſoit qu'il le traverſe obliquement, la ſection ſera toujours une Ellipſimbre, ce qui eſt aſſez clair de ſoi-même ; car ſoit que le côté HB tombe d'une façon ou de l'autre ſur VB, le plan VSTU ſera toujours un parallelograme dans le grand cylindre, & une Ellipſe AMBN dans le petit, la ſeule difference eſt, que la ligne AB (*Fig.* 63.) eſt néceſſairement le grand axe de l'Ellipſe, & que ſi le cylindre *b*L (*Fig.* 64.) eſt oblique ſur le côté AB du grand cylindre, elle peut devenir le petit axe.

134. Nous ſuppoſons dans l'un & l'autre cas le petit cylindre Droit, s'il étoit ſcalene, le plan VSTU pourroit le couper de maniere que ſa ſection ne ſeroit plus une Ellipſe, mais un cercle, & alors la ſection ſolide ne ſeroit plus une Ellipſimbre, mais un cycloïmbre ; parce que
Fig. 64. l'axe ſouſtendant *ba* ſeroit égal à l'axe droit AB, & toutes les ordonnées de la ſection ſolide & de la plane étant paralleles & égales, les

diametres droits feroient égaux entr'eux, ce qui eft la proprieté du *Cicloïmbre*, qui en conftituë la difference avec l'Ellipfimbre où ils font tous inégaux.

135. L'obliquite' du petit cylindre fur les côtez du grand, occafionne encore une difference dans la maniere de trouver les profondeurs perpendiculaires de la fection folide fur la fection plane. Premierement, en ce qu'au lieu d'un arc de cercle pour fon axe courbe, il faut trouver l'arc de l'Ellipfe formée par l'obliquité du plan paffant par l'axe du petit cylindre, de laquelle le grand axe fera FG, & le petit *hi* bafe du petit cylindre; mais ce n'eft pas affez d'avoir trouvé cet arc *ba*, car les perpendiculaires *p d*, PD, fur la corde *ba*, ne font pas perpendiculaires au plan VSTU de la fig. 63., lequel eft parallele à l'axe du grand cylindre, parce que la ligne PD, & la parallele *p d* eft encore inclinée au côté du grand cylindre *dk*, de forte que pour trouver cette inclinaifon il faut faire à part l'angle PD*y* égal à l'angle FCH ou *x*CH de l'axe *x*X avec le côté LH du grand cylindre, la perpendiculaire P*y* fur le côté D*y* fera la profondeur que l'on cherche. *Fig.* 64.

Corollaire II.

136. D'ou il fuit comme au Theoréme X. que plus le côté HK du petit cylindre approchera de l'extremité D du rayon CD, perpendiculaire à l'axe *x*X, plus la fection fera alongée, & plus les fections oppofées AB, EF fe rapprocheront, de forte que fi le côté HK devient tangent au cercle DVGU, les fections fe toucheront au point D, & qu'enfin s'il eft hors du grand cylindre, elles fe tronqueront réciproquement, & la fection totale fera compofée de deux portions d'Ellipfimbre, comme nous l'avons dit ailleurs. *Fig.* 63.

Application à l'Ufage.

Cette propofition fait connoître quelle eft la Courbe des arêtes des lunettes droites ou biaifes, dont la naiffance eft au deffus des impoftes d'une voute en berceau, dans laquelle elles font pratiquées, foit que leurs Clefs ne montent pas à la hauteur de celle du berceau, comme font celles de la Nef du Val de Grace à Paris, & de la Chapelle de Verfailles, foit que leurs Clefs foient de niveau, comme aux Traverfes du Rampart de Landau à la Gorge des Tours Baftionnées, ce qui eft le cas du fecond Corollaire, où le côté du petit cylindre HK devient tangent au grand au point D; alors il fe forme une voute d'arêtes difformes en ce qu'elles ne peuvent pas fe bornoyer en lignes droites dans les diagonales, comme aux voutes d'arêtes, dont les clefs & les im-

poſtes ſont de niveau. En effet dans celles-ci, les interſections ſont des Ellipſes planes, comme nous l'avons démontré au Theorême XVII. & dans l'autre cas ce ſont des Ellipſimbres, c'eſt-à-dire, des courbes à double courbure, qui ne peuvent être bornoyées en ligne droite, en quelque ſituation que le ſpectateur puiſſe ſe mettre.

Si au lieu de faire attention aux rencontres des ſurfaces concaves des deux cylindres, on conſidere la convexe de l'un & la concave de l'autre, on reconnoîtra la courbe de rencontre d'une Tour ronde dans un berceau, ou ſi l'on veut s'arrêter à de petits ouvrages, on remarquera que c'eſt celle d'un pilier rond Gotique, qui rachete un Chapiteau Octogone dans une moulure de cavet; comme on le voit ordinairement aux anciennes Egliſes entre la Nef & les bas Côtez.

On peut donner un grand nombre d'autres exemples de conſtructions qui ont rapport à ce Theorême, comme ſont les Abajours cylindriques, qui éclairent des berceaux, par une direction qui ne tend pas à leurs axes, comme ſont ceux des voutes ſouterraines des tours baſtionnées de Landau, leſquels ſont fort ſurbaiſſez dans leur orifice, c'eſt-à-dire, que ce ſont des cylindres ſcalenes, dont les rencontres avec les cylindres droits des berceaux, ſont des courbes à double courbure en Ellipſimbres.

On verra au quatriéme Livre, lorſque nous donnerons les Traits des Deſcentes biaiſes, qui rachetent un berceau, l'uſage du petit triangle DP*y*, qui eſt ſous la figure 63. pour en trouver la double obliquité.

THEOREME XXI.

La Section faite par la rencontre des Surfaces de deux Cylindres, dont l'un ne pénetre l'autre que d'une partie de ſa Circonference, & dont les axes ne ſont pas paralleles, eſt une Ellipſimbre *compoſée*.

Fig. 65. Soit, comme dans la fig. 63. une tranche de cylindre *g*VN*u* (*Fig.65.*) repréſentée en perſpective, laquelle eſt pénetrée par le cylindre HL, qui n'y entre qu'en partie de ſa circonference, le côté IL étant hors du grand cylindre; je dis que la ſection formée par la rencontre de leurs ſurfaces ſera compoſée de deux portions d'Ellipſimbre,

Car ſi l'on ſuppoſe un plan paſſant par l'axe *x*X du petit cylindre perpendiculairement à l'axe du grand, il fera dans l'un un parallelograme, & dans l'autre un cercle, leſquels ſe coupant aux points A & a marqueront que ces points ſont communs aux deux ſurfaces des cylindres,

lindres, & si par le point D, équidistant des points A & a, pris sur la circonference du cercle *u d* V D, on fait passer deux plans coupans les deux cylindres par les points A & a parallelement à l'axe du grand cylindre, ils feront chacun deux sections differentes, sçavoir un parallelograme dans le grand cylindre, & une Ellipse dans le cylindre HL, laquelle sera en partie hors du grand cylindre, & parce que ces plans se croisent en D, leur commune intersection GH sera une ordonnée commune aux deux Ellipses AHBG & aH*b*G; mais parce que la section commune aux deux surfaces des cylindres, qui se coupent, est une Ellipsimbre, par le Theorême précedent, il suit que chaque section plane Elliptique correspondra à deux portions d'Ellipsimbre, qui se tronqueront mutuellement, comme les Ellipses avec les ordonnées, desquelles elles ont un rapport d'égalité, dans les plans paralleles à l'axe *x*X, & perpendiculaire au plan passant par les points ADa; donc la section totale sera composée de deux portions d'Ellipsimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Cependant puisque par la proposition précedente la section solide peut être un cycloïmbre, dans le cas où le cylindre, qui en pénetre un plus grand, est scalene, il peut aussi arriver que la section totale soit un *Cicloïmbre composé.*

137. Quelque soit la section, si l'on veut trouver l'ordonnée commune aux deux courbes à laquelle elles se terminent réciproquement à leur angle d'inflexion, il n'y a qu'à mener du centre C de la section circulaire du cylindre *d*VD*u*, la figure CF perpendiculaire sur l'axe *x*X, laquelle coupera les côtez du cylindre HL en E & F; sur EF comme diametre, ayant fait le demi cercle ETF, on élevera du point D, section des lignes AB, a*b*, la perpendiculaire DT; cette ligne qu'il faut imaginer couchée sur les côtez du grand cylindre, parallalement à son axe, sera l'ordonnée que l'on cherche; car le point T & son opposé au diametre, passant par l'axe *x*X du cylindre HL, seront à sa circonference, puisque ce cercle ETF est égal à la base, & que la ligne DT est à la surface du grand cylindre, quoique par la nécessité de joindre dans la figure les plans qu'on suppose perpendiculaires entr'eux, elle ne paroisse pas dans sa situation, qui seroit celle de DH, & son double en GH.

Corollaire.

138. On tirera la même conséquence de la difference des inflexions du milieu de l'Ellipsimbre composée, que dans la proposition 11. c'est-à-dire, que plus & moins le cylindre HL entrera dans l'autre, plus l'in-

flexion sera sensible, que plus le point D approchera de l'axe, moins elle sera sensible, & que depuis le point D vers F elle fera un angle saillant, & au contraire depuis D vers E elle fera un angle rentrant.

Application à l'usage.

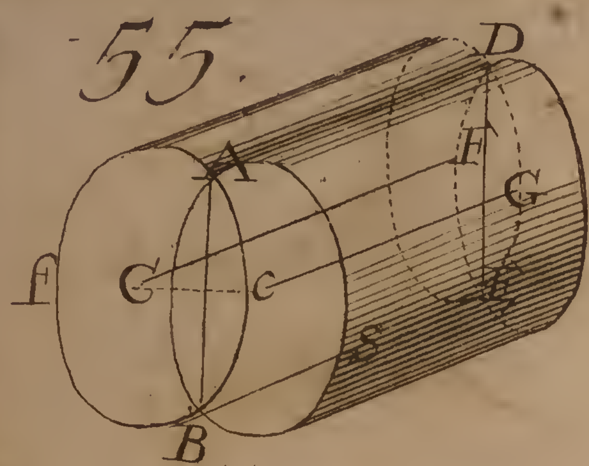
139. On voit par cette proposition quelle est la Courbe de l'enfourchement d'une Tour ronde, qui rachete un berceau de niveau, ou rempant; & qu'il n'est pas possible de supprimer les murs de la tour sous cet enfourchement, lorsqu'elle pénetre le berceau au-delà de la clef, parce que l'angle d'inflexion devenant saillant, les *Contreclefs* de l'arcade, qui devroient supporter la tour, pousseroient au vuide au contraire en-deça de la clef, il sera facile de faire porter la tour par une Arcade; parce que l'angle d'inflexion est rentrant, & fait l'effet d'une voute en tiers-point.

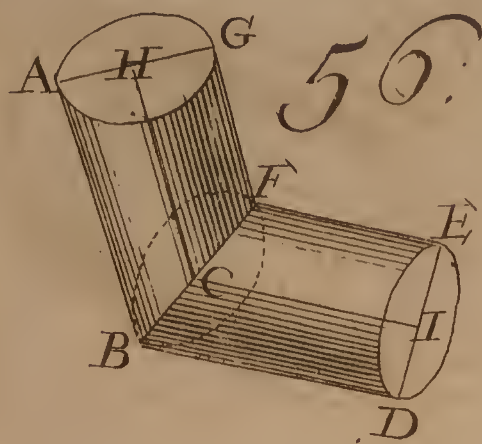
REMARQUE.

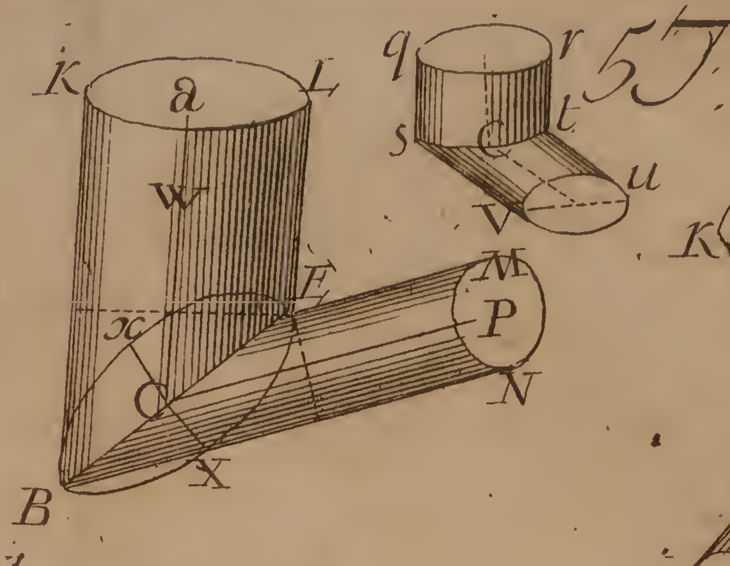
140. Il est constant que les sections des cylindres entr'eux sont les plus nécessaires à connoître; parce que les plus communes de toutes les voutes sont les berceaux circulaires, ou surhaussez ou surbaissez; or quelques soient les ceintres de leurs *Arcs-Droits*, c'est-à-dire, des sections perpendiculaires à leurs axes, tant qu'ils ne varieront que du cercle à l'Ellipse, ou d'une Ellipse à une autre plus ou moins alongée, il n'arrivera aucun changement à la nature des courbes, qui se feront par les intersections de leurs surfaces, puisque les cylindres surhausez ou surbaissez sont de vrais cylindres, lesquels, au lieu d'être Droits, sont scalenes; de sorte qu'ils peuvent toujours être coupez, de maniere qu'ils auront pour base un cercle, comme nous l'avons dit dans les sections cylindriques, ce qu'il n'est pas inutile de répeter, afin qu'on y fasse attention dans la pratique.

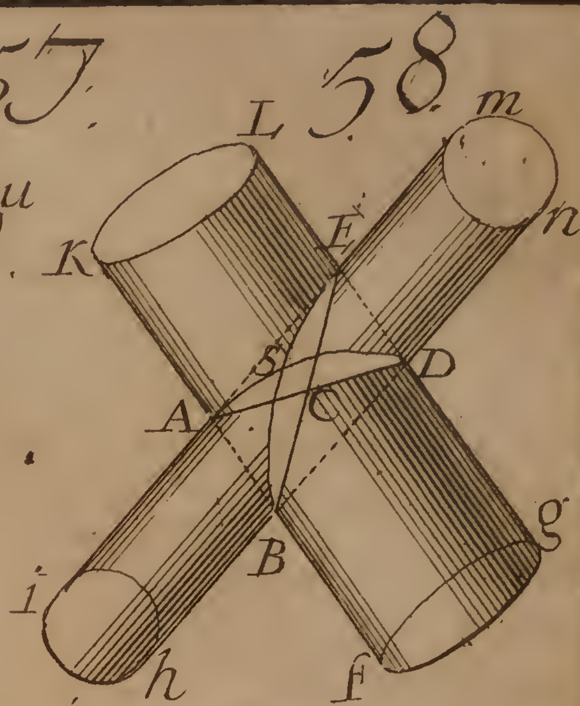
Des Sections faites par la rencontre des Surfaces des Cônes & des Cylindres qui se pénetrent.

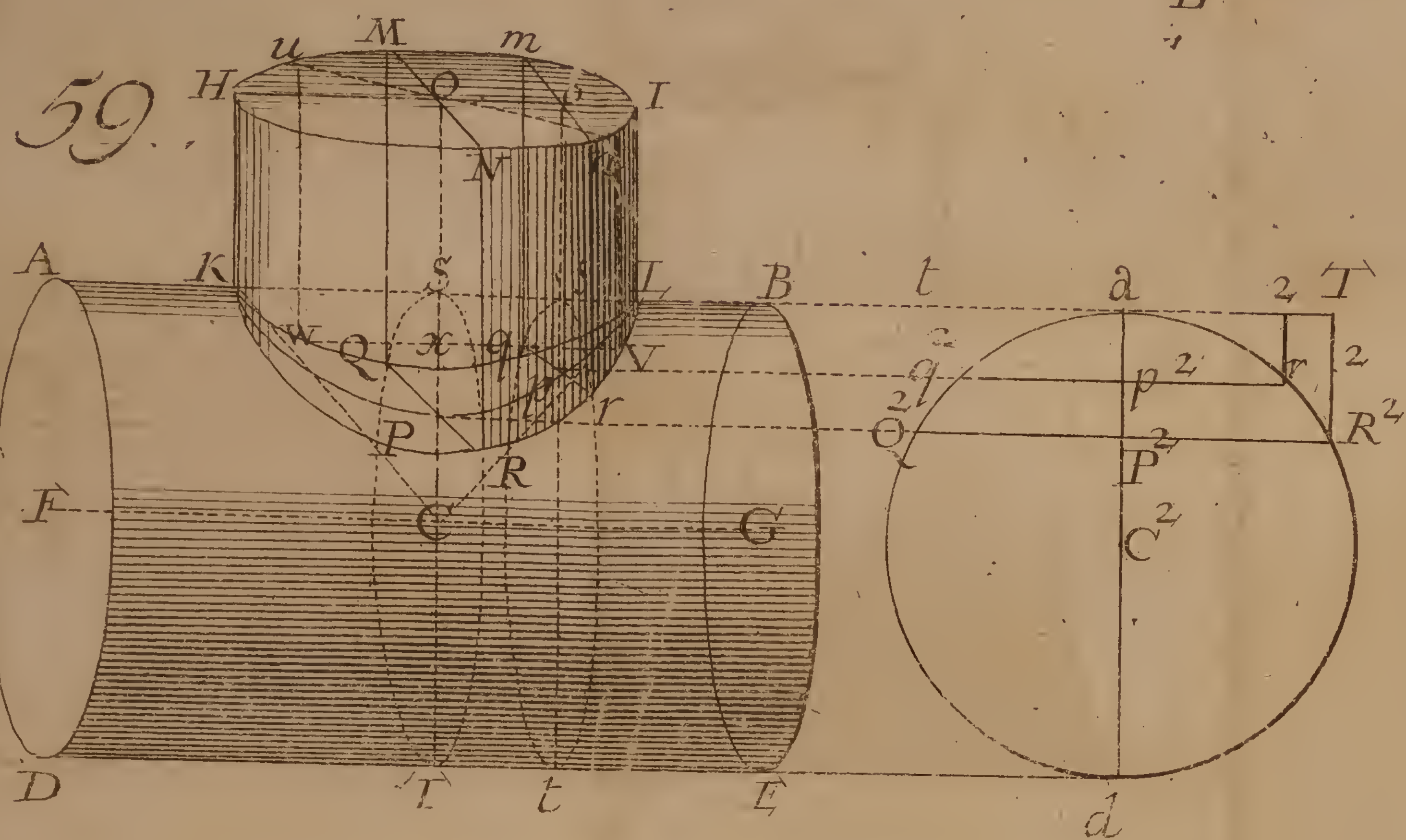
141. Il semble au premier abord, que soit que le cylindre pénetre le cône, ou que le cône pénetre le cylindre, il en doit résulter une même section à leur surface. Cependant nous y ferons voir de la difference; dans le premier cas le cône embrasse le cylindre, & dans le second le cylindre embrasse le cône; or quoiqu'un cône d'une grandeur donnée n'embrasse pas le

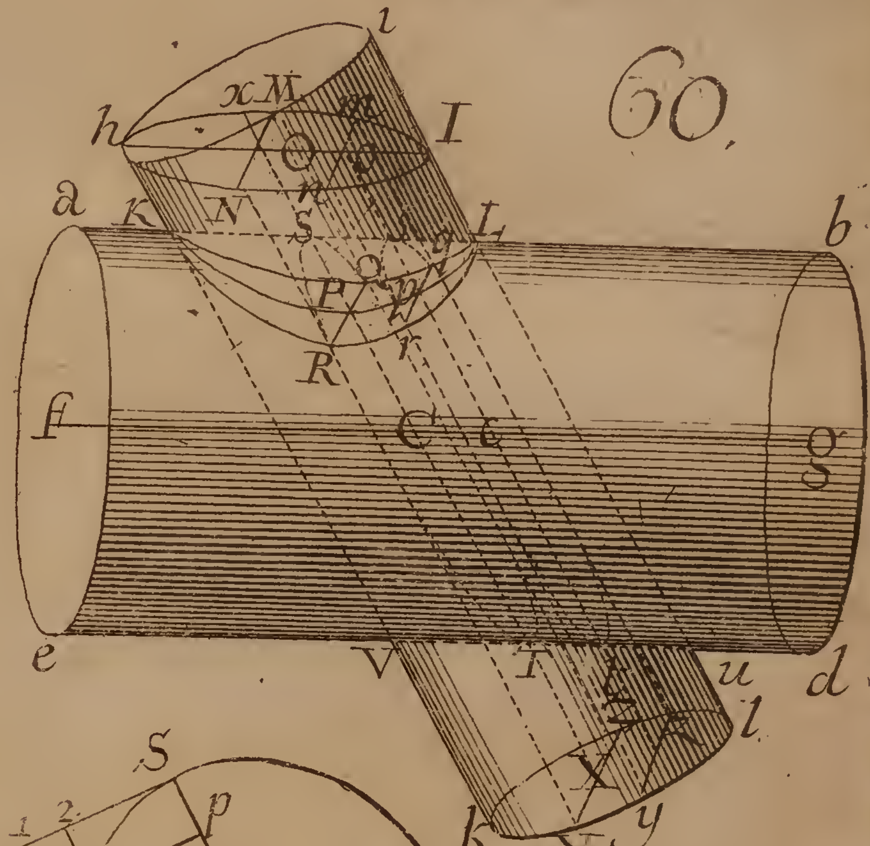

55.

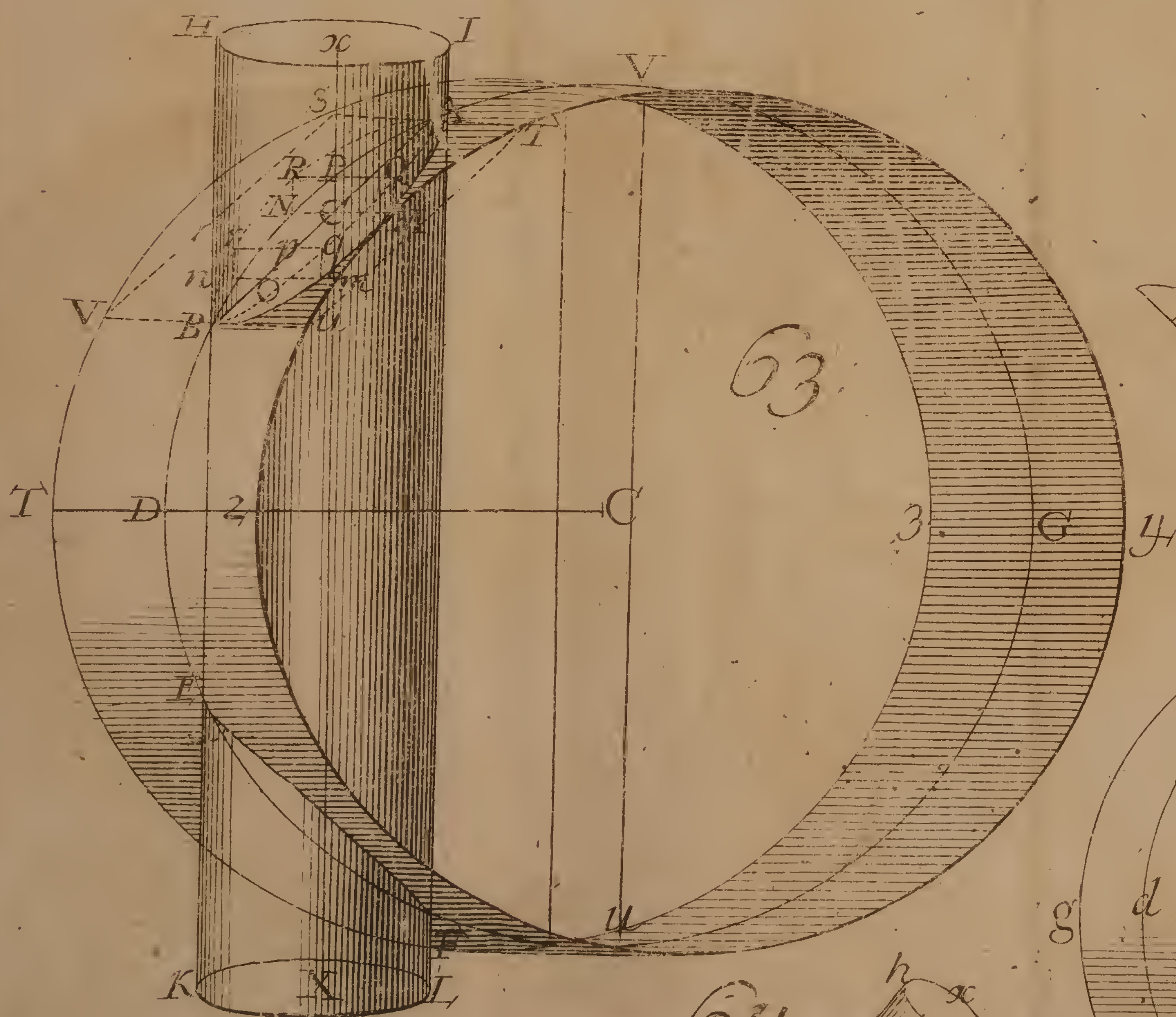

56.

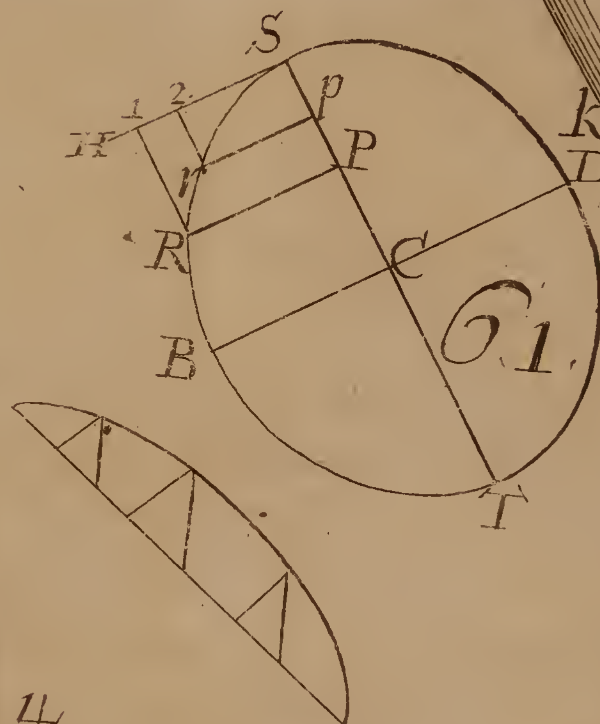

57.

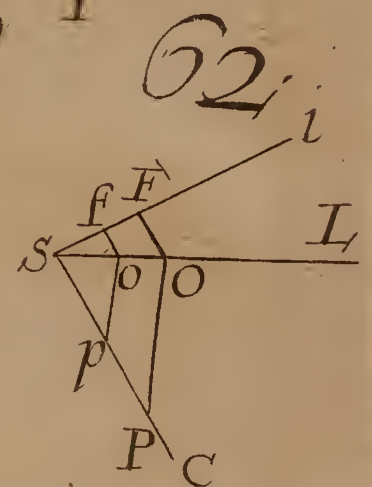

58.

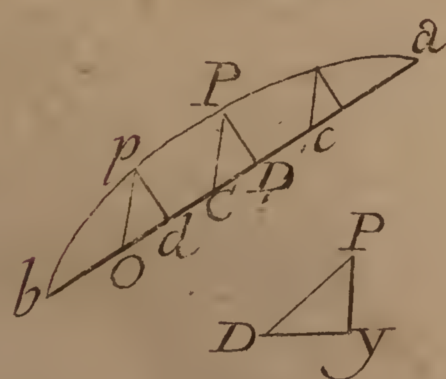

59.

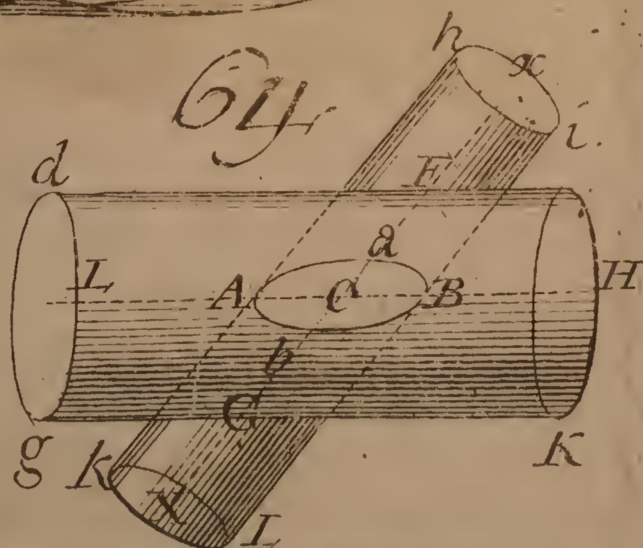

60.

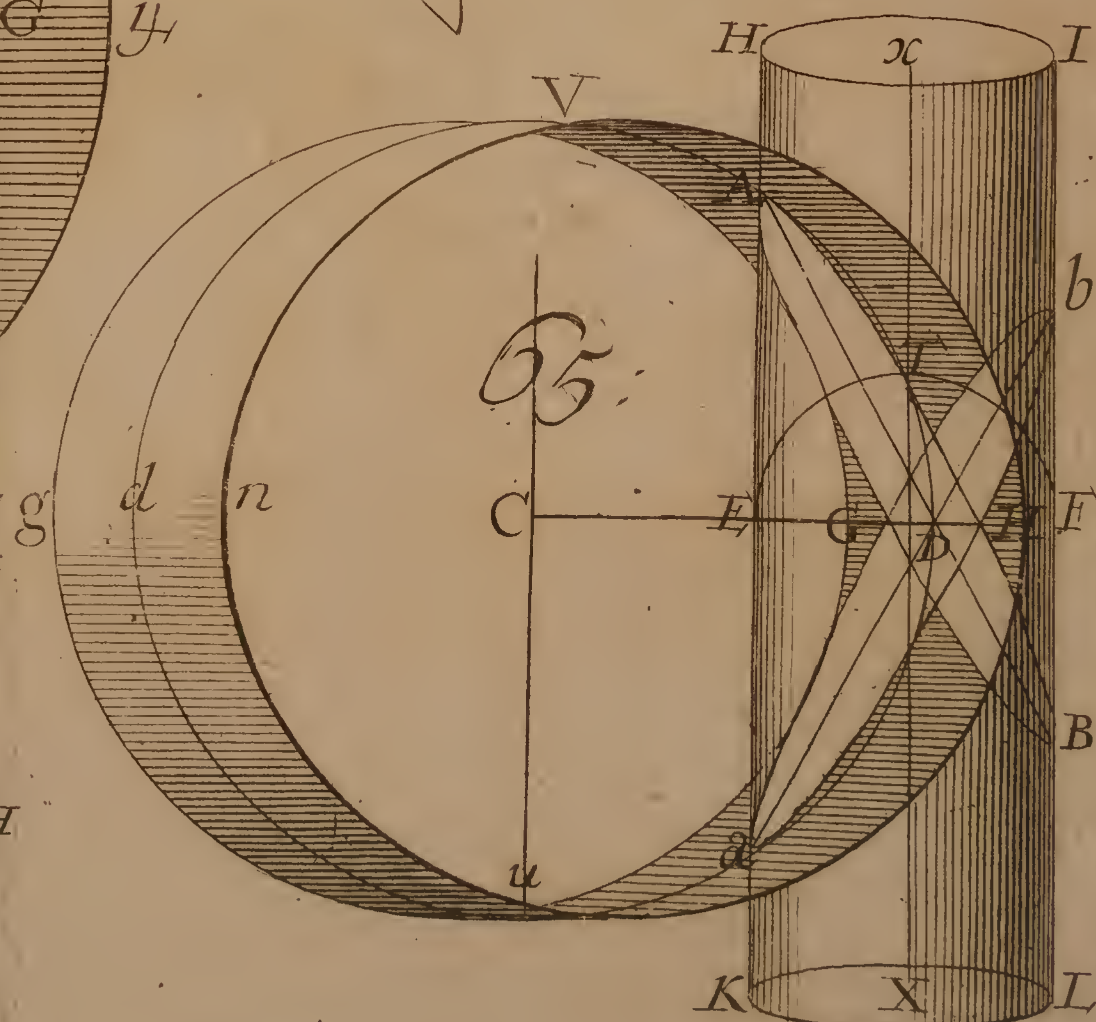

63.


61.


62.




64.


65.

cylindre donné ; il eſt cenſé le faire, lorſqu'étant prolongé il le peut ; ainſi les deux axes de ces corps étant paralleles, quoique le cylindre ne coupe qu'une partie du cône, il ne faut pas mettre en queſtion lequel des deux embraſſe l'autre ; car il eſt évident qu'en prolongeant les côtez du cône il s'élargira de maniere, qu'il envelopera le cylindre auſſi prolongé, & la ſection ſera toujours la même, quoiqu'avant la prolongation elle fût moindre, parce qu'elle étoit imparfaite. Il n'en eſt pas de même, lorſque les axes ſe croiſent ſans ſe rencontrer, la ſection eſt tellement mutilée, que le prolongement du cône ne peut la rendre plus complete.

THEOREME XXII.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces d'un Cône & d'un Cylindre Droits, ou d'un Cône & d'un Cylindre Scalenes de même obliquité ſur leurs baſes, dont les Axes ſe confondent, eſt un cercle.

La démonſtration de cette propoſition eſt ſi aiſée qu'elle ſe préſente d'elle-même ; car puiſque les ſections de ces corps coupez par des plans paralleles à leurs baſes, ſont des cercles, il eſt évident que les ſections FG (*Fig. 66.*) & fg (*Fig. 67.*) ſont paralleles aux baſes AB, *Fig. 66.*
& ab ; car les corps étant coupez par un plan paſſant par leurs axes *& 67.*
communs SC, KC, les triangles ADF, BEG ſeront égaux ; par conſéquent F & G équidiſtans de D & E, (*Fig. 66.*) & dans la fig. 67. à cauſe des paralleles hd, ie on aura $be : eg :: bc : cs$, & a$d : df ::$ a$c : cs$, mais a$c = cb$, & a$d = be$, donc $eg : cs :: df : cs$, donc $eg = df$, par conſéquent fg eſt parallele à ab, & la ſection faite par un plan paſſant par les points communs f & g, qui ſera un cercle dans le cylindre, comme dans le cône, ſera commune aux deux ſurfaces, dont elle ſera l'interſection à leur rencontre. On peut démontrer la même choſe en ſuppoſant le point R à la circonference de la ſection; car on connoîtra (*Fig. 66.*) que les trois triangles rectangles en L, SLF, SLG, SLR, qui ont le côté SL commun, & les angles en S égaux, ſont égaux en tout, par conſéquent que les trois lignes LF, LR, LG ſont égales, & dans un même plan* & les rayons d'un même cercle ; & [*Fig.* 67.] **Eucl. l. 11.*
à cauſe de l'égalité des rayons de la baſe ca, cP, cb, & des triangles *p. 5.*
ſemblables acs, Fls ; Pcs, Rls ; bcs, gls les lignes lf, lR, lg ſont égales, & dans un même plan ; par conſéquent rayons d'un même cercle comme au cône, & au cylindre, *ce qu'il falloit démontrer.*

142. Quoique les axes du cône & du cylindre ſe confondent dans leur pénetration, ſi l'un de ces deux corps eſt Droit & l'autre ſcalene, comme ſi [*Fig.* 68.] le cylindre au étoit Droit ſur la baſe circulaire de, *Fig. 68.*

la section ne seroit plus un cercle, mais une autre courbe à double courbure.

Application à l'usage.

143. On voit par cette proposition que le ceintre de l'Ebrasement d'une porte étant de même nature que celui de la porte circulaire, Droit ou biais par tête, & en plein ceintre, l'arête d'enfourchement de la partie qui fait berceau avec celle qui est ébrasée, est un cercle, c'est-à-dire, une portion de cercle égale à celle de la porte, qui peut être d'une moitié ou d'un arc moindre, comme à celles qui sont simplement Bombées.

THEOREME XXIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Cylindre & d'un Cône, qui ne sont pas de même nature, c'est-à-dire, dont l'un est Droit & l'autre Scalene, & dont les Axes se confondent, est une Ellipsoïdimbre.

Fig. 68. Soit [*Fig. 68.*] le cône BSA scalene, pénetré par le cylindre Droit DE*ed*, dont l'axe *x*X est en partie commun avec l'axe SC du cône. Ayant supposé un plan passant par ces axes, qui fera deux sections differentes, sçavoir, un triangle BSA dans le cône, est un parallelograme DE*de* dans le cylindre, qui se couperont aux points *b* & a; on reconnoîtra que ces deux points sont communs aux deux surfaces, par conséquent à la circonference de la section: On supposera ensuite un second plan perpendiculaire au premier, passant par *b*a, lequel fera deux sections differentes, sçavoir un cercle dans le cône scalene; parce que nous avons démontré que *b*a étoit parallele à la base BA [au Theorême précedent] & une Ellipse dans le cylindre, qu'il coupe obliquement, lesquelles figures soient représentées par leurs moitiez *bg*a, demi cercle & *bfa* demi Ellipse, ayant pris un point P à volonté sur le diametre commun *b*a, on abaissera une perpendiculaire P*g*, sur ce diametre, laquelle coupant le cercle & l'Ellipse, donnera les ordonnées de l'un & de l'autre, P*g* pour le cercle, & P*f* pour l'Ellipse. Du même point P ayant mené au sommet du cône *s* la ligne PS, & sur cette ligne une perpendiculaire. PF égale à P*f*; on prendra PF égale à P*f*; par le point F qui appartient à l'Ellipse, on fera passer une parallele à *x*X pour représenter un côté du cylindre, & par les points G & S une ligne GS, qui représentera le côté du cône, & coupera celui du cylindre en *y*, ou sera un des points de la section des deux surfaces, par ce point *y* on menera une parallele *yv* à PG, & une autre *yz* à PS, cette préparation étant faite.

A cause des triangles semblables GSP & Gyz, on aura SP : PG :: yz : zG, c'est-à-dire la distance du sommet du cône à l'ordonnée de l'Ellipse, comme la profondeur ou distance de la section solide à cette ordonnée, est à la difference des ordonnées du cercle & de la section solide, donc cette section est une *Ellipsoïdimbre*, par la quatriéme définition.

Et parce que yv est parallele à PG, le point v qui est dans le plan passant par les axes, & les *Points b* & a seront à l'axe courbe bva de l'Ellipsoïdimbre. Art. 83.

Quelque point P que l'on prenne dans l'axe, on aura toujours la même construction & la même analogie; puisque le plan ba étant perpendiculaire à celui qui passe par les axes, toutes les lignes menées du sommet du cône à la ligne ba seront perpendiculaires aux ordonnées des sections de la circulaire bga & de l'Ellipse bfa, & parce que les intervales de ces deux courbes sont toujours inégaux, les points y seront toujours inégalement éloignez du plan passant par ba, où sont les ordonnées du cercle, qui est la section cônique, de sorte que le point y se rejoindra en b & en a, si les points P sont pris en b & en a.

Application à l'usage.

144. Cette proposition fait voir que si *l'Arc-Droit* d'un berceau ou d'une porte est en plein ceintre, & qu'on lui fasse une lunette ou un ébrasement en biais, aussi en plein ceintre, l'arête d'enfourchement de l'ébrasement & du berceau sera une courbe à double courbure, de sorte que les *Aplombs*, c'est-à-dire, les verticales tirez de plusieurs de ses points, ne tomberont pas sur une ligne droite. La même chose arrivera mais en sens contraire, si l'ébrasement est surhaussé ou surbaissé & le biais du berceau en plein ceintre par tête.

THEOREME XXIV.

La Section faite par la pénetration d'un Cylindre & d'un Cône, dont les Axes se coupent obliquement, peut être dans un seul cas [exposé cy - après] une Ellipse plane.

Soit [*Fig.* 69.] le triangle BSA la section d'un cône par son axe Sc, dont la base BA est indéfiniment prolongée vers D. Soit EL le diametre de la section Elliptique, faite par un plan perpendiculaire au triangle par l'axe SC, lequel soit prolongé jusqu'à la rencontre de la base en F; ayant mené par le sommet S la ligne SD parallele à DE, qui rencontrera la base prolongée en D, si l'on fait Dx moyenne proportionelle Fig. 69.

entre BD & AD, & qu'on la place de D en x, sur le diametre de la base, le point x donnera la position du pied d'une ligne parallele à l'axe d'un cylindre, laquelle passant par le sommet du cône S, déterminera celle des côtez par les points E & L, en lui menant les paralleles Gg, Kk, je dis que la section faite par le plan passant par EL, perpendiculaire à celui qui passera par les axes du cône & du cylindre, sera l'Ellipse $ERLr$, dont EL sera le grand axe, & que cette section plane sera commune aux deux corps.

Pour le démontrer, soit pris sur le grand Axe EL un point P à volonté, par lequel ayant mené bi parallele à la base BA, qui coupera le cône aux points b & a, & le cylindre aux points g & i, sur les lignes ba & gi, comme diametres, on décrira deux demi-cercles boa, goi, qui représenteront les sections faites dans le cône & dans le cylindre, par un plan passant par P perpendiculairement au triangle par l'angle BSA. Si du point P on éleve une perpendiculaire PO, qui coupe le cercle du cône en R & celui du cylindre en O.

On démontrera que cette ligne est une ordonnée commune aux deux cercles & à l'Ellipse $ERLr$; car dans le cône à cause des triangles semblables EPb, SDB, aPL, LAF & SAD on aura les analogies suivantes;
$\left.\begin{array}{l} EP : Pb :: SD : DB \\ PL : Pa :: SD : DA \end{array}\right\}$ donc $EP \times PL : Pb \times Pa = \overline{PR}^2 :: \overline{SD}^2 : DB \times DA$. Dans le cylindre à cause des triangles semblables EPg, iPL, SDx, on aura encore les analogies suivantes ; $\left.\begin{array}{l} EP : Pg :: SD : Dx \\ PL : Pi :: SD : Dx \end{array}\right\}$ donc $EP \times PL : Pg \times Pi = \overline{PO}^2 :: \overline{SD}^2 : \overline{Dx}^2$, ou ce qui est la même chose à $DB \times DA$. Donc les lignes PO & PR ont même rapport aux lignes PE, PL; donc elles sont égales & se confondent en une terminée en P & en O ou R, qui deviennent un même point; & puisqu'on peut prouver la même chose de tous les points P, pris à volonté, il suit que l'Ellipse du cylindre est la même que celle du cône; puisque les ordonnées à l'axe EL seront toujours communes. Donc la section d'un cône & d'un cylindre dont les axes se coupent obliquement, peut être une Ellipse plane, *ce qu'il falloit démontrer*.

Hors de ce cas la section faite par la pénetration de ces corps ne peut être une figure plane, comme nous le démontrerons dans la suite.

Corollaire.

145. Il suit de cette proposition qu'un cône BSA étant donné & une

Ellipse ERLr dans ce cône, il eſt facile de trouver le cylindre qui a pour ſection la même Ellipse; puiſqu'ayant trouvé une troiſiéme proportionelle aux lignes BD & DA, on aura ſur la baſe du cône un point x, lequel avec le ſommet S détermine la poſition de l'axe du cône, & les points E & L celle des côtez.

Nous donnerons l'inverſe dans les Problêmes, c'eſt-à-dire, la maniere de trouver le cône, auquel convient l'Ellipſe de la ſection d'un cylindre donné.

Application à l'uſage.

146. Cette propoſition fait voir qu'il faut examiner quelle eſt la poſition du cylindre dans le cône, lorſque les axes ſe coupent obliquement, pour reconnoître ſi la ſection eſt plane ou ſolide, comme elle eſt preſque toujours. Et dans la pratique elle peut être appliquée à la conſtruction d'une arriere-vouſſure cônique ou ébraſement biais, rachêtant un ceintre ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, dont la direction du milieu ſe croiſe avec celle de l'ébraſement.

THEOREME XXV.

La Section faite par la rencontre des ſurfaces d'un cône & d'un Cylindre, qui le pénetre, enſorte que les Axes de ces deux Corps ſe croiſent, ou ſoient paralleles entr'eux, eſt une Ellipſimbre.

Ce Theorême renferme deux cas, & les comprendroit tous en le joignant aux précedens, s'il comprenoit celui où les axes ne ſe rencontrent pas ſans être paralleles; mais il eſt ſi compoſé que nous le laiſſons à la recherche de quelque bon Mathematicien. Cependant quoique ce défaut rende notre Theorie un peu imparfaite, la pratique ne s'en reſſentira pas; parce que nous trouverons une maniere Geometrique de trouver autant de points qu'on voudra, de la courbe de cette ſection, quoiqu'elle nous ſoit inconnuë en general, on ne perd en cela qu'une formule generale d'Algebre, qui embraſſe tous les cas.

Premier cas, où les Axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement.

Soit [*Fig.* 70.] ASB le triangle par l'axe du cône, & IGHK le parallelograme par l'axe du cylindre, ou un autre plan CDFS paſſant par l'axe SC du cône, & par celui du cylindre xX, ce dernier plan coupera la ſurface du cône ſuivant une ligne droite SP, ſuivant laquelle un troiſiéme plan perpendiculaire au plan CF ſera ſuppoſé couper le cylindre & toucher le cône, de ſorte qu'il ne fera qu'une ſection dans un *Fig.* 70.

des corps, ſçavoir une Ellipſe dans le cylindre, qu'il coupe obliquement en E*m*LM, dont EL ſera le grand axe, lequel eſt dans la ligne SP à la ſurface du cône, auquel cette Ellipſe étant tangente, ſera toute au dehors.

Si par les points M & *m*, N & *n*, pris à volonté ſur la circonference de cette Ellipſe, on mene de lignes QM, *q*N paralleles à l'axe du cylindre *x*X, prolongées juſqu'à la rencontre de la ſurface du cône, aux points Y & *y*, ces points ſeront à la circonference de la ſection ſolide, auſſi bien que les points E & L; de ſorte que la ligne E*y*YL ſera au contour de la ſection ſolide, & ſi par les mêmes points M & N, ou ceux qu'ils ont produit à la baſe du cylindre Q, R, *qr*, on mene des ordonnées au diametre GH, ou EL, par leſquelles on ſuppoſe des plans YR, *yr*, qui coupent le cylindre & le cône, ils feront deux ſections differentes, ſçavoir des parallelogrames *yr* & YR, dans le cylindre, & des cercles ou des Ellipſes dans le cône, dont YTV & *ytu* ſeront des arcs; mais parce que les ordonnées M*m* & N*n* ſont tangentes à ces courbes, que les points M & *m* ſont également éloignez du point d'attouchement T & *t*, de même que N & *n*, & que les lignes YM, *y*N, qui ſont les côtez du cylindre, ſont paralleles entr'elles; il ſuit que les ordonnées de la ſection ſolide YV & *yu* ſont paralleles & égales aux ordonnées à l'axe EL de l'Ellipſe plane EML*m*, donc la courbe EYLV eſt une Ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Second cas, où les Axes ſont paralleles entr'eux.

Fig. 71. Soit AS*b* le triangle par l'axe du cône, & un plan SFPC paſſant par l'axe X*x* du cylindre GH, ce plan fera deux ſections differentes, ſçavoir un parallelograme GH*hg* dans le cylindre, & un triangle *a*SP dans le cône, dont SP ſera un côté, & par conſéquent à ſa ſurface. Si l'on ſuppoſe un troiſiéme plan, qui lui ſoit perpendiculaire & tangent au cône, ſuivant la même ligne SP, il fera par ſa ſection dans le cylindre une Ellipſe EML*m*, dont l'axe EL ſera partie de cette ligne SP, laquelle Ellipſe ſera toute hors du cône, & dans le cylindre. Si enſuite on prend à la circonference des points M & N à volonté, & que par ces points on mene des paralleles à l'axe *x*X, comme MY, N*y*, elles rencontreront la ſurface du cône en quelques points Y & *y*, qui ſeront à la circonference de la ſection ſolide, puiſqu'ils ſont communs à la ſurface du cône & à celle du cylindre, dont ces lignes ſont les côtez; donc la ligne courbe E*y*YL eſt celle de la ſection ſolide.

Il reſte à démontrer que les ordonnées à l'axe courbe de cette courbe ſeront égales à celles de l'Ellipſe à l'axe EL, ce qui eſt facile par l'application de la démonſtration précedente, dont celle-ci n'eſt qu'une répeti-

répetition ; car les plans paralleles à l'axe du cylindre paſſant par les ordonnées de l'Ellipſe plane *Mm*, *Nn* font un parallelograme dans le cylindre, & des hyperboles ſemblables dans le cône, dont les arcs YTV & *ytu* ſont touchez aux points T & *t* par les ordonnées de l'Ellipſe plane *Mm* & *Nn*, & les points M & *m*, N & *n*, également diſtans des points T & *t*; donc par l'Article 39. les lignes MY, *m*V coupent l'hyperbole à des diſtances égales de la tangente MT*m*; par conſéquent les lignes YV, & *yu* ſont paralleles aux lignes *Mm* & *Nn*, & elles leur ſont égales, puiſqu'elles ſont entre mêmes paralleles, qui ſont les côtez du cylindre MY, *m*V; donc la ſection eſt une Ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

147. Quant au troiſiéme cas où les axes ne ſont pas paralleles, & ne ſe coupent pas; quoique nous ne déterminions pas la figure qui réſulte de la rencontre des ſurfaces du cône & du cylindre par un Theorême general, nous donnerons dans les Problêmes la maniere de trouver autant de points que l'on voudra de cette courbe, en coupant le cône & le cylindre par des plans paralleles entr'eux; mais parce que l'inclinaiſon de ces plans peut changer quatre fois la courbe de la ſection du cône, & deux fois celle du cylindre, la rencontre des ſurfaces des deux corps ſera dans l'interſection de differentes ſections; quelquefois d'une parabole & d'une Ellipſe, d'une hyperbole & d'un cercle, de deux Ellipſes ou de deux cercles, de ſorte que la combinaiſon de ces ſections devient fort compoſée, d'où réſulte une ſi grande varieté, que je laiſſe à quelque Sçavant l'invention d'une formule algebrique, qui donne la ſolution de tous les cas de cette propoſition.

Corollaire.

148. Il ſuit de la pénetration du cylindre dans le cône, que lorſque leurs axes ſont perpendiculaires entr'eux les ſections oppoſées ſont égales, & que lorſqu'ils ſont obliques elles ſont inégales. Celle qui eſt plus près du ſommet du cône eſt la plus petite, & ſon oppoſée la plus près de la baſe, la plus grande ; cette obſervation eſt encore vraye, lorſque les axes ne ſe coupent pas, & qu'ils ne ſont pas paralleles.

Application à l'Uſage.

149. Cette propoſition fait connoître quelle eſt la Courbe de l'enfourchement d'une voute en canoniere, percée de lunettes en berceau, comme il peut arriver au grand Eſcalier du Vatican à Rome, ou cel-

le d'un Ebrasement fait au bout d'un berceau, dont la naissance ne seroit pas de niveau avec celle du plein ceintre de l'Ebrasement.

THEOREME XXVI.

La Section faite par la pénetration d'un Cône dans un Cylindre est une Ellipsoïdimbre.

Un cône peut pénetrer un cylindre de six manieres.

1.° Lorsque l'axe du cône coupe perpendiculairement celui du cylindre.

2.° Lorsqu'il le coupe obliquement.

3°. Lorsque l'axe du cône ne rencontre pas celui du cylindre, mais qu'il tombe perpendiculairement sur son côté, & entre dans le cylindre de toute la circonference de son contour.

4.° Lorsque, dans les mêmes circonstances, son axe tombe obliquement sur les côtez du cylindre.

5.° Lorsqu'il ne pénetre le cylindre que d'une partie de sa circonference, & que son axe tombe perpendiculairement sur le côté du cylindre.

6.° Enfin lorsqu'il n'y a qu'une partie de son contour qui entre dans le cylindre obliquement.

Dans tous ces cas la section est une Ellipsoïdimbre de même espece, que celle dont nous avons parlé ci-devant au Theorême XXIII.

Fig. 72. Pour le premier & second cas. Soit un cylindre D*d* F*f* (*Fig.* 72.) pénetré par un cône BAS, dont l'axe SC coupe celui du cylindre KX perpendiculairement ou obliquement. Si l'on suppose un plan passant par ces deux axes, il coupera le cylindre suivant une ligne droite EL, dont les points E & L seront communs aux deux surfaces, étant à l'intersection du triangle par l'axe fait dans le cône, & du parallelograme par l'axe du cylindre, à la surface duquel sera la ligne EL. Si l'on suppose un second plan tangent au cylindre suivant la ligne EL, que nous supposons oblique à l'axe CS, ce plan fera dans le cône une section Elliptique, dont EL sera le grand axe : si ensuite l'on prend à sa circonference autant de points que l'on voudra à volonté, comme M*m*, N*n*, par lesquels on mêne des lignes droites au sommet S du

cône, ces lignes rencontreront la surface du cylindre en quelques points Y & *y*, lesquels seront communs aux deux surfaces, puisqu'ils sont à l'intersection des côtez du cône & du cylindre; donc la courbe E*y*YL est celle de la section solide.

Si par les mêmes points M & N on tire des ordonnées à l'axe EL, elles toucheront le cylindre aux points T & *t*, & seront perpendiculaires aux lignes TS, *t*S, & les plans qui passeront par ces ordonnées feront dans le cône des triangles SM*m*, SN*n*, & des cercles ou des Ellipses dans le cylindre, dont YTV, & *ytu* seront des arcs, & les ordonnées YV & *yu* de la section solide, seront leurs cordes; il est visible qu'à la section solide la plus près de la base, ces cordes seront plus petites que les ordonnées de l'Ellipse M*m* & N*n*, puisque les lignes MV, N*u*, *m*Y, *ny* sont convergentes, en ce qu'elles tendent toutes au sommet S; or si l'on prend leur difference en tirant les lignes *h*Y, HV, & *yo* paralleles à l'axe KX on aura des triangles semblables ST*m*, Y*hm*, & S*tn*, *yon*, dans lesquels on aura les analogies suivantes ST : T*m* :: Y*h* : *hm*, & S*t* : *tn* :: *yo* : *on*; c'est-à-dire, que la distance du sommet du cône à l'ordonnée de l'Ellipse plane est à cette ordonnée, comme la profondeur de la section, ou distance à l'ordonnée de l'Ellipse plane, est à la difference de cette ordonnée avec celle de la section solide; donc * la courbe E*y*YL est une Ellipsoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 79.

150. Il paroît inutile de répeter ici ce que nous avons dit de pareilles sections, que les opposées avoient leur axe courbe, tourné en sens contraire, de sorte, que si dans l'une la difference des ordonnées de la section solide & de l'Ellipse plane est un excès, dans l'autre elle sera un défaut, sans que le rapports des analogies soit changé pour cela.

On sçait encore que le même rapport de cette difference ne peut être appliqué à toutes les ordonnées, mais chacune d'entr'elles a un rapport different à la correspondante; car il est clair que le rapport de *on* à *tn* est bien plus petit que celui de *hm* à T*m*, la raison est que si les axes du cône & du cylindre se coupent à angle droit, les triangles S*tn*, ST*m* sont de même hauteur, ayant leurs sommets en S & leurs bases inégales, *tn* étant plus petit que T*m*, & si les axes se coupent obliquement, ces differences de rapport subsisteront encore comme nous l'avons démontré au Theorême XXV. ce qui comprend le second cas.

151. Dans le troisiéme cas de cette proposition, si l'axe du cône

ne rencontre pas celui du cylindre, mais qu'il tombe perpendiculairement ſur ſon côté, c'eſt-à-dire ſur une ligne priſe à la ſurface du cylindre parallele à ſon axe: je dis que la courbe eſt encore la même.

Fig. 73. Soit (*Fig.* 73.) le triangle *b*Sa, qui pénetre le cylindre G*gd*D, dont l'axe S C ne rencontre pas celui du cylindre KX, comme on le voit par le profil, où *s* C² ne paſſe pas par le centre *x* du cercle 2*el*, mais qui tombe perpendiculairement ſur le côté du cône, comme ſi ST eſt perpendiculaire ſur HI, ſi l'on imagine un plan SEL, coupant l'axe du cylindre perpendiculairement à la ligne HI, les points E & L, qui ſont à l'interſection des côtez du cylindre Q*q*, R*r*, & de ceux du cône SE, SL ſeront communs aux deux ſurfaces, & par conſéquent à la circonference de la ſection ſolide. Si enſuite on ſuppoſe un ſecond plan, paſſant par ces deux points parallelement à l'axe KX du cylindre, il ſera deux ſections, l'une dans le cylindre, qui ſera un parallelograme QR*rq*, & une Ellipſe EML*m* dans le cône, qu'il coupe obliquement; parce que l'axe SC du cône ne paſſe pas par le centre du cercle, qui eſt la ſection faite dans le cylindre par le plan ESL, où il faut remarquer, que dans la figure on a repréſenté ce plan en perſpective, enſorte qu'il n'eſt pas perpendiculaire à HI; pour éviter la confuſion des lignes, & faire voir l'arc ETL, partie de ce cercle, qui auroit été confondu en une ligne droite.

Si ſuivant notre méthode on mene des ordonnées M*m*, N*n* à l'axe EL de l'Ellipſe, & que par les points de ſa circonference MN, *nm*, qui ſont dans le cylindre, on tire des lignes au ſommet du cône S, ces lignes ſeront à ſa ſurface & couperont celle du cylindre (au deſſous de laquelle les points MN, *mn* ſont enfoncez) en quelques points comme *y*Y, V & *u*, leſquels ſeront à la circonference de la ſection ſolide, comme il eſt évident, puiſqu'ils ſont à l'interſection des côtez du cône & de ceux du cylindre; donc la ligne qui paſſera par les points E*y*YL V*u* ſera la courbe de la circonference de la ſection ſolide.

Maintenant pour trouver le rapport des ordonnées de cette ſection avec celles de l'Ellipſe plane EML*m*, qui eſt la ſection oblique du cône par un plan, il n'y a qu'à mener des paralleles aux lignes SP & S*p* par les points Y & *y*, leſquelles retrancheront des ordonnées de l'Ellipſe les differences M*h*, N*o* de leurs excès ſur celle de la ſection ſolide Y*x*, *yz*, & donneront les analogies ſuivantes, à cauſe des triangles ſemblables SPM, Y*h*M & S*p*N, *yo*N, qu'on a répeté à côté de la figure, pour éviter la confuſion des lignes S P : P M :: Y*h* : *h*M & S*p* : *p*N :: *yo* : *o*N; donc la courbe E*y*YL eſt une Ellipſoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

152. On voit ici que la difference des ordonnées de la ſection ſolide à l'Ellipſe eſt en défaut, comme l'on a vû dans les exemples des ſections précedentes, dans la partie la plus près de la baſe (*Fig.* 72.) ce qui ſemble ſe contrarier, puiſque les ſections oppoſées ſont tournées en ſens contraire; mais il faut remarquer que dans le cas précedent les points E & L ſont conſiderez poſez ſuivant la longueur du cylindre, enſorte que le plan par la ligne EL eſt tangent, par conſéquent au dehors du cylindre, & de la ſection ſolide; & qu'ici au contraire le plan paſſant par EL coupe le cylindre & ſe trouve au dedans de la ſection, de ſorte que l'Ellipſe plane à laquelle on la compare, étant differemment ſituée, il n'eſt pas étonnant qu'elle donne des analogies de défaut, quoique la ſection ſoit plus près du ſommet, où elle donneroit de l'excès; ſi on l'avoit ſituée comme à la figure 72. en examinant la ſection, qui paſſeroit par *e*T*l* du profil. Au reſte les rapports ſont toujours les mêmes dans chaque plan paſſant par les ordonnées des deux ſections & le ſommet du cône. La diſtance de ce ſommet à l'ordonnée de la ſection plane eſt toujours à cette ordonnée, comme la profondeur de la ſection ſolide eſt à la difference des ordonnées des deux ſections par excès ou par défaut.

Il eſt aiſé de voir les differences qui peuvent arriver à ces Courbes dans les cônes ſcalenes, où les ſections planes que nous avons conſideré comme des Ellipſes, peuvent être des cercles.

153. *Quatriéme cas.* Où l'axe du cône tombe obliquement ſur les côtez du cylindre, il n'y aura aucune difference de ſection, toute celle qui en peut réſulter, c'eſt qu'il peut arriver que les diametres EL & M*m* deviennent égaux, & que la ſection ſoit une eſpece de cicloïmbre alteré, pour lequel nous n'avons pas fixé de nom.

154. Enfin au cinquiéme & au ſixiéme cas, ſi l'axe du cône tombe perpendiculairement ou obliquement ſur le côté du cylindre, & que le cône ne le pénetre que d'une partie de ſa circonference, la ſection ſera compoſée de deux portions de courbes, l'une plus grande que l'autre; parce que celle qui approchera du ſommet ſera plus petite que celle qui ſera plus près de la baſe, comme nous l'avons déja remarqué, & ces courbes feront entr'elles deux angles d'inflexion, plus ou moins rentrans, ſelon que la pénetration du cône dans le cylindre ſera plus ou moins profonde; car ſi un de ces côtez touche celui du cylindre, elles ſeront toutes les deux fermées & ſe toucheront en un point, comme nous l'avons dit de toutes les autres ſections

composées, ce qui ne mérite pas de répetition, avec cette difference que celles-ci ne peuvent pas être égales, quand même les deux côtez du triangle par l'axe du cône toucheroient le cylindre. Et si enfin ces deux côtez du cône s'élargissent, de sorte qu'ils soient tous les deux hors du cylindre, la section change de nature, & retombe dans le cas du Theorême précedent, où le cône embrasse le cylindre; car il s'agit alors de considerer la pénetration du cylindre dans le cône, & non pas celle du cône dans le cylindre, dont nous avons fait la distinction au commencement de ce Chapitre.

Application à l'usage.

155. Cette proposition fait connoître quelle est la Courbe de l'arête d'enfourchement de toutes sortes de lunettes ébrasées dans des berceaux, soit qu'elles ayent leurs naissances de niveau avec celle du berceau, & qu'elles soient Droites, comme au premier cas; soit qu'elles soient biaises comme au second; soit que leurs naissances soient au dessus ou au dessous de celle du berceau, comme dans le troisiéme & quatriéme cas, ce qui peut souvent arriver; soit enfin que la lunette fût prise en maniere d'Abajour, en partie hors du berceau, ce qui ne peut guères arriver, à moins qu'on ne voulût le faire exprès par caprice, ou au bout d'un berceau, comme on en voit aux Souterrains des nouvelles Fortifications de Manheim dans le Palatinat.

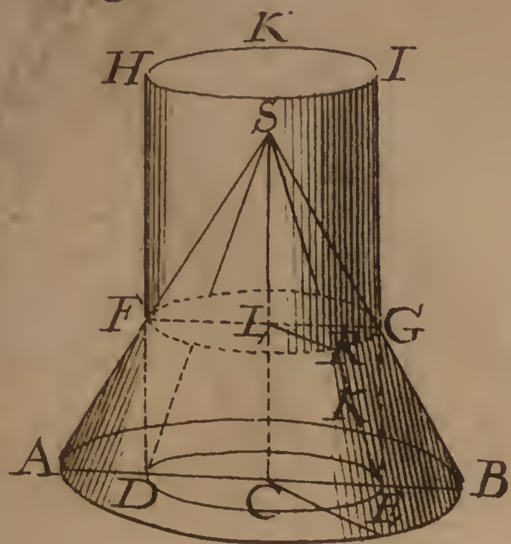
Fig. 74. La figure 74. fait voir l'effet du cône, qui embrasse le cylindre, ensorte que les deux sections se raprochent, tellement que si le cylindre s'écartoit encore un peu plus du milieu du cône, elles n'en feroient plus qu'une composée.

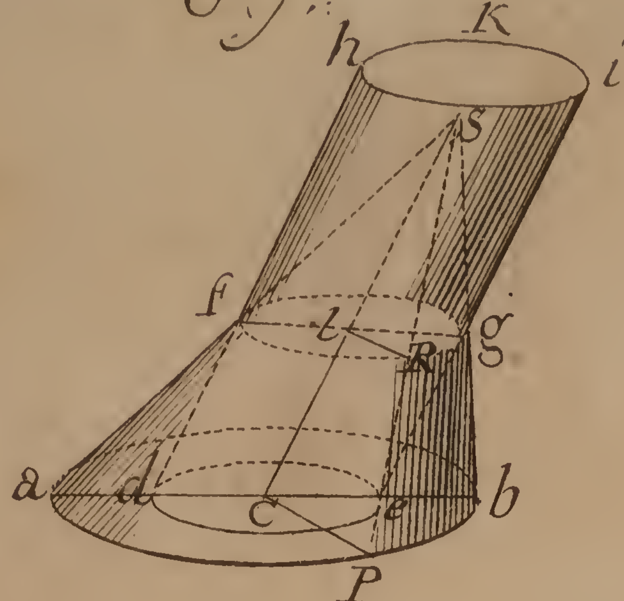
CHAPITRE VII.

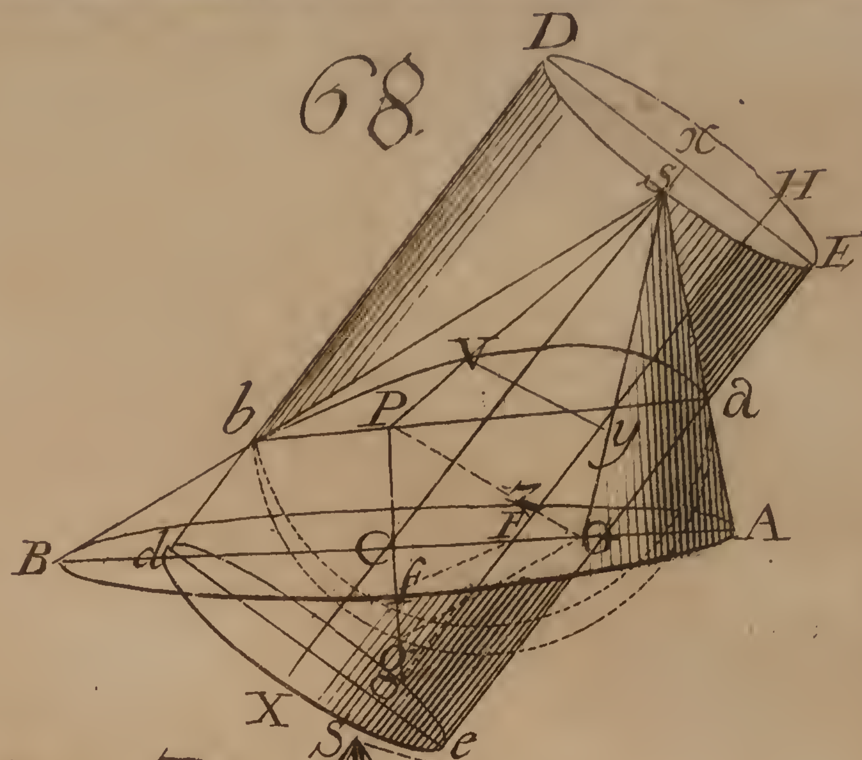
Des Sections faites par la pénetration des Cônes entr'eux.

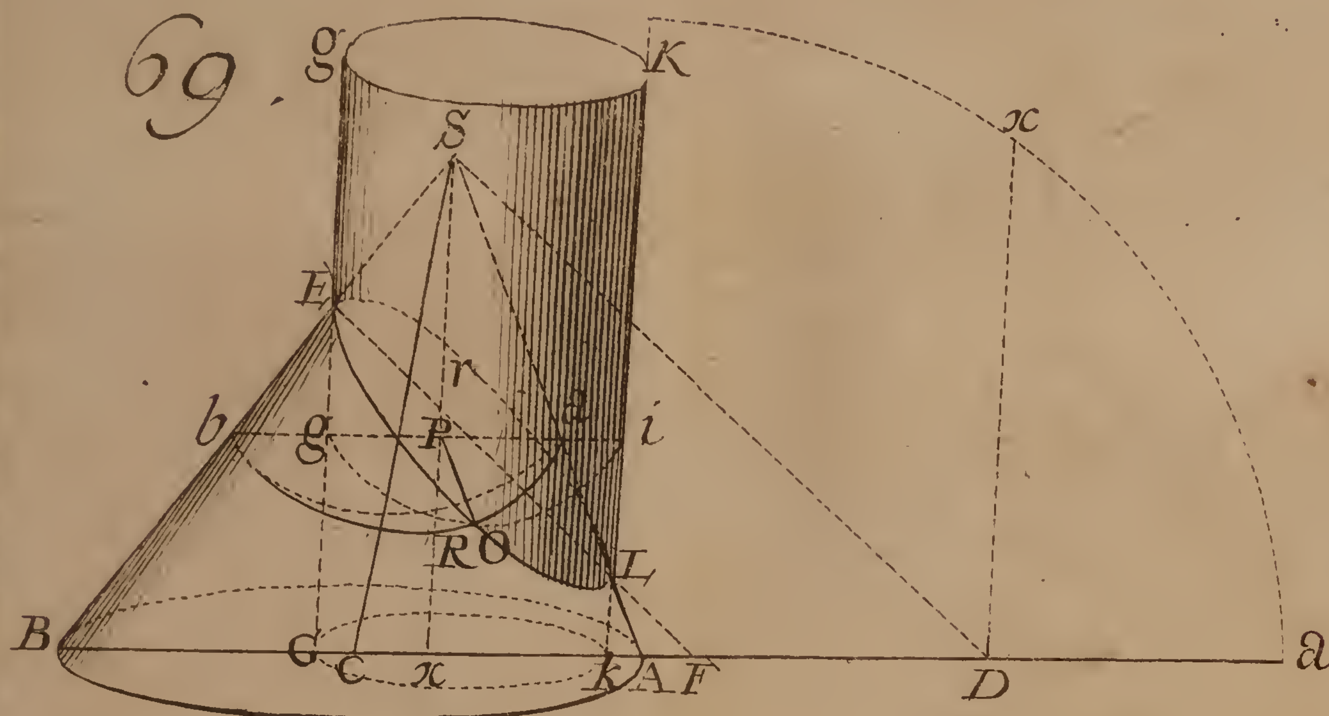
Un cône peut être à l'égard d'un autre cône de differente grandeur, & en differente position; d'où résultent les cas qui changent la nature des sections formées à leurs surfaces, par leur pénetration mutuelle.

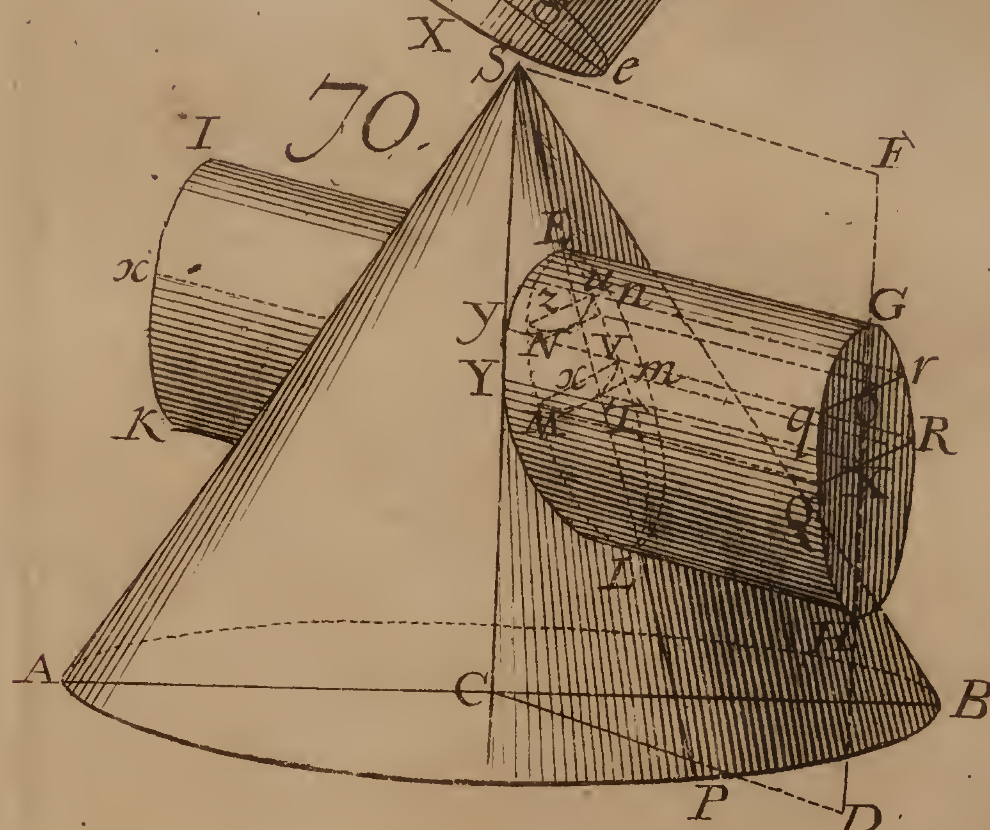
La combinaison de leur situation respective peut beaucoup plus va-

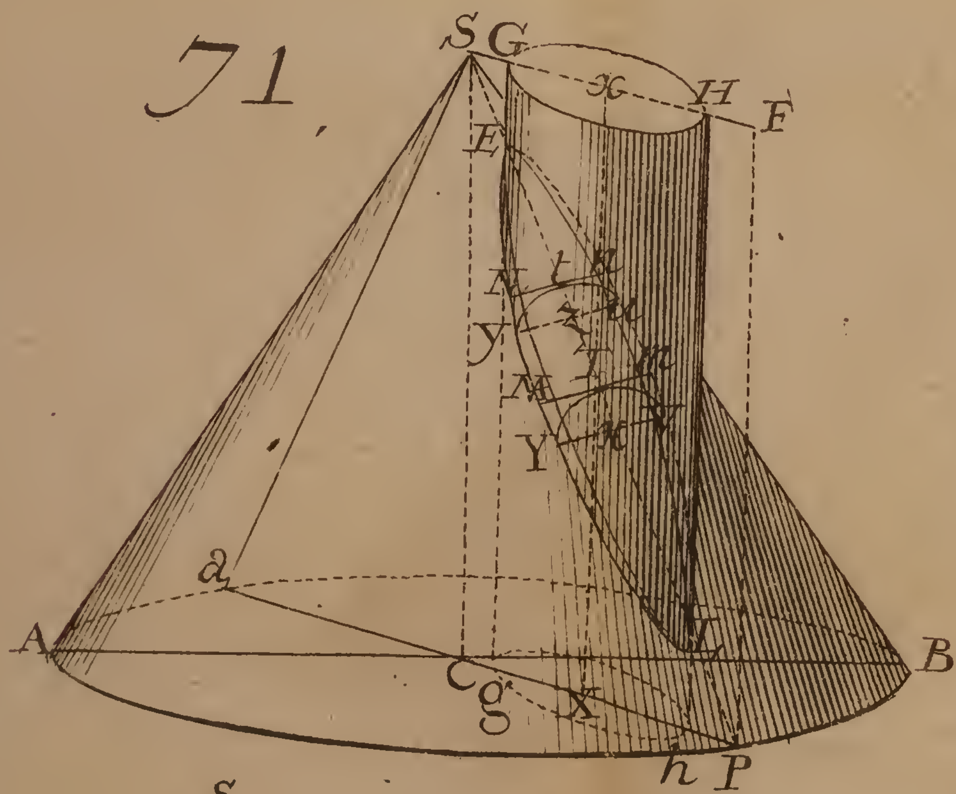

66.

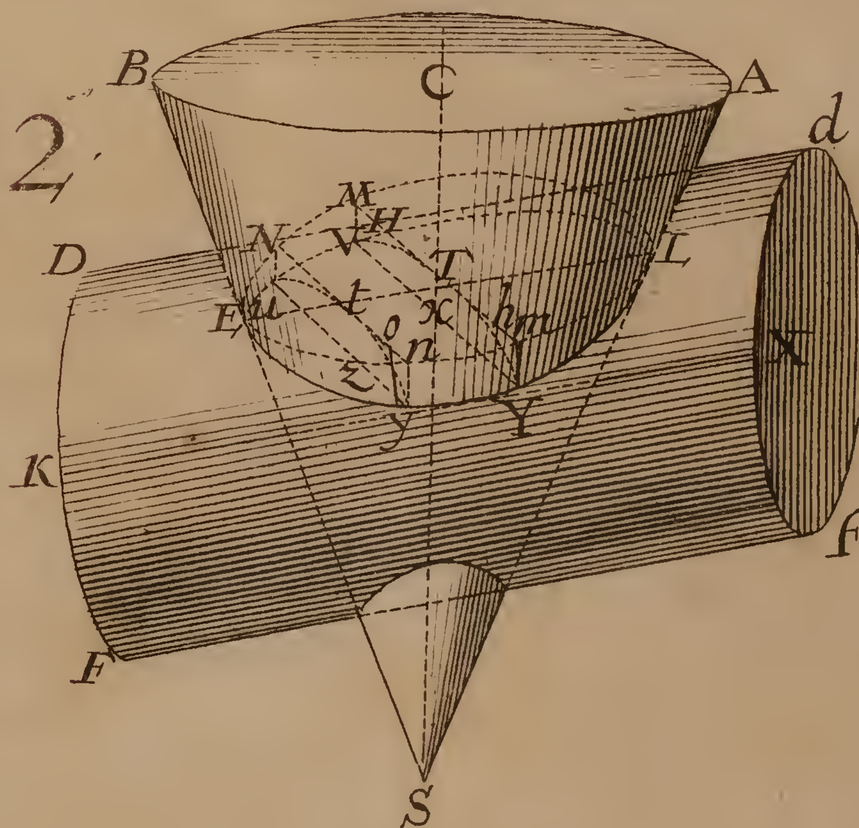

67.

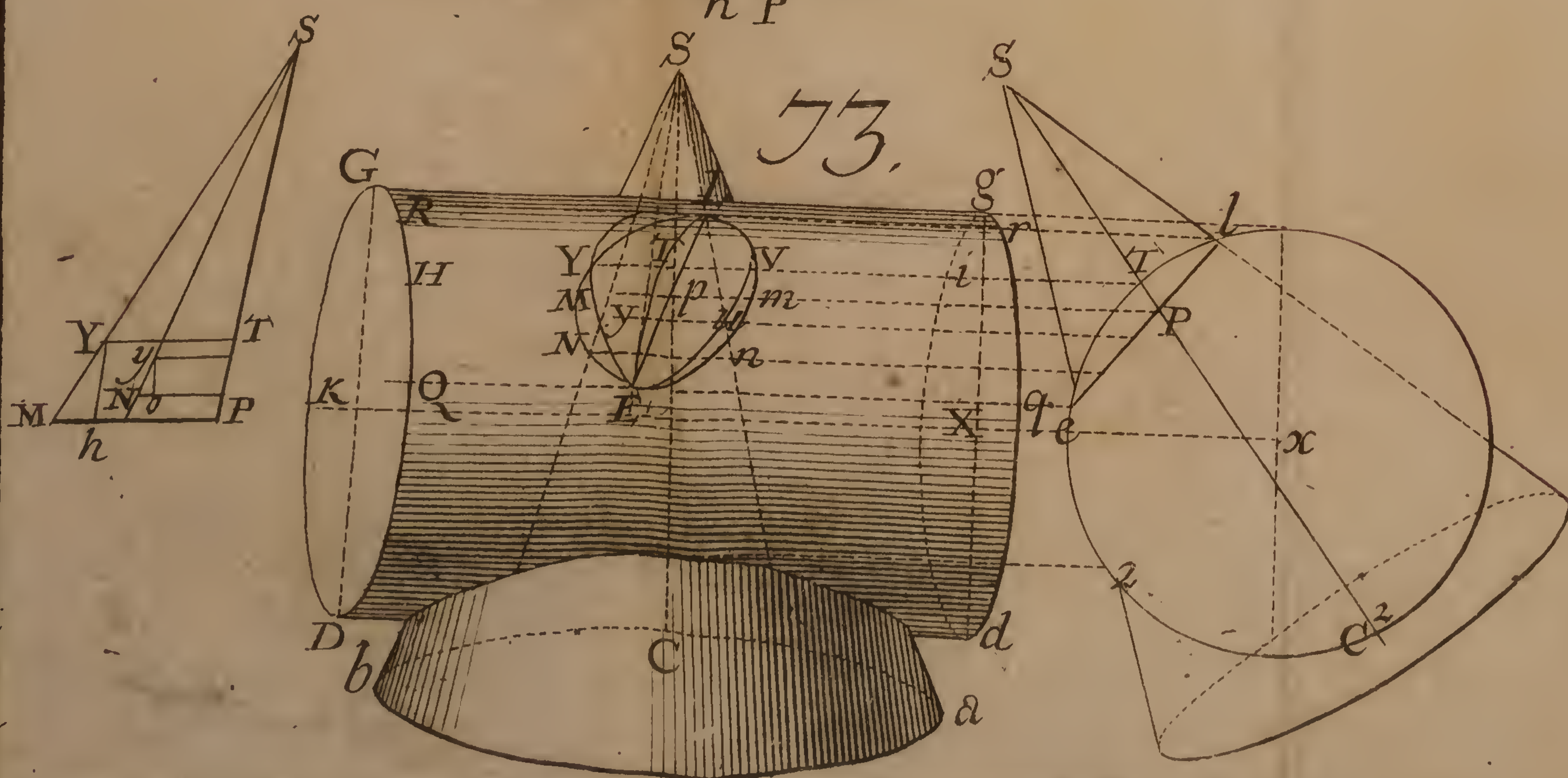

68.

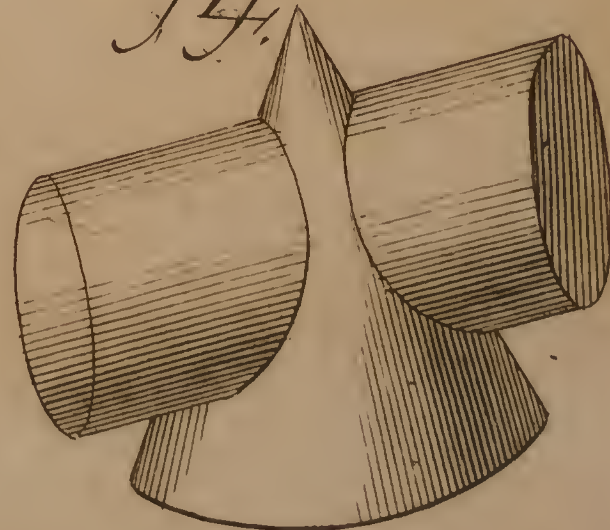

69.


70.


71.


72.


73.


74.

rier que celle des cylindres entr'eux, qui ſont des corps plus ſimples, & dont les ſections ne peuvent être que de trois eſpeces; celles des cônes au contraire peuvent être de cinq eſpeces, qui donnent neuf combinaiſons, rejettant les inutiles. Je ne doute pas cependant qu'on ne puiſſe trouver une formule generale, qui comprendroit tous les cas des ſections ſolides, qui peuvent ſe faire par la pénetration des cônes entr'eux, dans quelque ſituation que ſoient leurs axes & leurs côtez, les uns à l'égard des autres, il ſeroit à ſouhaiter que quelque Sçavant Algebriſte voulût y travailler. Le célebre M. Bernoully de Bâle, qui a bien voulu jetter les yeux ſur ce petit Ouvrage, & me donner des inſtructions ſur la Courbe de la ſection de l'Anneau, m'a dit que le calcul pour la formule generale de l'interſection des cônes étoit plus long que difficile, pour moi qui le trouve au deſſus de mes forces, je me contenterai de ce que la geometrie lineaire pourra nous indiquer ſuivant notre méthode ordinaire, de la ſuppoſition des plans coupans ces corps de differentes façons, & comparant les ſections planes aux ſolides; & quoique je n'en approfondiſſe pas la Theorie, je fournirai les moyens néceſſaires à la pratique pour en trouver les courbes par celui de la projection, ce qui ſuffit au projet de cet Ouvrage, où l'on s'eſt borné aux connoiſſances qui doivent être de quelque uſage dans l'Architecture. Je puis auſſi dire que les rencontres des voutes coniques entr'elles ſont des cas aſſez rares, comme on le verra au quatriéme Livre; cependant nous ne laiſſerons rien à déſirer de ce qui peut tomber en pratique, quoique nous ne puiſſions donner ici une Theorie complete ſur cette matiere; quelque Sçavant pourra peut-être ſuppléer à ce qui manque ici à la curioſité.

THEOREME XXVII.

Les Sections faites par la pénetration de deux Cônes égaux, dont les Axes (s'ils ſont Droits) ou les côtez ſemblables (s'ils ſont Scalenes) ſe coupent à diſtances égales de leur Sommet, ſont des Sections Planes.

Ce Theorême contient ſept combinaiſons de poſition de cônes, qui ſe pénetrent, lorſqu'ils ont l'axe commun & qu'ils ſont tournez en ſens contraire.

1.° Lorsque leurs axes ſe confondent, & qu'ils ſont tournez en ſens contraire, comme à la fig. 83. *Fig.* 83.

2.° Lorsque les cônes ſont Droits & leurs axes paralleles entr'eux. *Fig.* 75.

3.° Lorsque leurs axes ſont inclinez entr'eux, & qu'étant prolongez ils ſe rencontrent au-delà des ſommets. *Fig.* 76.

Fig. 77. 4.° LORSQU'ETANT inclinez ils se croisent au dessous des sommets ; & que les côtez opposez sont paralleles entr'eux.

Fig. 78. 5.° LORSQU'ILS se croisent au dessous des sommets, & que les quatre côtez se coupent,

Fig. 79. 6.° LORSQUE, les cônes étant scalenes, les côtez semblables & opposez sont paralleles entr'eux, mais tournez en sens contraire, le sommet de l'un, du côté de la base de l'autre.

Fig. 80. 7°. LORSQU'ETANT aussi scalenes ils sont tournez en sens contraire, seulement à l'égard de la base, & qu'ils ont un axe commun.

Au deuxiéme & troisiéme cas la section HD est une hyperbole ; au quatriéme, PR une parabole ; au cinquiéme, EL, & au sixiéme, *b*B une Ellipse ; & au septiéme, SD*d* un triangle isoscele.

D E M O N S T R A T I O N.

Si l'on suppose un plan passant par les axes des deux cônes il sera par la supposition deux triangles semblables & égaux ASB, a*sb*, & si un second plan perpendiculaire à celui-ci, le coupe par le point H
Fig. 76. & 75. d'interfection des côtez SB, *s*a, & des axes CX, *c*X en X, ou parallelement aux axes, s'ils sont paralleles entr'eux comme la figure 75. il est clair qu'il retranchera des segmens de cercles égaux DEa, DE*b*, dans chaque base du cône ; puisque les abscisses Da, D*b*, qui sont les fléches des arcs, sont égales par la supposition ; mais aussi il retranchera des segmens de cône DHa, DHB, qui seront de même hauteur & inclinaison sur ces portions de base, puisqu'il les coupe à distances égales des sommets S & *s* par la supposition ; donc tous les arcs de ces segmens de cône, paralleles à ceux de la base comme *f*G, FG, seront encore égaux entr'eux, parce qu'ils seront coupez en même raison dans chaque cône à même distance de la base ; donc ils n'avanceront pas plus d'un côté que de l'autre ; & par conséquent aboutiront au même plan, qui sera deux sections égales, une à droite dans un cône, & une à gauche dans l'autre, ou pour mieux dire une section équivalante à deux.

Quant à la figure de la section, il est visible qu'elle sera déterminée par la position du plan coupant perpendiculairement les triangles par les axes, comme s'il n'y avoit qu'un seul cône, puisque sa position à l'égard de l'autre est supposée égale.

Appli-

Application à l'usage.

Cette proposition, considerée 1.° au second & troisiéme cas, fait voir quelles sont les arêtes de rencontre des crenaux paralleles, convergens & divergens, joints ensemble dans une seule ouverture intérieure, comme on en voit en plusieurs vieux Chateaux, & dans les Fortifications modernes aux Redoutes de Luxembourg & ailleurs. 2.° Au quatriéme & cinquiéme cas des cônes égaux, dont les axes & les côtez se croisent, on voit quelle est la Courbe, qui se forme à l'angle rentrant des enfourchemens des voûtes sphériques, fermées en polygones, à leurs diagonales dans la méthode du *Trait*, qui suppose des cônes tronquez, inscripts dans la sphère, pour y former des Panneaux de dévelopement, comme on le verra au Chapitre septiéme du quatriéme Livre, où nous ferons voir en quoi consiste l'erreur du trait du P. Deran & du P. Déchalles qui l'a suivi, & que M. de La Ruë, qui l'a connu à-peu-près n'en a pas apperçû la raison. 3.° Au 6.e cas, cette proposition fait voir quelle seroit la courbe d'arête d'enfourchement d'une *Corne de Vache double* exactement faite, comme si ses piédroits étoient ceux d'un biais passé. *Fig.* 75. 76. & 77. *Fig.* 78. *Fig.* 79.

4.° Au 7.e cas elle fait voir que les Trompes coniques, que tous les Auteurs de la coupe des Pierres mettent aux angles des Escaliers, suspendus à repos, sont un composé de deux cônes, qui font un *Jarret* à la clef, en angle saillant; car la section par les points A & a, faite par un plan perpendiculaire aux deux triangles par l'axe commun SX, fait deux Ellipses, l'une AC dans le cône scalene ASB, l'autre a*c* dans l'autre cône égal Sa*b*, lesquelles se croisent en *m* ou en *i* entre les deux axes *c*H & C*h*, de sorte que cette section est une courbe composée, telle qu'elle est représentée en AH*ib*a, & en projection par la droite A *c m* C a. *Fig.* 80.

THEOREME XXVIII.

La Section faite par la pénetration des Cônes Droits inégaux, dont les Axes se confondent, ou des Cônes Scalenes inégaux, dont les Axes se confondent, & sont également inclinez à leurs Bases, est un Cercle.

La vérité de cette proposition se présente d'elle-même, & n'a pas besoin de démonstration; car les sections planes, paralleles à la base par les points communs E F & D *d*, *d d*, sont des cercles communs aux deux cônes, soit que les bases soient confonduës comme aux figures 81. 82. ou parallelement éloignées comme aux figures 83. & 84. *Fig.* 81. 82. 83. & 84.

THEOREME XXIX.

La Section faite par la pénetration de deux Cônes inégaux, mais semblables, dont les Axes & les Côtez sont paralleles entr'eux, est un Paraboloïdimbre.

Fig. 85. SOIT (*Fig.* 85.) le triangle A*s*D la section par l'axe du petit cône, & BSE celui du grand, & le point P commun aux deux surfaces des cônes. Si l'on suppose un plan qui coupe le premier A*s*D perpendiculairement, suivant le côté BS, parallele à A*s*, il touchera le grand cône, & fera dans le petit une parabole qu'on représente ici par la courbe P*r*RL, dont l'axe sera PB, auquel si l'on tire à volonté les ordonnées *or*, OR, & par le sommet *s* les droites *srz* & *s*R*y*, ces lignes, qui seront les côtez du petit cône, étant prolongées, rencontreront la surface du grand BSE en quelques points *z* & *y*, par lesquels on menera des paralleles *zx* & *y*X aux ordonnées *or* & OR, jusqu'à la rencontre des lignes *sx*, *s*X, tirées du sommet *s* par les points *o* & O, & enfin par les mêmes points *r* & R d'autres lignes *rq*, RQ, paralleles à ces mêmes lignes *sx*, *s*X, on aura des triangles semblables *rqz* & *sor*, RQ*y* & *s*OR; par conséquent les mêmes analogies à l'égard de la parabole plane, qu'on a eu dans les Theorêmes XXIII. & XXV. à l'égard de l'Ellipse, sçavoir, la distance du sommet du cône à l'ordonnée de la section plane, à cette même ordonnée, comme la distance à celle de la section, est à la difference des deux sections *so* : *or* :: *rq* : *qz*, & *s*O : OR :: RQ : Q*y*; donc la section (par la déf. 4.) est un paraboloïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME XXX.

La Section faite par la rencontre des surfaces de deux Cônes, qui se pénetrent, dont les Axes sont paralleles, & dont l'un des Côtez d'un des Triangles par l'Axe rencontre celui de l'autre [prolongé s'il le faut] est une Ellipsoïdimbre.

Fig. 86. SOIT [*Fig.* 86.] les triangles B*s*A & *b*S*a* la section faite par un plan passant par les axes de deux cônes qui se pénetrent, dont les points E & L sont communs aux deux surfaces. Si l'on suppose un plan passant par EL perpendiculairement au premier, il touchera le cône B*s*A, & fera une Ellipse dans l'autre *b*S*a*, qu'il coupe obliquement suivant la ligne EL, qui en sera le grand axe, auquel ayant mené des ordonnées *or* & OR à volonté, on tirera par le point S des lignes S*r* & SR, jusqu'à la rencontre de la surface du cône B*s*A en *z* & en *y*, ces points seront à la circonference de la section solide, laquelle sera la courbe E*zy*L; or faisant, comme au Theorême précedent *zx*, parallele à *ro*,

& *y* X parallele à RO jusqu'à la rencontre des lignes S *o*, SO, tirées du sommet du cône, & prolongées vers *x* & X, & tirant ensuite des mêmes points *r* & R des lignes *r q* & RQ paralleles aux lignes S *x* & SX, on aura les mêmes Analogies à l'égard des ordonnées de l'Ellipse, qu'on a eu dans la proposition précedente à l'égard de la parabole; sçavoir, S*o* : *or* : : *rq* : *qz*, & SO : OR : RQ : Q*y*; donc la section solide est une Ellipsoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Nous avons ajouté à l'énoncé de la proposition, que le côté d'un des triangles par l'axe d'un cône devoit couper celui de l'autre, prolongé [s'il le faut] parce qu'il peut arriver comme à la fig. 89. que le côté *s*A du triangle B *s* A ne rencontre pas le côté S a de l'autre triangle, mais il le rencontrera si l'un & l'autre sont prolongez vers L; parce que nous supposons qu'ils soient inclinez entr'eux, & non pas paralleles; de sorte que la section sera toujours la même. La seule difference qu'il y aura avec le cas précedent, c'est qu'elle ne sera pas une Ellipsoïdimbre complete, mais mutilée, qui sera défaillante de toute la partie correspondante à A L de l'axe soustendant EL, laquelle est hors du cône. *Fig.* 89.

REMARQUE.

156. Il faut remarquer que, quoique le plan que l'on feroit passer par la ligne SE perpendiculairement à celui des triangles par les axes *s* C, S *c*, doive faire une hyperbole dans le cône A *s* B, la section ne sera pas pour cela une hyperboloïdimbre; parce que les côtez A *s* & aS étant divergens vers S, sont convergens vers L; de sorte qu'en prolongeant ces côtez, on revient toujours au premier cas de l'Ellipsoïdimbre.

THEOREME XXXI.

La Section faite par la rencontre des surfaces des deux Cônes, dont les Axes se coupent perpendiculairement ou obliquement, ensorte que les côtez prolongez de l'un ou de l'autre, ne se rencontrent pas au dessus & au dessous du sommet d'un d'entr'eux, est une Ellipsoïdimbre.

La démonstration de cette proposition est tellement semblable à celle de la précedente, qu'on s'est contenté d'en mettre ici la figure, pour le cas où les axes se coupent perpendiculairement; & la figure 88. pour celui où ils se coupent obliquement; en coupant les cônes, qui traversent, par des plans tangens aux cônes qui sont pénetrez, comme on a fait cy-devant, il sera bien aisé de voir les rapports des ordonnées de la section solide à celle de la section plane, & parce que suivant *Fig.* 87. & 88.

les conditions du Theorême, ces sections planes ne peuvent être que des Ellipses si les cônes sont Droits, ou des cercles s'ils sont scalenes ; il suit que la section solide sera une Ellipsoïdimbre, ou espece de cicloïmbre élargi ou resserré, c'est-à-dire une courbe, dont les ordonnées ont un excès ou un défaut sur celles du cercle.

Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit des sections opposées ; elles sont ici comme ailleurs les mêmes, disposées en sens contraire à l'égard du sommet, & l'une toujours plus petite que l'autre.

On verra par le Theorême suivant, la raison pour laquelle nous exceptons dans l'énoncé de celui-ci, le cas où les côtez prolongez se rencontrent.

THEOREME XXXII.

La Section faite par la rencontre der surfaces de deux Cônes, dont les Axes se coupent obliquement, & dont un Côté d'un des Triangles par l'Axe rencontre les deux de l'autre Triangle, qui est dans le même Plan, ou un des côtez étant prolongé au dessus de son sommet, est une Hyperboloïdimbre dans l'un & l'autre Cône.

Fig. 91. Soient [*Fig.* 91. les triangles BSA & DEF les sections d'un plan passant par les deux axes CS & *g* E, des cônes qui se pénetrent dans une position respective, où le côté DE rencontre les deux du triangle BSA, l'un SA qu'il coupe naturellement en H, l'autre BS en *y*, parce qu'il est prolongé au dela du point S en *y* ; ou bien, où le côté SA du triangle BSA rencontre les deux DE, EF du triangle DEF, sçavoir DE en H, & FE prolongé en X.

Si l'on suppose des plans perpendiculaires à celui qui passe par les axes SC, E*g*, & qui coupent les cônes, l'un par HA, l'autre par HD, les sections qu'ils feront seront des hyperboles, dont HA & HD seront les axes, & HX, H*y* les axes déterminez, & les mêmes plans qui coupent un cône seront tangens de l'autre. Soit une moitié de ces hyperboles la courbe H*r*R, sur laquelle ayant pris le point *r* à volonté, on menera l'ordonnée *ro* à l'axe HD, & par le même point *r* & le sommet S la ligne S*rz*, cette ligne rencontrera la surface de l'autre cône DEF en quelque point *z*, qui sera à la circonference de la Courbe de la section solide, qui passera par le point H, commun aux deux surfaces, & par le point *z*, qui leur est aussi commun, puisqu'il est la rencontre du côté du cône BSA avec la surface de l'autre DEF ; or parce que la ligne S*rz*, part du même point S, que la ligne SA, ces lignes s'écartent & sont divergentes, de sorte qu'on peut supposer comme

aux Theorêmes précedens une ligne parallele à SA, & tirée du point *r*, jusqu'à la rencontre de la ligne *zx*, ce qu'on n'a pû faire bien nettement dans la figure pour éviter la confusion des lignes, mais qu'on peut bien se représenter par la figure 90. mise à côté, où *hx* représente HD, & l'on aura des triangles semblables *sor*, *rqz*; donc S*o* ou E*o* : *or* :: *rq* : *qz*; par conséquent la courbe qui passera par *hz*, sur la surface des cônes, sera une hyperboloïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 90.

Il en sera de même à l'égard de l'autre cône, & cette section commune variera suivant la difference des grandeurs respectives des deux cônes.

THEOREME XXXIII.

La Section faite par la rencontre des surfaces de deux Cônes, dont les Axes se coupent obliquement, & dont un des Côtez des Triangles par l'Axe est parallele à un des Côtez de l'autre Triangle de la Section par l'Axe de l'autre Cône, est une Courbe équivalemment differente dans chaque Cône; sçavoir un Hyperboloïdimbre dans l'un des Cônes, & un Paraboloïdimbre dans l'autre, selon que l'un des deux Cônes surpasse ou est surpassé par l'autre, dans l'allignement de ces Côtez.

Soient [*Fig.* 92.] les triangles BSA & DEF les sections de deux cônes, coupez par un plan qui passe par leurs axes *c*S, CE, lesquels étant prolongez vers K se coupent obliquement. Soit aussi le côté DE parallele au côté BS; il faut démontrer que la courbe H*x*, qui est faite par l'interfection des surfaces de ces deux cônes, a des rapports d'excès & de défaut avec les sections planes, faites par des plans tangens aux côtez des cônes SA & DE, ce qui se fera de la même maniere qu'à la proposition précedente; car le plan tangent par DE fera une parabole dans le cône BSA, & le plan tangent en SA fera une hyperbole dans le cône DEF, dont YH est l'axe déterminé, & HI l'axe prolongé; or si l'on prend dans le contour de ces courbes differentes un point *r*, par lequel & par le sommet on tire une ligne S*rz*, qui rencontre la surface de l'autre cône en *z*, la courbe, qui passera par H & *z* sera celle de l'interfection des deux corps; mais du même point *z* menant au sommet E une ligne *z*E, cette ligne qui sera un côté du cône DE*f* passera à la circonference de l'hyperbole, dont HI est l'axe & son ordonnée, c'est-à-dire la perpendiculaire menée du point *z* au plan passant par les axes, aura un rapport d'excès ou de défaut avec cette hyperbole, qui sera proportioné à la profondeur de la section solide, c'est-à-dire à la distance du plan de l'hyperbole, mesurée dans un plan passant par les ordonnées correspondantes & le sommet du cône; donc cette section sera un paraboloïdimbre, considerée comme étant dans le cône DEF, & une hyperboloïdimbre, considerée dans le cône BSA, *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 92.

Il faut ici que l'imagination aide un peu à la figure, qui ne peut bien repréſenter le relief.

Il nous reſteroit à déterminer la courbe, qui ſe fait par l'interſection des ſurfaces des cônes, dont les axes ne ſe coupent pas & ne ſont pas paralleles; mais ſans qu'il ſoit beſoin d'un Theoréme general, nous pouvons en trouver autant de points que nous voudrons pour chaque poſition reſpective de cônes donnez; ce qui ſuffit à la pratique, puiſque nous démontrerons que chacuns de ces points ſont bien trouvez, comme on le verra au Livre ſuivant.

Nous n'ajouterons rien ici des ſections compoſées de deux portions de courbes, qui ſe mutilent réciproquement, lorſqu'un cône n'en pénetre un autre que d'une partie de ſa circonference; nous en avons aſſez dit aux Theorêmes XXI. & XXVII. où nous avons auſſi fait remarquer que ces parties de ſections ſont toujours inégales; celle qui approche le plus du ſommet étant toujours la plus petite.

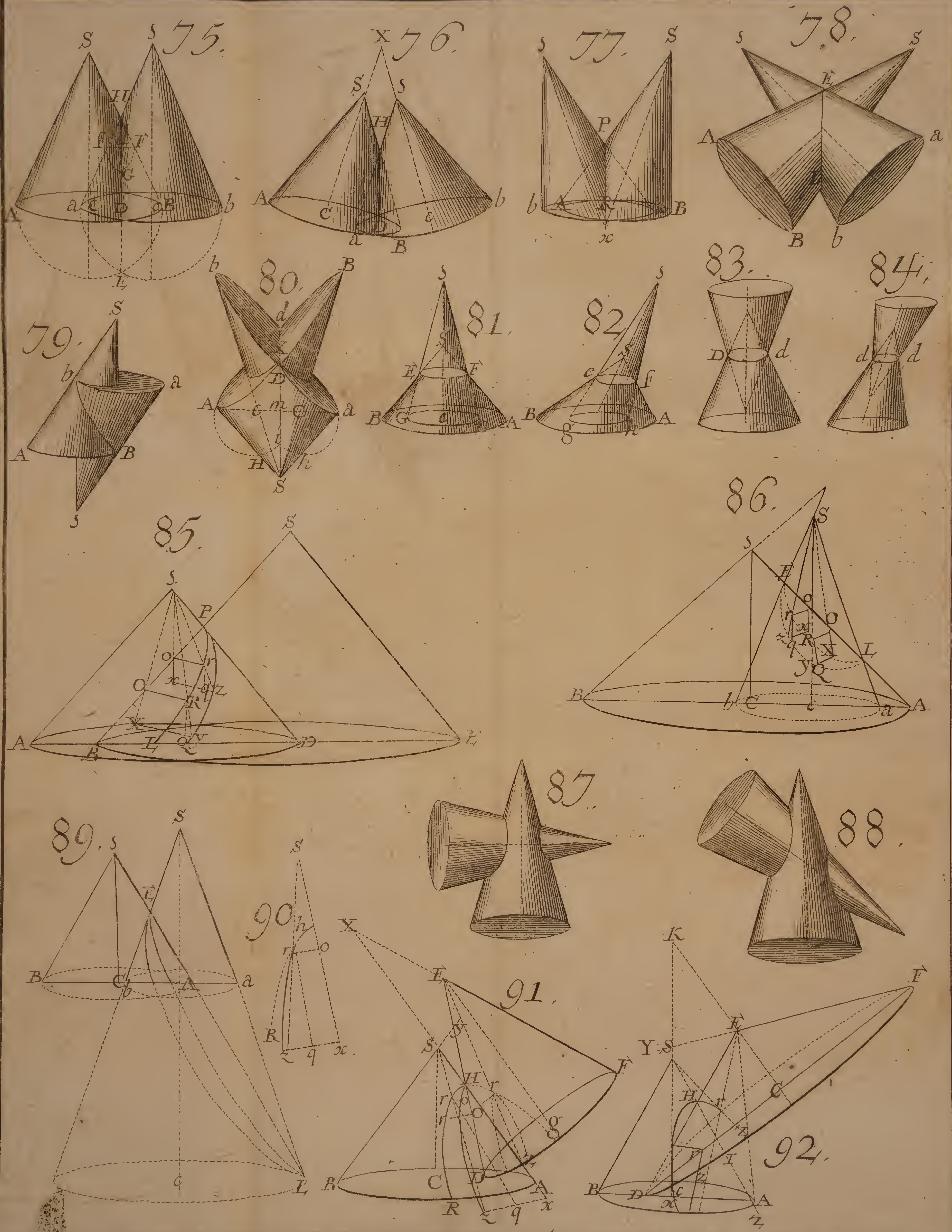
USAGE.

157. Les rencontres des voutes coniques entr'elles tombent rarement dans la pratique, nous n'en trouvons d'exemples que dans les Trompes & voutes coniques, qui rachetent une Tour ronde & en talus, dans les lunettes ébraſées d'une voute en canoniere, ou dans les crenaux qui ſe croiſent, ce qui eſt de peu d'uſage & de conſéquence.

CHAPITRE VIII.

Des Sections faites à la ſurface des Sphéroïdes, pénetrez par des Sphères, Cônes ou Cylindres.

Fig. 93. & 94. Nous avons diſtingué au Chapitre IV. differentes ſortes de ſphéroïdes, mais nous ne parlons ici que des plus réguliers, qui ſont faits par la révolution d'une demi-Ellipſe ſur un de ſes axes, ſçavoir de *l'Oblong* PL*p* [*Fig.* 93.] ſur le grand axe P*p*, & de *l'Applati*, ſur le petit axe AL comme P*tp* [*Fig.* 94.]


75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.

THEOREME XXXIV.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Sphéroïde avec celle d'une Sphère, d'un Cylindre & d'un Cône, qui le pénetrent, ou qui en sont pénetrez, de maniere que les Axes de ces Corps se confondent, est un Cercle.

Cette proposition est claire, si l'on fait attention à la generation de ces corps, car :

1.° Pour le sphéroïde & la sphère, puisque le sphéroïde est formé par la révolution d'une demi-Ellipse DBE ou *dbe* sur son axe, DE ou sur le petit *de*, & la sphère par celle d'un demi cercle PF*p*, l'ordonnée MO ou *mi* à l'axe commun D*e*, auquel elle est perpendiculaire, étant commune au sphéroïde & à la sphère, formera par sa révolution autour de son point M ou *m*, immobile, un cercle qui sera commun à la sphère & au sphéroïde, dont la circonference sera à la surface de l'un & de l'autre; par conséquent à leur intersection, *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig. 95.*

2.° Le même raisonnement s'applique naturellement à l'intersection des surfaces du sphéroïde & du cylindre Droit; [*Fig. 96*] puisque ce dernier est formé par la révolution d'un parallelograme rectangle MO*im*, sur son côté M*m*; or dans la supposition que ce côté qui est l'axe du cylindre, se confond avec les axes du sphéroïde, soit Applati comme *dbe*, ou alongé comme DBE, il est visible que les côtez MO & *mi* sont des ordonnées communes, dont la révolution fait un cercle, qui sera l'intersection commune de ces deux corps. *Fig. 96.*

3.° Il en sera de même de l'intersection d'un sphéroïde & d'un cône Droit, qui est formé par la révolution d'un triangle rectangle SCF ou *scf*, sur son côté SC ou *sc*, qui en devient l'axe, passant par les axes des Ellipses, qui engendrent le sphéroïde, les ordonnées MO & *mi* seront les rayons des cercles, dont la circonference sera l'intersection des deux surfaces, soit que le sommet *s* du cône soit au dehors du sphéroïde ou au dedans comme KCF, (*Fig.* 97.) auquel cas l'ordonnée commune est *nh*. ou *vu* fig. 98. *Fig. 97. & 98.*

Application à l'usage.

Cette proposition fait voir que l'arête d'enfourchement d'une lunette en Berceau ou Ebrasée, qui rachete une voute en cû-de-four surhaussée ou surbaissée, dont les impostes sont de niveau à celle de la voute, & dont la direction, c'est-à-dire celle de leurs axes, tend au centre du cû-de-four, est une circonference de cercle, en terme de l'Art, un plein ceintre.

De même que l'arête d'enfourchement d'une niche ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, ou plutôt renfoncée ou applatie par ſon plan horiſontal, dans une voute ſphérique, avec les mêmes circonſtances de direction de ſon axe au centre de cette voute eſt un cercle, ce qui n'eſt pas rare dans les bâtimens.

THEOREME XXXV.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'une Sphère & d'un Sphéroïde, dont l'Axe ne paſſe pas par le Centre de la Sphère, eſt une eſpece d'Ellipſoïdimbre, c'eſt-à-dire, une Courbe à double Courbure, dont on peut marquer quelque rapport conſtant à une Ellipſe.

Soit une ſphère ABRN, pénetrée par un ſphéroïde APB*p*, dont l'axe P*p* ne paſſe pas par le centre C de la ſphère. Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par le centre & par l'axe du ſphéroïde, il fera pour ſection un cercle dans la ſphère & une Ellipſe dans le ſphéroïde, par le Theorême V. dont l'interſection qui eſt aux points A & B marquera que ces points ſont communs aux deux ſurfaces, mais non pas les autres points de ces deux courbes, qui ſont l'une en dedans de la ſphère, l'autre au dehors du ſphéroïde, de ſorte que ni l'une ni l'autre de ces ſections ne peut être commune à la ſphère & au ſphéroïde.

Presentement ſi l'on veut lui chercher quelque rapport avec d'autres courbes planes, il faut ſuppoſer un plan perpendiculaire au premier (comme nous avons fait juſqu'ici) paſſant par les points communs A & B, lequel fera deux ſections de même eſpece que les précedentes, ſçavoir une Ellipſe AKB dans le ſphéroïde, & un cercle AMB dans la ſphère; d'où il ſuit évidemment que la commune ſection de ces deux ſurfaces eſt une courbe à double courbure; puiſqu'elle ne peut être en même tems cercle & Ellipſe, & cette courbe étant tournée du côté du Póle P du ſphéroïde, a des ordonnées à ſon axe courbe AYB, toujours moindres que celles de l'Ellipſe plane de la ſection faite par les points communs A & B dans le rapport des ordonnées à l'axe P*p* du ſphéroïde, qui paſſe l'un par l'axe ſouſtendant AB, l'autre par l'axe courbe AYB.

On pourroit conſiderer le ſphéroïde comme une infinité de petits
Fig. 101. cônes tronquez (*Fig.* 101.) faits par la ſection de pluſieurs plans *ee*, perpendiculaires à ſon axe P*p*, & c'eſt ainſi en effet qu'on le reduit le plus ſouvent pour la pratique de la Coupe des Pierres; ces cônes tronquez auroient tous leur ſommet ſur l'axe P*p*, prolongé, par exemple, en S, & les cotez du cône *ſe*, *ſe* ſeroient tangentes au ſphéroïde.

Alors

Alors on pourroit trouver la courbe de la ſection ſolide par les Analogies de celle du cône dans la ſphère comme au Theorême XIV. mais à chaque cône on auroit un nouveau ſommet S, & parce que le nombre de ces cônes à la ſurface du ſphéroïde eſt infini, il y auroit autant de ſommets que de points dans l'axe prolongé; de ſorte que la courbe de cette ſection n'eſt pas de la même eſpece que l'Ellipſoïdimbre, telle que nous l'avons défini.

Cependant elle y a quelque rapport, la difference eſt que les ordonnées à l'axe de l'Ellipſe, & celles à l'axe courbe de la ſection ſolide n'ont pas des excès ou des défauts les unes à l'égard des autres, en raiſon Arithmetique, comme les côtez du triangle, mais en raiſon Geometrique, comme les racines des quarrez des ordonnées des Ellipſes planes, faites par des plans paſſant par ces ordonnées, & l'extrémité de l'axe du ſphéroïde, ce que l'on va démontrer comme il ſuit.

Ayant ſuppoſé comme ci-devant le ſphéroïde APLp [*Fig.* 101.] qui pénetre une ſphère ABRN, & que les points A & B ſont communs à leurs ſurfaces, ſoit AKBb l'Ellipſe faite par la ſection d'un plan paſſant par AB perpendiculairement à celui qui paſſe par l'axe du ſphéroïde & le centre C de la ſphère. Soit auſſi AMBm le cercle fait par la ſection du même plan dans la ſphère.

Si par le centre C on tire une perpendiculaire CE à l'axe Pp, elle le coupera au point D, duquel pour centre & pour rayon DH ou DN, moitié de HN conſiderée comme corde de la ſphère, ayant décrit un demi cercle HEN, il rencontrera en x la demi-Ellipſe PAp du ſphéroïde, & donnera ainſi un point x commun aux deux ſurfaces, par lequel menant une perpendiculaire xy à l'axe Pp, on aura xy pour ordonnée de la ſection ſolide; mais parce que la ſection plane paſſant par A & B coupe l'axe au point g, l'intervale gy ſera la difference des profondeurs des deux ſections dans la ſphère, & la ligne Fg perpendiculaire à Pp ſera l'ordonnée de la ſection circulaire de la ſphère, & Gg celle de l'Ellipſe dans le ſphéroïde; or par la proprieté de l'Ellipſe $Py \times yp : Pg \times gp :: \overline{xy}^2 : \overline{Gg}^2$. Donc ſi l'on connoît la longueur des ordonnées on trouvera leur diſtance, & ſi on connoît leur diſtance, c'eſt-à-dire, la profondeur de l'axe courbe à la ſection plane par AB, on connoîtra les longueurs des ordonnées, & par conſéquent leur difference.

Il en ſera de même ſi par le point P on fait paſſer un plan par les ordonnées or de la ſection ſolide, & nq de l'Ellipſe plane, leſquelles ſont ici exprimées en façon de perſpective à l'égard du cercle

AMB & de l'Ellipſe AKB, qui ſont repréſentez de même, parce que ces deux plans étant partie confondus enſemble, & ayant le diametre commun AB, ſeroient auſſi confondus avec ce diametre, ſi l'on n'aidoit un peu l'imagination.

POUR voir ces ordonnées plus diſtinctement, il faut les conſiderer comme ci-devant, dans un plan perpendiculaire au premier PANR, & paſſant par le pole P comme PR, alors faiſant un demi cercle IQR ſur IR, corde de la ſphère, & une demi-Ellipſe PvL ſur PL, comme grand axe, dont u eſt le centre, & ſur uZ moyenne proportionelle entre xu & ut pour moitié du petit axe, l'interſection v du demi cercle IQR, & de la demi-Ellipſe PvL donnera un point v de la ſection ſolide, duquel abaiſſant une perpendiculaire vo ſur PR on aura le point o à l'axe courbe de cette ſection, & le point n à l'axe droit par une analogie ſemblable à la précedente Po × oL : Pn × nL :: $\overline{ov}^2 : \overline{nz}^2$.

COROLLAIRE.

158. D'ou il ſuit qu'on peut trouver autant de points qu'on veut de l'axe courbe & leur diſtance à l'axe droit, ſur un plan paſſant par le point P perpendiculairement au plan paſſant par l'axe Pp du ſphéroïde & le centre C de la ſphère ; puiſque nous avons démontré au Theorême V. que toutes les ſections planes des ſphéroïdes, leſquelles ſont obliques à leurs axes ſont des Ellipſes, & que celles de la ſphères ſont des cercles, on aura toujours à l'interſection de ces deux courbes un point commun, qui ſera à la circonference de la ſection ſolide.

USAGE.

159. CETTE propoſition fait voir quelle eſt la courbe de l'enfourchement d'une Niche renfoncée ou raplatie dans une voute ſphérique, ſi les impoſtes ne ſont pas de niveau, c'eſt-à-dire, que l'un des deux ſoit au deſſus ou au deſſous de l'autre, quoique chacune ſoit de niveau entr'elles, ou que les unes ſoient de niveau, & les autres rampantes ; alors la Courbe de l'arête qui ſe fait à la rencontre des deux ſurfaces, eſt une courbe à double courbure, dont les *Aplombs* ne ſont pas dans une ligne droite, comme au Theorême précedent, & cette courbe a quelque rapport avec celle que nous avons appellé Ellipſoïdimbre, parce que ces ordonnées à ſon axe courbe ont toujours un rapport connu avec celle de la ſection Elliptique ou ſphéroïde, coupé par un plan paſſant par AB.

LA même choſe arrivera ſi les Niches, au lieu d'être renfoncées ou

raplaties horisontalement, étoient surhaussées ou surbaissées verticalement, la seule difference qu'il peut y avoir est le changement du rapport des ordonnées, qui ont, dans un cas, un excès sur celles de l'Ellipse, & dans l'autre un défaut, mais toujours en même proportion.

THEOREME XXXVI.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Cylindre droit & d'un Sphéroïde, dont l'Axe est perpendiculaire à celui du Cylindre, est un Cicloïmbre.

Soit un cylindre AB*b*a, dont l'axe *mn*, prolongé en C & *c*, est perpendiculaire à celui d'un sphéroïde alongé P*fpg*, ou applati P*dpe*. Ayant supposé ces corps coupez par un plan passant par leurs axes, & une seconde fois par un autre plan perpendiculaire au premier, & passant par les points A & B, a & *b* communs aux deux surfaces du cylindre & du sphéroïde; on reconnoîtra que cette seconde section sera un cercle dans le cylindre & une Ellipse dans le sphéroïde, laquelle sera semblable à celle de sa section par l'axe P*p*. La rencontre des deux surfaces n'est donc pas dans un plan, puisque l'Ellipse est hors du cylindre, & le cercle au dedans du sphéroïde; cependant elle doit passer par les points A & B ou *a* & *b*. *Fig.* 99.

Supposant un troisiéme plan perpendiculaire au premier, passant par l'axe du cylindre, ou parallelement à cet axe, il sera un cercle dans chaque sphéroïde, & un parallelograme dans le cylindre. Soit le quart d'un de ces cercles *d*H ou *gh*, & le point X ou *x*, celui où il rencontre le côté du cylindre, ce point sera commun aux deux surfaces, d'où si l'on abaisse la perpendiculaire XY ou *xy* sur l'axe C*c*, qui le coupera en Y ou en *y*, ce point sera un de ceux de l'axe courbe AYB ou a*yb* de la section solide; mais parce que toutes les ordonnées à cet axe sont perpendiculaires aux côtez du cylindre, & qu'elles se terminent toutes à sa circonference, il suit qu'elles sont toutes égales & paralleles à celles de sa base, ce qui est évident; donc tous les diametres droits seront aussi paralleles & égaux à ceux de la base du cylindre, comme nous l'avons démontré en pareil cas au Theorême XVIII. donc la section solide est un cicloïmbre, *ce qu'il falloit démontrer*.

La difference qu'il y a de celui qui se fait à la rencontre des sphéroïdes differemment posez à l'égard du grand ou petit axe, est que le cicloïmbre, fait à la rencontre des surfaces du cylindre & du sphéroïde alongé, s'approche du grand axe en creusant, pour ainsi dire, dans ce sphéroïde, & qu'à celle du sphéroïde applati, il s'éloigne du petit axe en s'approchant de la surface, comme on le voit dans la figure 99. par les lignes AYB & a*yb*.

COROLLAIRE.

160. Il eſt aiſé de trouver autant de points que l'on voudra de l'axe courbe, en tirant par un point quelconque K de la ligne *ab* une ligne K*l* parallele à l'axe C*c*, & décrivant ſur *or* & *m*A pour rayons des arcs de cercles. Si l'on fait K*t* = K*s* & *tz* parallele à C*c* pour côté du cylindre, elle coupera l'arc *tr* en *z*, par où on menera *zq* perpendiculaireà L*l*, laquelle donnera ſur *or* un point *q* qui ſera celui de la courbe que l'on cherche.

On appliquera ici tout ce que nous avons dit du rapport des profondeurs de la ſection ſolide au Theorême XVIII. ſoit en les conſiderant comme les fléches des cordes inſcrites dans differens cercles, ou comme les ſinus verſes des ordonnées priſes pour des ſinus droits.

THEOREME XXXVII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Cylindre & d'un Sphéroïde, dont les Axes ne ſe rencontrent pas, eſt une eſpece d'Ellipſimbre. Et peut être une Ellipſe dans certains cas.

Fig. 100. Soit [*Fig.* 100] un cylindre AB*ba*, qui rencontre obliquement un ſphéroïde alongé ou applati. Ayant ſuppoſé un plan paſſant par l'axe du cylindre, qui fera pour ſection un parallelograme dans ce corps, & une Ellipſe dans le ſphéroïde, dont les interſections *a* & *b*, A & B donnent des points communs à ces ſurfaces, ſi l'on coupe ces corps par un plan perpendiculaire au premier & paſſant par A & B, a & *b*, la ſection ſera de deux Ellipſes qui peuvent être égales, en ce cas la ſection faite par la rencontre des ſurfaces devient plane; mais comme la difference des ſphéroïdes peut donner une infinité d'Ellipſes differentes, la ſection ſera ordinairement ſolide à cauſe de l'inégalité des Ellipſes du cylindre & du ſphéroïde, ce qu'il eſt aiſé d'appercevoir.

Or parce que toutes les ordonnées de cette ſection doivent être terminées à la ſurface du cylindre auſſi bien qu'à celle du ſphéroïde, il ſuit qu'elles doivent toutes avoir un rapport d'égalité avec celles de l'Ellipſe plane, qui eſt la ſection oblique du cylindre ſuivant la ligne AB, ce que nous avons aſſez expliqué aux Theorêmes IX & X. pour qu'il ne ſoit pas néceſſaire d'entrer ici dans un plus grand détail. Il y a même ſi long-tems que nous rebattons la même démonſtration, appliquée à differentes occurrences, que je crains que le Lecteur ne ſe trouve offenſé de la défiance qu'il ſemble qu'on aît de ſa pénetration, en entrant dans un trop grand détail.

Corollaire.

On peut facilement appercevoir les changemens que les cylindres ſcalenes cauſeroient aux ſections faites par la rencontre des ſurfaces des ſphéroïdes ; puiſque les ſections obliques, qu'on a ſuppoſé Elliptiques, peuvent être circulaires, & les perpendiculaires aux axes des Ellipſes.

Application à l'uſage.

Cette propoſition & la précedente font voir quelle eſt la Courbe de l'arête d'enfourchement d'un berceau, qui rachete une voute ſphéroïde ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, ou directement ou obliquement. Ce cas n'eſt pas rare dans l'Architecture, telles ſont les lunettes de la voute ſphérique ſurbaiſſée de la Chapelle du St. Sacrement du Val de Grace, dont les Naiſſances ſont audeſſus de celles du cû-de-four, ou hémiſphéroïde applati.

THEOREME XXXVIII.

La Section faite par la rencontre des Surfaces d'un Sphéroïde & d'un Cône, dont l'Axe rencontre celui du Sphéroïde, perpendiculairement ou obliquement, eſt ordinairement Courbe à double Courbure, telle qu'eſt l'Ellipſoïdimbre; mais dans certains cas elle peut être une Ellipſe Plane.

La démonſtration en eſt aiſée; car 1.° ſi l'axe du cône SC paſſe hors du centre C du ſphéroïde, ou qu'il y paſſe, mais qu'il coupe obliquement ſon axe FG, comme celui du cône D*s*E, il eſt clair dans ces deux circonſtances, que le plan perpendiculaire à celui qui paſſe par les axes SC du cône, & FG du ſphéroïde, qu'on ſuppoſe auſſi, (comme nous l'avons toujours fait) paſſer par les points communs aux deux ſurfaces A & B, où *a* & *b* fera deux Ellipſes, l'une dans le cône coupé obliquement, comme en a*b*, l'autre dans le ſphéroïde, leſquelles ne feront les mêmes que lorſque leurs deux axes feront égaux, hors de ce cas ces ſections étant inégales, il eſt clair que la ſection ſolide ſera une courbe à double courbure, telle que celle que nous avons appellé Ellipſoïdimbre, qui aura des excès ou des défauts ſur l'Ellipſe plane du cône, dans le rapport des profondeurs de l'axe courbe. 2.° Si l'axe du cône paſſe par le centre C du ſphéroïde, & perpendiculairement à ſon axe FG, il ſe fera deux ſections en AB, dont l'une ſera un cercle dans le cône, & l'autre une Ellipſe dans le ſphéroïde; & par conſéquent la ſection ſolide ſera une courbe à double courbure de même eſpece que les précedentes, avec cette difference que les

excès ou les défauts de ces ordonnées ſur la ſection plane du cône ſeront comparez à un cercle & non pas à une Ellipſe.

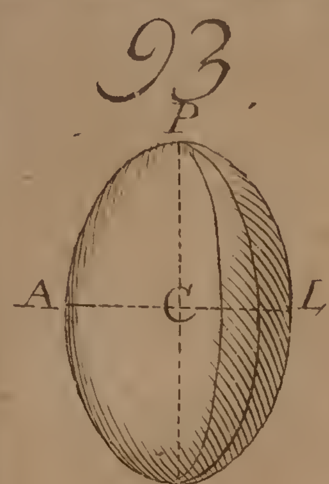
Application à l'uſage.

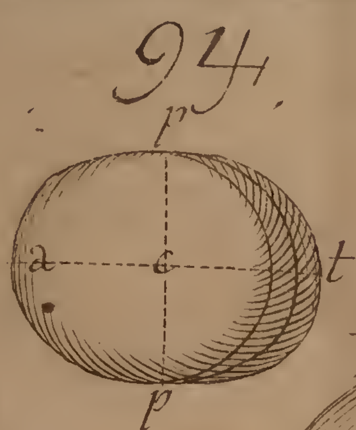
Les lunettes évâſées dans les voutes en cû-de-four ſurhauſſées ou ſurbaiſſées, ou *ſur un plan Ovale*, c'eſt-à-dire, un ſphéroïde oblong ou applati, ſont le ſujet de ce Theorême, qui fait voir que l'arête d'enfourchement eſt à double courbure, lorſque l'axe de la lunette, c'eſt-à-dire, la direction de ſon milieu tend au centre. 2.° Qu'elle l'eſt ordinairement ſi elle eſt biaiſe, & que cependant il peut arriver dans ce cas qu'elle ſoit Ellipſe plane.

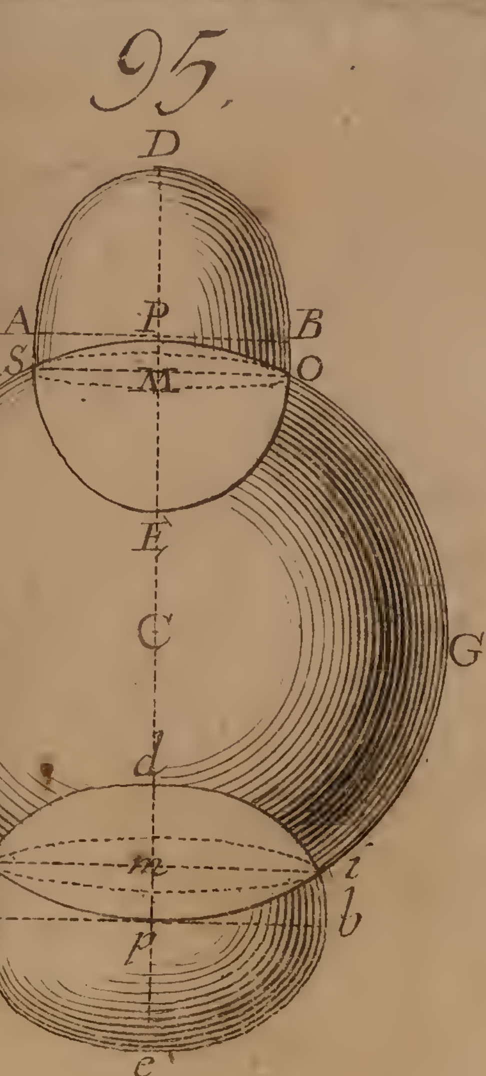
Nous n'ajoutons rien ici des courbes compoſées des ſections des ſphéroïdes, nous croyons en avoir dit aſſez ci-devant pour mettre le Lecteur en état d'en juger par la comparaiſon des précedentes des autres corps ronds, il eſt tems d'en venir aux Problêmes, qui donnent les moyens de tracer toutes ſortes de ſections.

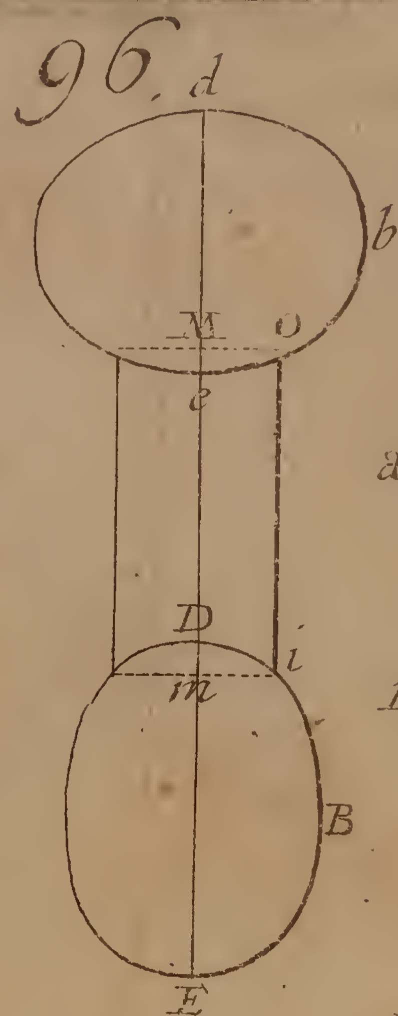
Si quelqu'un eſt curieux d'entrer d'une maniere plus ſçavante & plus generale dans la Theorie des courbes à double courbure, il peut s'inſtruire parfaitement dans le beau traité de M. Clairaut, dont nous avons parlé. Il ne faut pour l'entendre qu'une médiocre connoiſſance du calcul Algebrique, tant il eſt clair & méthodique dans ſes démonſtrations.

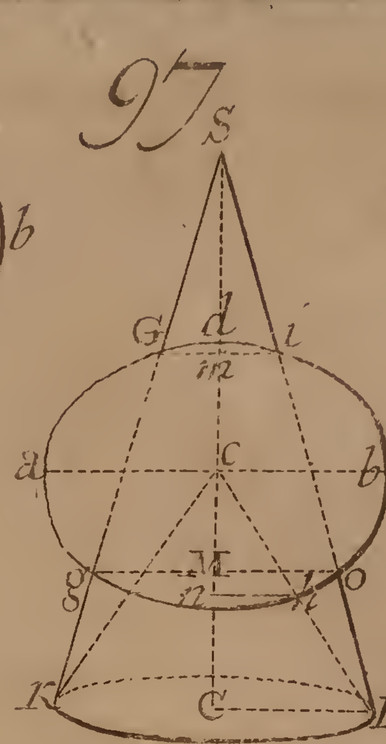


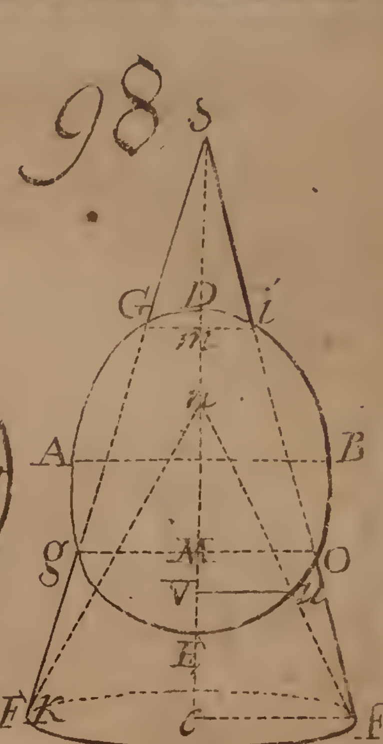

93.
P
A
C
L
p

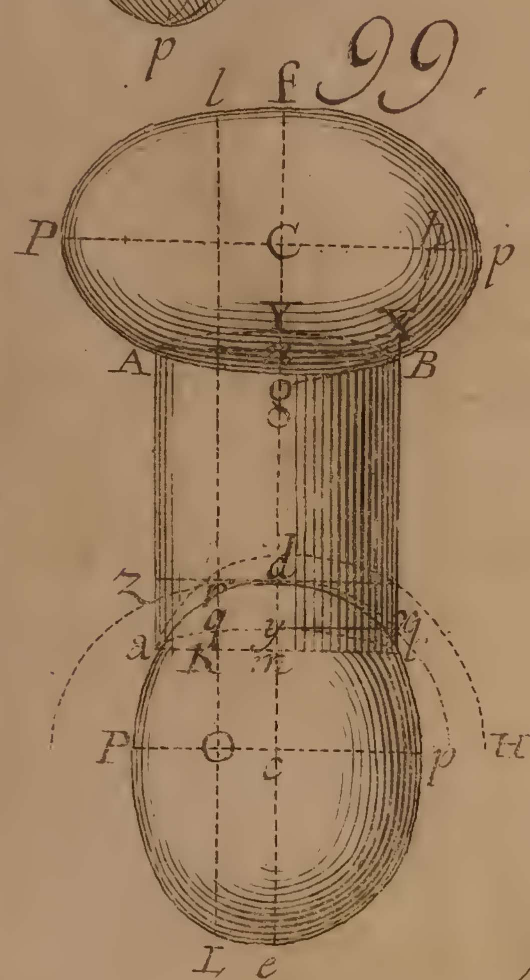

94.
p
a
c
t
p

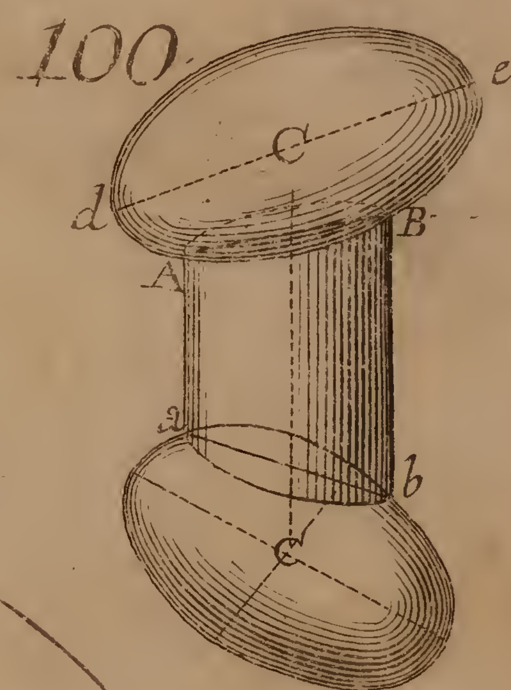

95.
D
A
P
B
S
M
O
E
F
C
G
d
m
i
a
p
b
e

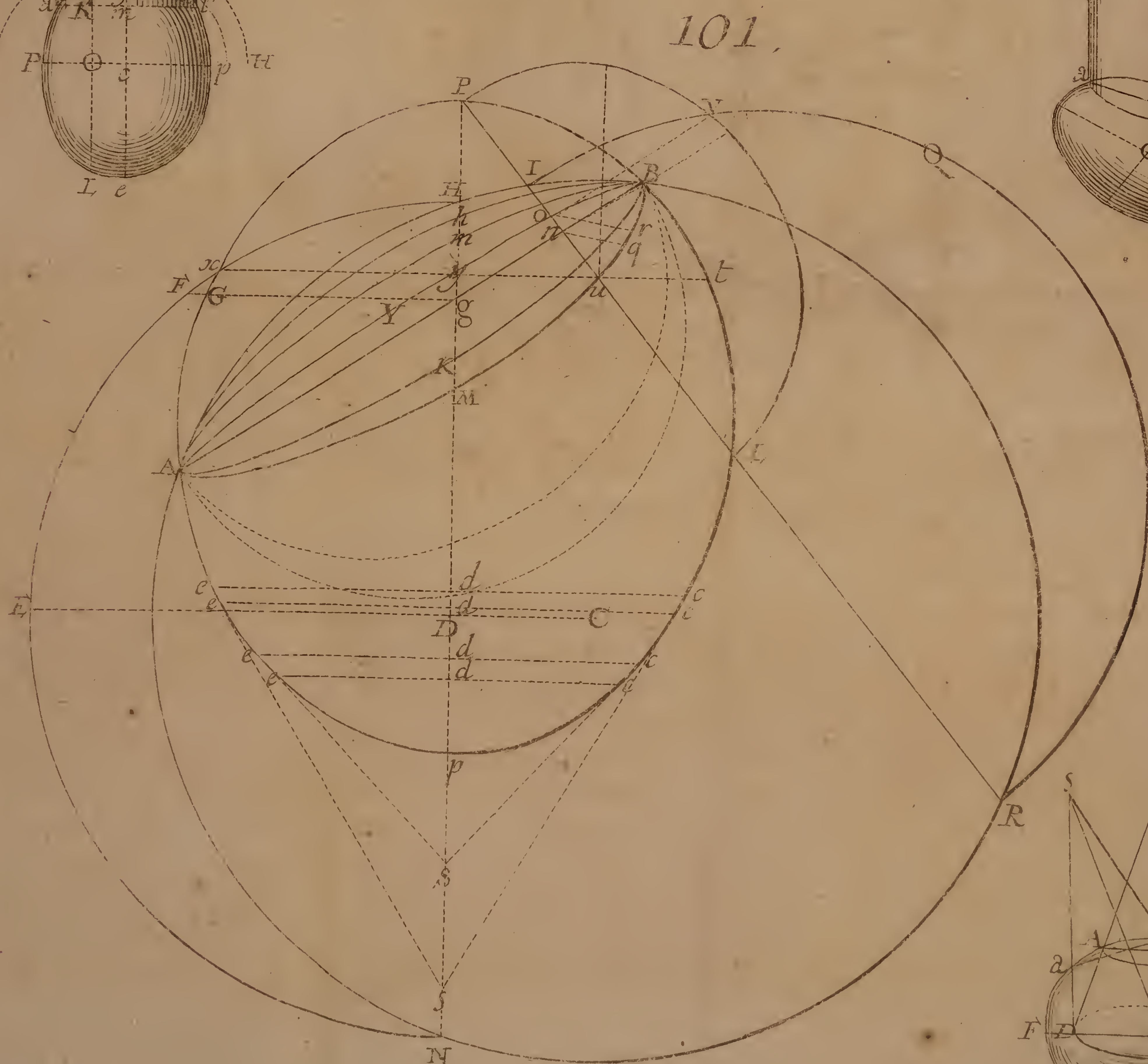

96.
d
b
M
o
e
D
i
m
B
E

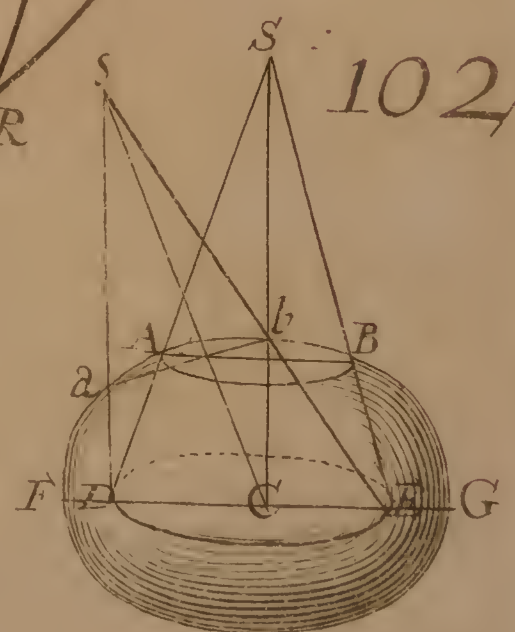

97.
S
G
d
i
m
a
c
b
g
M
n
h
o
K
C
F

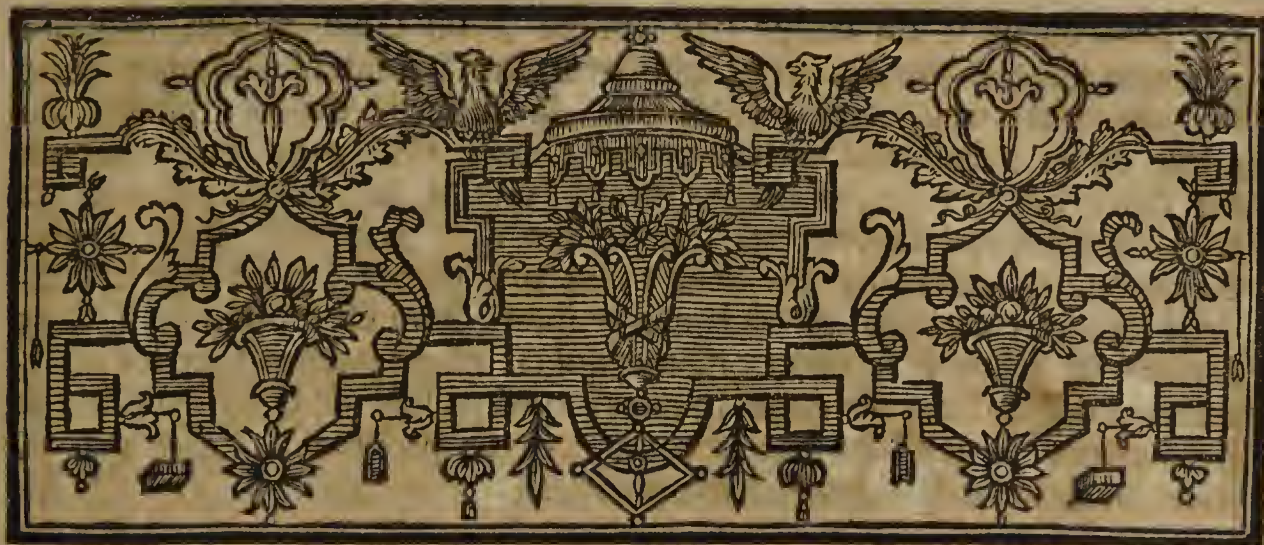

98.
s
G
D
i
m
A
B
g
M
o
V
E
K
c
F


99.
l
f
P
C
p
A
B
g
d
P
c
p
H
L
e


100.
e
C
d
B
A
a
b
c


101.
P
N
I
B
O
H
h
m
F
G
Y
g
K
M
u
t
A
L
E
D
C
d
p
S
R
N


102.
S
A
b
B
a
F
C
G



TRAITÉ DE STEREOTOMIE.

LIVRE SECOND.

De la Deſcription des Lignes Courbes formées par la ſection des Corps.



LES Corps peuvent être coupez par des ſurfaces planes ou par des ſurfaces courbes.

Les lignes courbes formées par les ſections de la premiere eſpece, peuvent être décrites ſur des ſurfaces planes & ſur des ſurfaces courbes; mais celles de la ſeconde eſpece ne peuvent être exactement décrites, que ſur des ſurfaces courbes, ſi j'en excepte peu de cas. La raiſon eſt que les lignes courbes formées par l'interſection des ſurfaces de deux corps, peuvent être conſiderées comme étant ſur la ſurface qui coupe, & ſur celle qui eſt coupée; puiſque l'interſection eſt commune à tous les deux;

par conſéquent ſi on coupe une ſphère , un cône ou un cylindre par une ſurface plane , la courbe peut être conſiderée comme étant ſur le plan qui coupe , & ſur la ſurface de la ſphère du cône ou du cylindre , qui eſt coupé ; ainſi elle peut être décrite ſur deux ſurfaces de differente eſpece, l'une plane, l'autre courbe, & ſi les ſurfaces qui ſe coupent ſont toutes deux courbes, il eſt à préſumer que la ſection ne convient point aux planes ; il en faut cependant excepter certains cas, où la même interſection eſt commune à deux ſurfaces courbes & à une troiſiéme qui eſt plane ; telles ſont les interſections des ſurfaces de deux ſphères, quelquefois de deux cylindres & de deux cônes en certaines circonſtances de poſition & de grandeur, dont nous avons parlé au Livre précedent.

PREMIERE PARTIE.

De la Deſcription des Sections Planes ſur des Plans.

LA plûpart des ſections planes que nous avons pour objet dans cet Ouvrage, ſont ces quatre ſortes de courbes qu'on appelle les *Sections Coniques*; quoiqu'elles ne ſoient pas toutes particulieres au cône, puiſqu'il y en a deux qui conviennent auſſi à la ſphère & au cylindre.

Nous en avons cependant quelqu'autres à décrire, comme la ſection plane de l'Anneau & la Spirale : cette derniere n'eſt pas proprement une ſection de corps ordinaire, à moins qu'on ne la conſidere comme celle d'un coquillage ; mais à cauſe qu'elles ſont de peu d'uſage en comparaiſon des autres, nous jettons toute notre attention ſur les ſections côniques.

La maniere de les décrire n'eſt pas toujours la même, on eſt ordinairement aſſujetti dans la pratique à les faire paſſer par certains points ou lignes données en dedans ou en dehors, qui en changent totalement la deſcription ; c'eſt ce qu'on appelle les *Données*, qu'on peut tellement varier, que la ſolution des Problemes néceſſaires, pour réſoudre tous les cas poſſibles, fourniroit aſſez de matiere pour un gros Volume ; nous nous bornons ici à ceux qui peuvent être d'uſage dans l'Architecture.

CHAP.

CHAPITRE I.

De la Description du Cercle.

NOus avons peu de chose à dire du Cercle, parce que les Elemens ordinaires de la Geometrie en traitent assez au long pour la pratique des arts, & que nous supposons dans tout cet Ouvrage, que le Lecteur est initié dans cette science. Nous voulons seulement suppléer à ce qu'on n'y trouve qu'indirectement pour la solution d'un cas qui se presente assez souvent en Architecture, tant pour l'exécution des Traits des voutes, que de certains arondissemens de mur, dont le Rayon est si grand, qu'on ne trouve pas commodément une place pour le faire mouvoir sur un centre; soit parce que le lieu du centre est embarassé, ou enfermé dans quelque bois ou bâtiment, soit parce que la longueur de ce Rayon cause de la difficulté dans l'usage du *Simbleau*; car si on se sert de Corde, elle s'alonge & altére la régularité du Contour; si on lui substitue une Chaine qui semble ne devoir pas s'alonger, elle a aussi ses inconveniens; car le frotement interrompt son mouvement, lorsqu'elle est posée à plat sur une aire horisontale, ou inclinée, & fait varier son extension quelque précaution qu'on prenne, ce qui doit arriver nécessairement; car il est démontré en Méchanique que quelque petit que soit ce Frotement, ou son poids, si elle étoit penduë par ses extremitez, elle ne peut se mettre en ligne droite, il faut que cette Puissance du milieu, Frotement ou Pesanteur s'anéantisse, & pour que la Courbure reste toujours égale, il faut que la Puissance, ou l'effort de la main qui tire, soit toujours parfaitement égal, ce qui est moralement impossible; de sorte qu'on ne peut s'assûrer de décrire régulierement un Arc de cercle par ce moyen; celui de faire un Simbleau avec des perches est le plus sûr, mais il a ses incommoditez, lorsqu'il en faut ajoûter plusieurs bout-à-bout, il faut le soûtenir bien droit pour le faire mouvoir sans le plier, & supposer que le milieu n'est occupé par aucun mur ni materiaux. Il est donc fort agréable de pouvoir éviter toutes ces incommoditez par une pratique de Géometrie que voici.

PROBLEME I.

Par trois points donnez tracer un Arc de Cercle par plusieurs autres points trouvez, ou par un mouvement continu, sans le secours du Centre.

On ne peut à moins de trois points déterminer ni tracer un arc de Cercle, puisque par deux points donnez, on en peut faire passer une infinité de differentes grandeurs, mais ces points peuvent être donnez dans des circonstances qui occasionnent differentes manieres de

le tracer : Car 1°. ou on les donne tous trois à la circonference, 2.° ou l'on n'y en donne que deux, & le troisiéme en idée pour le centre, en déterminant seulement la longueur du Rayon, sans en marquer la position à l'égard des points donnez.

Au premier cas les points peuvent être donnez à distances égales entre eux, ce qui arrive souvent en Architecture, où l'on détermine ordinairement les points des Naissances, & celui de la clef pour les voûtes, ou celui du milieu pour les arondissemens des murs ; ou bien ces points sont donnez à distances inégales. Ces differentes circonstances peuvent donner occasion à differentes manieres de décrire l'arc.

Fig. 103. Soit [*Fig.* 103.] les points ADB donnez aux deux extremitez & au milieu de l'arc qu'on doit tracer. Ayant tiré les cordes AB, AD, DB, on fera du point A pour centre & d'une ouverture de Compas prise à volonté, l'arc *f* K terminé en *f* & en K aux cordes AD & AB, puis de la même ouverture, & du point B pour centre, on décrira l'arc indéfini FE, dont le point F est sur la Corde DB; ensuite par le point A on tirera autant de lignes droites qu'on voudra avoir de points de l'arc proposé entre D & B, par exemple ici pour trois, les lignes AX, A*x*, A*y* qui couperont au hazard l'arc *f* K aux points *g h i*, ensuite on portera les parties de cet arc, prises entre *f* & K, sur l'arc F E en dehors de F en E; ainsi *fg* en FG, *fh* en FH, *fi* en FI, & par le point B & les points F G H I on tirera des lignes droites, dont les sections avec les précedentes donneront autant de points de l'arc demandé, sçavoir BI, coupant A*y*, donnera le point *y*; BH, coupant A *h*, donnera le point *x*, & BG, coupant A*g*, le point X, on en fera de même pour l'autre côté AD.

Fig. 104. Secondement, si le point donné D n'est pas au milieu comme à la Fig. 104. on peut trouver plusieurs points correspondans à ce point D consideré comme dans un plus grand ou plus petit arc. Du point a pour centre & pour Rayon *a* D, ayant fait l'arc DE ; du point *b* pour centre & de la même ouverture de compas, on fera l'arc *e d* égal à DE, qui donnera un quatriéme point *d*, puis on tirera la droite D *b* qui coupera cet arc en F. du point D pour centre & de la même ouverture de compas *a*D on fera l'arc *f* 3 = F *d* qui donnera le point 3. on tirera *d a* qui coupera l'arc *f* 3 en G ; du point *a* pour centre & de la distance *d* 3. pour Rayon, on fera l'arc *g* 4. = G 3. qui donnera le point 4 ; ainsi de suite, on trouvera autant de points qu'on voudra, par lesquels avec une Regle pliante on tracera l'arc a D *b*, qui est celui qu'on cherche.

Demonstration.

Dans la premiere construction, où les angles DAB & ABD sont é-

gaux, les lignes AX, Ax & Ay font des angles avec la corde AB plus petits que DAB de la quantité d'une partie de l'arc fk, qui en eſt la meſure : par exemple AX, de la quantité fg, de laquelle on a augmenté l'angle ABD, en tirant par le point G au dehors, la ligne BX, qui rencontre AX au point X; donc la ſomme des angles XAB, XBA eſt égale à celle des angles DAB, DBA, dont le ſupplément a deux droits, AXB eſt égal à l'angle qui eſt à la circonference ADB : donc (par la 21. du 3. Livre d'Euclide) le point X eſt à la circonference du même arc de cèrcle, que les points donnez ADB. ainſi des autres x & y.

Dans le deuxiéme cas il eſt viſible qu'on a fait l'angle bda = a Db, de même que l'angle Dbd = bD 3; a d 3. = da 4. donc tous les points trouvez ſont dans le même arc que les donnez a Db, puiſque les angles faits dans chaque ſegment ſont toûjours égaux à ceux que font les cordes des points correſpondans D & d, d & 3, 3 & 4, D & 5, &c. *ce qu'il falloit faire.*

Corollaire.

De la proprieté du cercle dont nous venons de faire uſage, on tire une maniere *de décrire un Arc de Cercle organiquement par un mouvement continu ſans le ſecours du Centre & ſans connoître la longueur du Rayon*, mais ſeulement par le moyen de trois points donnez.

Car (*Fig.* 107.) ſi l'on fait avec deux regles de bois GE, EI aſſemblées par le moyen d'une troiſiéme FH, un angle GEI égal à l'angle ABD, dont le ſegment AEBD eſt capable, & qu'on faſſe couler cet inſtrument entre deux cloux ou chevilles A, D, le crayon qui ſera au ſommet E de l'angle que font ces deux regles, tracera l'arc demandé AEBD, lequel paſſera par les trois points donnez ABD. *Fig.* 107.

Il faut remarquer que chacune des regles EG, EI doit avoir en longueur au moins l'intervale des deux points A & D les plus éloignez, afin que le ſommet E étant tranſporté en D, la branche EG touche & s'appuye encore au point A, qui en doit regler la direction.

Autrement.

On peut encore tracer l'arc demandé par un mouvement continu avec une autre machine, mais plus compoſée que la précedente. Ce ſont deux rouës AB, DE de diametres inégaux, aſſemblées ſur un eſſieu commun FC, ſur lequel la plus grande AB eſt fixe, & l'autre ED eſt mobile, en ſorte qu'on peut l'approcher ou l'éloigner de la premiere au-

tant qu'il eſt beſoin, & l'arrêter par quelque cheville à la diſtance où elle doit être ; enſuite appuyant ſur l'eſſieu vers le milieu M on fait tourner cette eſpece de Train boiteux, dont les rouës décrivent deux arcs de cercles concentriques, il eſt clair que leurs rayons ſont d'autant plus longs que les diametres des rouës ſont moins inégaux, & qu'elles ſont plus éloignées entre elles ; enſorte que ſi elles étoient infiniment peu differentes, leurs traces ſeroient des lignes droites.

Cette Machine, qui eſt de l'invention De Perrault, eſt plus ingénieuſe qu'utile ; car il eſt moralement impoſſible de la faire mouvoir avec l'uniformité qu'elle demande, puiſque l'experience nous fait voir qu'il eſt très difficile de conduire en ligne droite un Train de deux rouës égales, à plus forte raiſon en ligne courbe deux inégales ; ſoit par le défaut de la direction de la main, ſoit par l'inégalité du frottement de l'eſſieu & du terrain ſur lequel on la fait rouler, de ſorte qu'on ne pourroit s'aſſûrer de la régularité de l'arc qu'on veut tracer. Quoiqu'il en ſoit de l'exécution, ſi l'on veut connoître la longueur du Rayon que la trace de la grande rouë décrit, il n'y a qu'à faire cette Analogie ; comme la difference A *d* des deux Rayons des rouës A C, D *c* eſt au diametre AC de la grande, ainſi la diſtance D *d* des deux rouës eſt au Rayon SC du cercle ou arc que la grande décrit, d'où par l'inverſe on tire l'Analogie néceſſaire pour trouver la diſtance des deux rouës, lorſque le rayon SC eſt donné, en faiſant CA : CS : : *d* A : *d* D, ce qui eſt clair à la ſeule inſpection de la figure, à cauſe des triangles ſemblables S C A, D *d* A.

Par où l'on voit qu'avec deux petites rouës de 6. à 7. pouces de diametre & un petit eſſieu, on pourroit tracer les ceintres des plus grandes voutes, ſi l'exécution répondoit à la juſteſſe du principe ſur lequel la machine eſt fondée, mais je n'en conſeille à perſonne l'uſage, par les raiſons que j'en ai dit.

Erreur du Trait de Maître Blanchard.

Maitre Blanchard dans ſon traité de la Coupe des bois [page 6.] a voulu réſoudre le Probleme, dont il eſt ici queſtion, par un *Trait* dont il eſt à propos de montrer l'erreur pour en déſabuſer les Ouvriers, qui n'ont pas aſſez de connoiſſance pour l'appercevoir.

Supposant les trois points donnez A D B [*Fig.* 105.] il décrit un Parallelelograme AEFB, il tire les Cordes AD, DB, qu'il diviſe en un certain nombre de parties à volonté, par exemple ici en quatre, aux points *b*, *c*, *d*, ſur leſquels il éleve autant de perpendiculaires *bx*, *cy*,

dz. Puis divisant le côté AE en un même nombre de parties égales aux points *e*, *f*, *g*, il tire des lignes droites au point D, qui coupent les précedentes aux points *x y z*, qu'il prétend être à la circonference du même arc de cercle où sont les trois points donnez ADB.

Il est très aisé de faire voir qu'il se trompe grossierement par la seule inspection de la figure de sa construction, faite dans un quart de cercle comme en DG, puisqu'elle donne au lieu du quart de cercle DSG une courbe DYZG, qui est considerablement au dedans; mais il convient de justifier la figure par le raisonnement Geometrique; il est démontré dans les Elemens d'Euclide au l. 3. prop. 14, que les lignes équidistantes du centre dans le cercle sont égales entr'elles; par conséquent les lignes LX, *i* Z équidistantes [par la construction] du milieu K de la corde DG, c'est-à-dire, du Rayon CS, doivent être égales; mais elles ne le sont pas, donc elles ne sont pas terminées à la circonference du cercle. *Fig.* 105.

Pour voir cette inégalité d'un coup d'œil, il n'y a qu'à porter la longueur G*m* en DM, & tirer MG qui coupera LX environ au tiers de sa longueur en *x*, quoique le point X soit déja au dedans du Cercle DSG, par conséquent il s'en faut d'environ la moitié de la longueur *i z* que le point *z* parvienne au cercle en *r*.

Demonstration.

Pour le démontrer soit, [*Fig.* 105.] la ligne KY prolongée en H, à laquelle on menera par les points *o* & *m* les Paralleles *op*, *mq*.

A cause des triangles semblables GHK & G*op*, on aura G*o* : GH : : G*p* : GK; mais G*o* = $\frac{3}{4}$ de GH, donc G*p* sera aussi les $\frac{3}{4}$ de GK; par conséquent *p*K est la huitiéme partie de DG, & D*p* les $\frac{5}{8}$; or à cause du triangle isoscele rectangle *op* G, la ligne *po* sera égale à *p*G.

Presentement pour rendre la démonstration sensible aux Ouvriers, nous supposerons chacune des huit parties soudivisée en dix, afin de faire mieux connoître la différence des longueurs des lignes LX & *iz*.

A cause des triangles semblables DLX, D*po*, on aura D*p* [50.] : *po* [30.] : : DL [20.] : LX [12.] & à cause des triangles semblables D*qm*, D*iz*, on aura D*q* [70] : D*i* [60] : : *qm* = *q* G [10] : *iz* $8\frac{4}{7}$; donc les lignes LX & *iz* sont entr'elles comme 12. est à $8\frac{4}{7}$, c'est-à-dire, qu'elles sont considerablement inégales, par conséquent que les points X & *z* ne peuvent être à la circonference du même cercle; on ne voit par cette démonstration que le rapport de ces lignes entr'elles; si quelqu'un est curieux de connoître plus precisément que par le tracé de la figure, ce-

lui qu'elles ont à celles qui parviennent jusqu'au cercle en S ou en *r*; on le pourra par la maniere suivante.

Tous ceux qui sont un peu initiez dans l'Algebre, sçavent que l'équation primitive du cercle (nommant *d* le diametre, *x* l'abscisse, & *y* l'ordonnée) est $dx - xx = yy$; ainsi on cherchera le diametre en quarrant DK & KC, & tirant la racine quarrée de leur somme, qui sera égale au Rayon DC, & son double au diametre $= d$, ensuite pour avoir l'abscisse *x*, on ajoûtera la longueur K*i* au Rayon, ou on en retranchera KL; par le moyen de ces deux grandeurs connuës, on aura $dx - xx$, dont on tirera la racine quarrée, de laquelle on ôtera la longueur CK, le reste sera la longueur *ir*, qui parvient au cercle en *r*; & par ce calcul on trouvera que le point X est au dedans du cercle d'environ une partie de trois, & *z* de quatre, je dis environ à cause des fractions qui restent.

Ce que nous démontrons ici dans le quart de cercle, se peut démontrer facilement de tous les arcs d'un moindre nombre de degrez; on trouvera seulement que la difference des longueurs des lignes LX & *iz* diminuera, mais elle subsistera toûjours; ainsi la pratique de Maître Blanchard sera toûjours fausse pour faire un arc de cercle, elle pourroit seulement servir à faire un arc de section cônique ouverte, à laquelle il n'a pas pensé, & dont il n'est pas question.

Il nous reste à donner la solution du *second cas* de ce probleme, où l'on ne suppose que deux Points donnez à la circonference de l'arc de cercle demandé, & au lieu du troisiéme point, la longueur du Rayon indépendamment de sa position qui donneroit le centre, duquel on ne veut, ou on ne peut faire aucun usage.

Fig. 108. Soient [*Fig.* 108.] les deux points donnez L & M, ayant tiré la ligne LM de l'un à l'autre, on aura la corde de l'arc demandé, & parce que le rayon est donné de longueur, on aura les trois côtés d'un triangle Isoscele LMC, dont on peut trouver l'angle C par la Trigonometrie, ou méchaniquement par un triangle semblable fait par le moyen d'une Echelle. La moitié de l'angle LCM sera le supplément à deux droits de l'angle LNM, nécessaire pour tracer l'arc demandé par le moyen de la description Organique, dont nous venons de parler au cas precédent, avec deux Régles qui feront l'angle LNM, dont le segment LHNM est capable.

Fig. 109. Ou bien on cherchera [*Fig.* 109.] le point X milieu du segment AXB par le moyen de la fléche MX; pour cet effet, ayant quarré le Rayon donné AR, & la moitié AM de la corde AB, on retranche-

ra le quarré de AM, & du restant on extraira la racine quarrée du quarré de AR pour avoir le côté MR, lequel étant retranché du Rayon AR, donnera MX pour la flêche que l'on cherche, & par conséquent le point X milieu de l'arc demandé. Par le moyen de ce point X & des deux autres A, B on tracera l'arc par plusieurs points, comme nous l'avons dit au premier cas.

On peut proposer un *troisiéme cas* de ce probleme, en donnant une mesure déterminée au contour de l'arc qu'on veut décrire, au lieu des deux points de ses extrêmitez, & ensuite la longueur du Rayon; alors on trouvera l'angle LMN par un calcul assez simple. *Fig.* 108.

Premierement par le moyen de la longueur du Rayon, il sera aisé de trouver la circonference entiére en le doublant, & faisant l'analogie ordinaire, comme 7. à 22. ou 100, à 314; ainsi le diametre donné est à la circonference totale mesurée en pieds, pouces & lignes. Ensuite par une seconde Analogie, on trouvera le nombre de degrez que doit contenir l'arc d'une longueur donnée, en disant comme le nombre des pieds, pouces & lignes, trouvé par la premiere analogie pour la circonference entiére, est au nombre des pieds, pouces & lignes de l'arc donné en dévelopement ou rectification : ainsi 360. degrez, valeur totale de la circonference, est au nombre de degrez que vaut l'arc proposé, dont la longueur du contour est donnée, alors on aura un angle dont le supplément à deux droits, sera l'angle cherché LNM, ainsi supposant l'angle trouvé de 60. degrez, on l'ôtera de 180. valeur de deux droits; il restera pour l'angle cherché 120. degrez, qu'on formera avec deux régles, si on veut décrire l'arc organiquement, comme nous l'avons dit au premier cas.

Démonstration du 2.ᵉ & 3.ᵉ Cas.

L'angle LNM vaut la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé, & l'angle L*d*M vaut de même la moitié de l'arc LNM, donc ils valent pris ensemble la moitié du cercle, c'est-à-dire deux angles droits; & par conséquent la moitié de l'angle LCM, qui est égale à l'angle L*d*M, par la 20. du 3.ᵉ d'Euclide, sera le supplément à deux droits de l'angle cherché LNM. *Ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Ce probleme est néceſſaire pour l'exécution de plusieurs Traits de la coupe des Pierres, où il faut tracer des arcs de cercle, dont les centres sont extrêmement loin, par exemple pour trouver l'arc de déve-

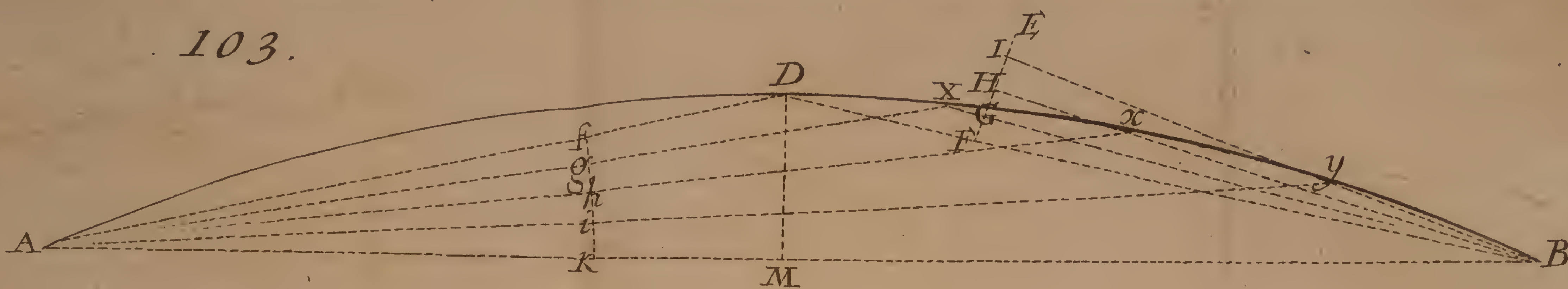
lopement de la base de la Porte en Tour ronde en Talud, qui est celle d'une portion de Cône, dont le sommet qui doit être à la rencontre des côtés du Cône prolongez, c'est-à-dire les côtés de la Tour en Talud, peut être à une distance considerablement éloignée de la base; supposant, par exemple que la Tour eut seulement 15. pieds de Rayon, 30. d'hauteur, & un dixiéme de Talud, le sommet du Cône, qui seroit le centre du dévelopement, seroit à 150. pieds loin de la circonference; ce qui rend les préceptes du Pere Deran & de son Sectateur M. de La Rue impraticables, sans le secours de ce probleme.

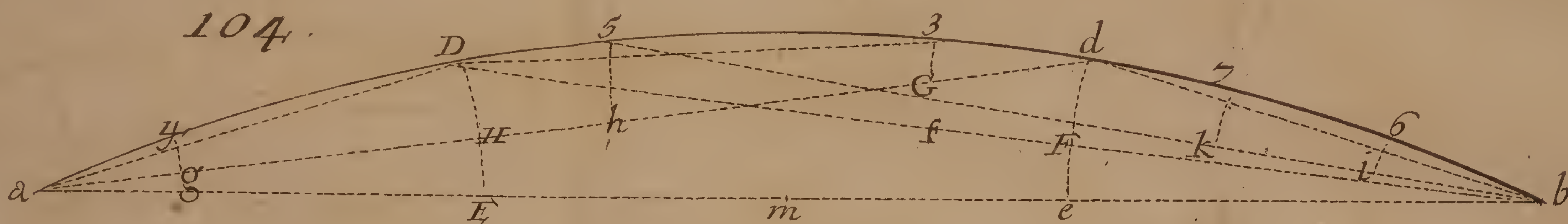
Il est encore nécessaire pour trouver les arcs des Panneaux de Doële des premieres Assises des voutes sphériques, sphéroïdes, & sur le Noyau dans le systéme de pratique qui exécute ces voutes par le dévelopement des cônes tronquez, comme nous le dirons en son lieu.

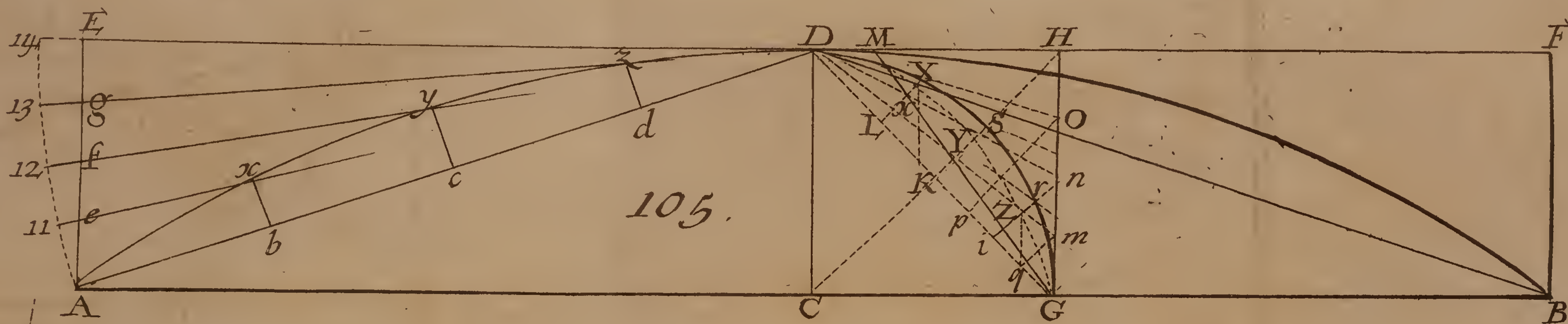
Je me serts ordinairement de la deuxiéme pratique du second cas pour faire les Arondissemens des Contrescarpes de nos Fortifications,
Fig. 109. par le moyen d'un panneau A *d e* B X fait d'une planche taillée, comme la partie hachée de la figure, que je mets sur le revêtement, le faisant courir de piquets en piquets; mais comme le Parement est en Talud, & que cet arc de cercle augmente de Rayon à mesure que le mur s'éleve, je fais faire un panneau convexe sur le derriere qui est à plomb, pour servir à jauger l'épaisseur qui régle le contour du Parement en Talud à chaque assise; & je trouve que cette méthode conduit facilement les Ouvriers.

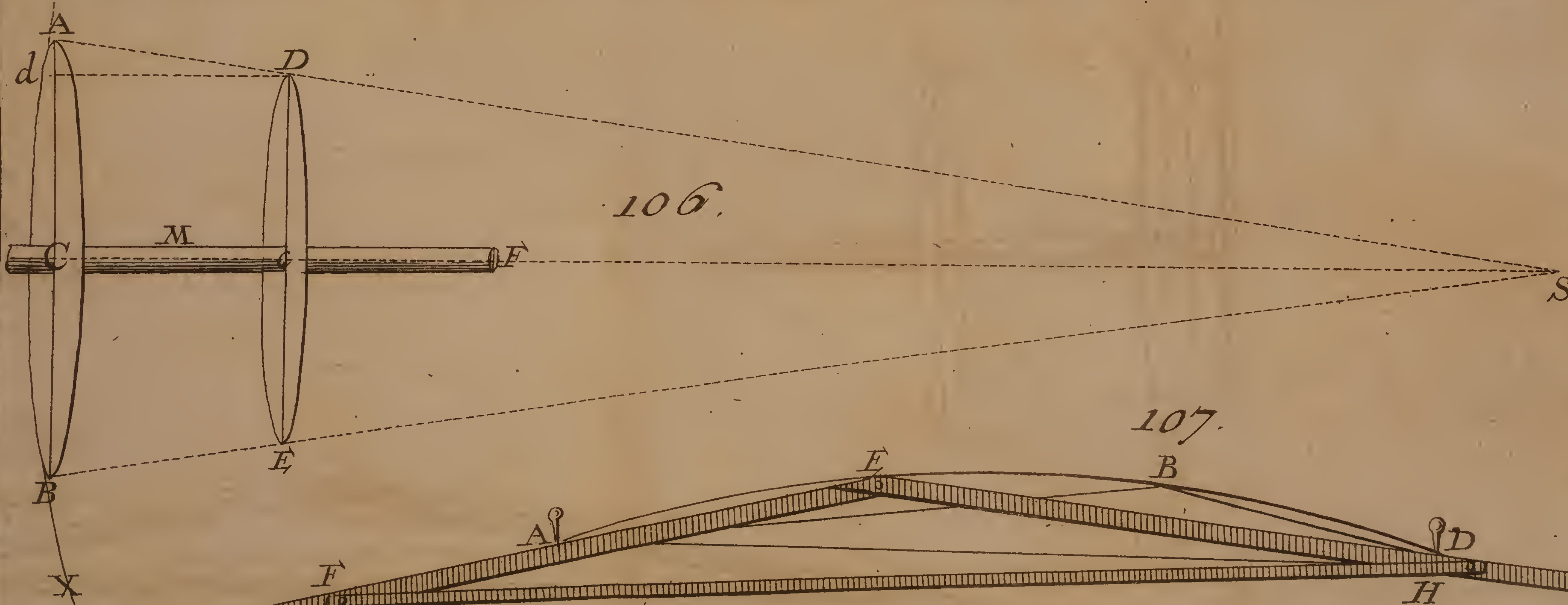
Si l'arc de cercle qu'on doit décrire, étoit si grand qu'on ne pût se servir du compas pour faire les angles qu'on doit prendre égaux entre eux, il faudroit se servir du *demi cercle* ou Graphométre, & de piquets d'alignement, au lieu de lignes tracées à la Régle ou au Cordeau, dont on trouveroit l'intersection par la rencontre des deux Rayons visuels des points A & B pour centre de l'instrument. C'est ainsi que l'Architecte de la nouvelle Ville de *Carls-Rouhe*, qu'a fait bâtir le Margrave de Bade-Dourlack, auroit pû tracer les Rûës concentriques au Château qui ont deux & trois cens toises de Rayon, comme je puis l'estimer à vûë d'œil.

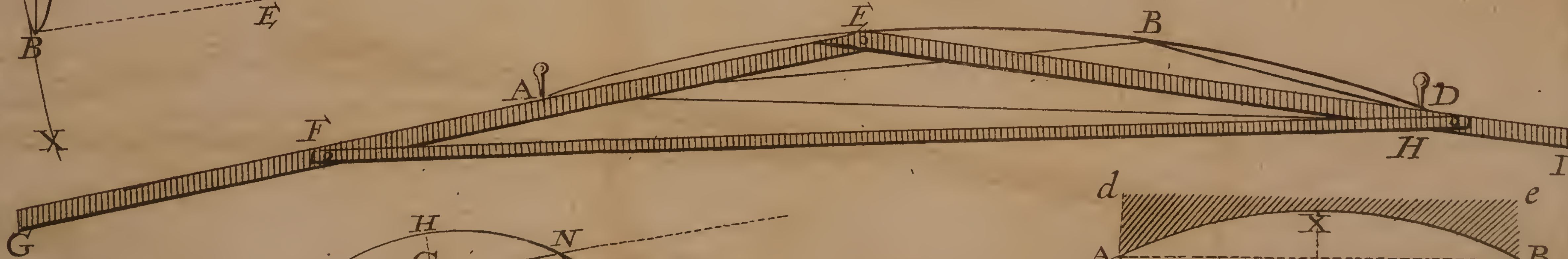
CHAPITRE

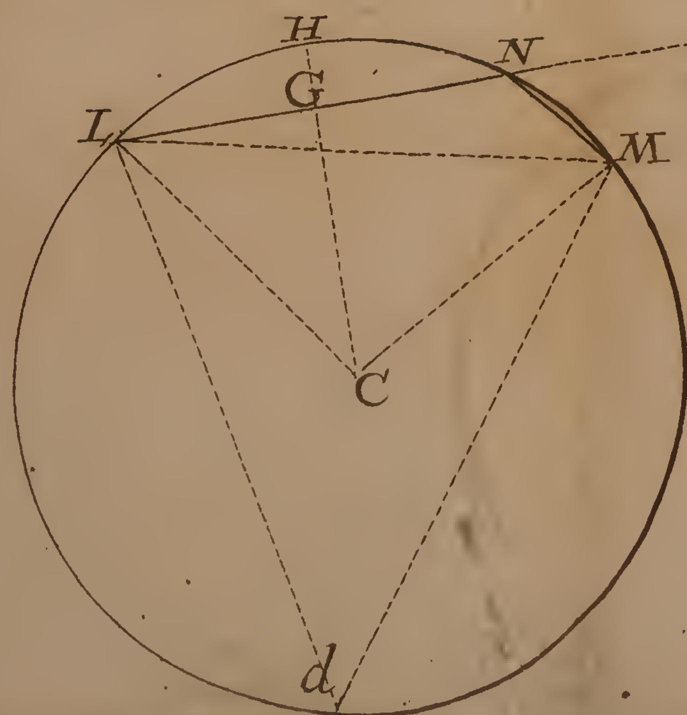

103.

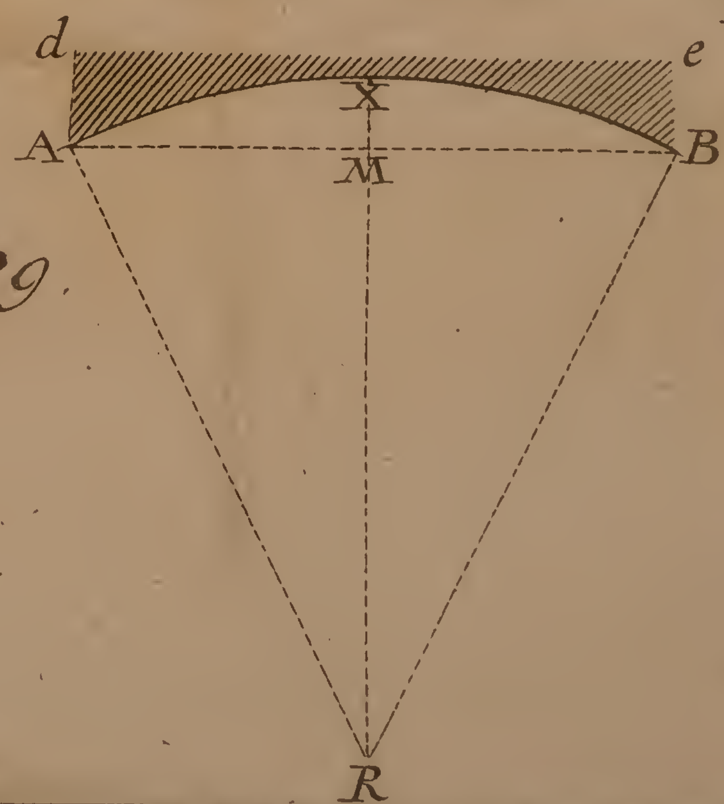

104.


105.


106.


107.


108.


109.

CHAPITRE II.

De l'Ellipse, premierement considerée comme étant faite.

Probleme II.

Trouver 1.° le Centre. 2.° les Diametres conjuguez 3.° les Axes 4.° les Foyers d'une Ellipse donnée.

1.° Soit l'Ellipse donnée DEIG [*Fig.* 110.] on tirera les lignes OO, *oo* paralleles entre elles, & terminées à la circonference de l'Ellipse. On les divisera en deux également en *r* & R, par où on fera passer une ligne DI qui sera un Diametre : le point C, milieu de ce diametre, sera *le Centre* que l'on cherche. 1°. Pour le Centre. *Fig.* 110.

2.° Si par le centre C on tire une ligne EG parallele à OO, cette ligne EG sera *un Diametre* conjugué au diametre DI; parce qu'il est parallele aux Ordonnées *or* OR & à la tangente T*t*, tirée par le point D du diametre DI. 2.° Pour un Diametre.

3.° Si du point C comme Centre & d'une ouverture de compas prise à volonté, on décrit un arc KH qui coupe la circonference de l'Ellipse en K & en H, & que de ces points comme centres, & d'une ouverture de compas prise aussi à volonté, on fasse une section de deux arcs de même rayon en Z, la ligne AB tirée par les points C & Z, & terminée à la circonference de l'Ellipse de part & d'autre, sera *un des Axes*, & la ligne LM, qui lui sera perpendiculaire, passant par le centre C sera *l'autre Axe.* 3.° Pour les Axes.

4.° Si l'on prend l'intervale AC avec un compas, & qu'on s'en serve comme de Rayon d'un Cercle, qui auroit L ou M pour Centre, faisant des arcs qui coupent l'Axe AB aux points F & *f*, ces points seront les *Foyers de l'Ellipse.* 4.° Pour les Foyers.

Demonstration.

Par la définition [Art. 20.] les Diametres sont des lignes qui coupent en deux également toutes les lignes paralleles entr'elles, par conséquent aussi la surface de l'Ellipse, puisqu'on peut considerer sa surface comme composée d'une infinité de lignes paralleles infiniment proches. Art. 20.

2.° Par la définition [avant l'Art. 24.] le diametre parallele à ces appellé *Conjugué.*

3.° Par la conſtruction, les points K & H ſont également éloignez du centre C, & l'on a fait AZ perpendiculaire ſur la Corde qui ſeroit tirée de H en K, laquelle ſeroit une double ordonnée, qu'elle couperoit en deux également, & à angle droit, ce qui ne convient qu'à un Axe par la définition.

Art. 28. 4.° Enfin les points F & *f* ſont les Foyers de l'Ellipſe, parce que la ſomme des lignes FL, L*f* eſt égale, par la conſtruction, à la ligne AB, & ſi les lignes FD, D*f* priſes enſemble lui ſont auſſi égales, le point D ſera à la circonference de l'Ellipſe. (Art. 29.)

USAGE.

On trouvera dans la quatriéme Partie de ce Traité des occaſions continuelles de faire uſage de ce Problême; parce que l'Ellipſe eſt la Courbe la plus ordinaire dans la coupe des Pierres.

Probleme III.

Par un point donné mener une Tangente à une Ellipſe donnée.

Le point donné peut être à la circonference, ou au-dehors.

Fig. 111. 1.° S'il eſt à la circonference, par exemple en D, [*Fig.* 111.] & que les Foyers F*f* ſoient donnez, on menera à ce point D des lignes FD, *f*D qui feront un angle en D, qu'on diviſera en deux également par la ligne D*n*; ſi par ce point D on fait TD perpendiculaire à D*n*, cette ligne TD ou T*t* ſera la Tangente que l'on cherche.

Ou bien on fera *f*a = au grand Axe GA, on tirera aF qu'on diviſera en deux également en *t* d'où tirant une ligne au point donné D, la ligne *t*D ſera la Tangente demandée.

Fig. 111. 2.° Si on n'a pas les Foyers; ayant trouvé le centre C [*Fig.* 111.] on menera par le point donné D le diametre DB, & un autre à volonté comme GA, par l'une des extrêmitez duquel A ou G on menera AE parallele à DB, qui rencontrera l'Ellipſe en E, par où l'on menera au point G la ligne EG, laquelle ſera une Ordonnée au diametre DB, à laquelle ſi on tire une parallele par le point D, cette ligne *t*T ſera la Tangente demandée.

3.° Si le point donné D eſt hors de l'Ellipſe comme en *d*, ayant mené par le centre C la ligne *d*C, on fera CK perpendiculaire à C *d*, & égale à CL interſection de la ligne C *d*, & de la circonference de l'Ellipſe; enſuite ayant tiré *d*K, on lui fera la perpendiculaire KH, qui coupera *d* C prolongée en H, on portera la diſtance CH en C *i* ſur la ligne C *d*, enſuite on menera au diametre L *m* une ordonnée quelconque * par la conſtruction précedente, ce qui eſt aiſé; car il ne s'agit que de mener une parallele à *m*L par un point pris à volonté, comme *o*P, la diviſer également en deux au point *q*, & mener *q*C ou ſa parallele *or*, à laquelle on menera une parallele *i*K par le point *i*, qui rencontrera la circonference en K, la ligne menée de ce point K au point donné *d* hors de l'Ellipſe ſera la Tangente que l'on cherche. * Voyez l'art. 36. l. 1.

Et ſi l'on prolonge K *i* en *k* ce point ſera encore à l'attouchement d'une autre ligne menée de *d* en *k*, de ſorte que du même point donné *d*, on peut mener deux Tangentes à l'Ellipſe AEKGA, une d'un côté, l'autre de l'autre.

Demonstration.

Pour le premier cas de ce problême, il eſt démontré dans les Sections Coniques que les angles FD*t*, & *f*DT ſont égaux entr'eux; ſi on ajoute de part & d'autre les angles FD*n*, & *f*D *n* égaux entr'eux par la conſtruction; les angles *n*D*t* & *n*DT ſeront auſſi égaux entr'eux, par conſéquent droits; donc *t*T ſera une Tangeante au point D. Fig. 111.

Secondement. [*Fig.* 97.] A cauſe des paralleles AE, CB, GC: CA:: GS: ES; mais AC demi diametre eſt égal à GC, GS = SE, laquelle eſt une ordonnée au diametre DB, puiſqu'il la diviſe en deux également; & [par la conſtruction] D*t* ou *t*T eſt parallele à SE, donc D*t* eſt une Tangente de l'Ellipſe au point D, *ce qu'il falloit faire.*

Troiſiémement. Par la conſtruction, on a fait CH troiſiéme proportionelle à la diſtance du centre C au point *d*, rencontre de la Tangente K*d* & du demi diametre CL, prolongé en *d*, & à ce demi diametre CL, on a fait auſſi C*i* = CH, donc *d*C: CL:: CL: C*i*, diſtance du centre C à la Souſtangente *i d*; donc * *d*K & *dk* ſont des Tangentes à l'Ellipſe aux points K, ou *k* menées du point donné *d* hors de cette Courbe, *ce qu'il falloit faire.* * Art. 46

Usage.

Ce Probleme eſt néceſſaire pour éviter les jarrets dans la jonction des lignes droites, avec des arcs Elliptiques, dans pluſieurs circonſtances d'arondiſſemens des parties droites contiguës aux Courbes, comme

il arrive ſouvent dans l'Architecture; parce que l'angle fait par la rencontre d'une Courbe & de la Tangente eſt le plus petit qu'on puiſſe imaginer; donc il différe infiniment peu de la ligne droite, à la jonction de la Courbe, par conſéquent la tranſition de la ligne droite à la Courbe devient imperceptible à la vûë.

De l'Ellipſe conſiderée comme à faire.

PROBLEME IV.

Un Diametre quelconque & une Ordonnée à ce diametre étant donnez, trouver ſon conjugué.

Fig. 113. SOit AB [*Fig.* 113.] le diametre donné & E D ſon ordonnée, du point C milieu de A B, ayant élevé une perpendiculaire C H, on décrira le quart de Cercle H F B, on menera enſuite par le point E de la rencontre de l'ordonnée avec le diametre A B, une ligne E G parallele & égale à CH, qui coupera le cercle en F, par où & par l'extrémité D de l'ordonnée ED, ayant tiré la ligne FD, on lui menera par le point G la parallele GL, qui rencontrera ED prolongée en L. Je dis que EL ſera égale au demi diametre Conjugué que l'on cherche; ainſi ayant mené par le point C la ligne I K parallele à E L, on portera du centre C de part & d'autre CK & CI égale à EL.

DEMONSTRATION.

A cauſe des paralleles GL, FD, on aura EG : EL : : EF : ED, mais EG [Conſtr.] = CH & EL = CK, donc EF : CH : : ED : CK; c'eſt-à-dire, que les ordonnées au diametre AB dans le cercle ſont en même raiſon que celles de la courbe, qui paſſeroit par les points K & D, ce
* Art. 41. qui eſt une proprieté de l'Ellipſe; * donc C K, ou ſon double K I eſt le diametre conjugué à AB, *ce qu'il falloit trouver.*

PROBLEME V.

Les Diametres conjuguez étant donnez, trouver les Axes de l'Ellipſe.

Fig. 112. SOIENT [*Fig.* 112.] les lignes AB DE données pour diametres Conjuguez d'une Ellipſe à décrire, qui ſe coupent également en C où eſt ſon centre. Du point A extrêmité du plus grand, ayant abaiſſé la perpendiculaire A P, on la prolongera vers G, portant la moitié CD du plus petit en A G. Puis ayant tiré G C, on la diviſera en deux également,

en m, d'où l'on tirera par le point A la ligne mg, qu'on fera égale à mG ; si du point g on mene par le centre C la droite indéfinie gx, on aura la position du grand Axe, dont la longueur Xx sera déterminée en portant de part & d'autre du centre C la somme des lignes Cm, & mA en CX & Cx ; ensuite on élevera au point C une perpendiculaire à gx, sur laquelle on portera de part & d'autre la longueur Ag de C en Y, & de C en y ; la ligne yY sera le petit axe, *ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Du point C pour centre & pour rayon CX, on décrira un quart de cercle XH, & l'on menera par le point A la ligne Ko, perpendiculaire à XC qui passera à l'intersection K de l'arc de cercle HX, & de la droite CG, parce que mA $=$ mt $=$ mK & At parallele à la même.

Par la supposition le point A qui est à l'extrêmité d'un des diametres, est à la circonference de l'Ellipse AEBD, il faut démontrer que les points X & Y sont à la même circonference, & à l'extrêmité des axes. Puisque $mg = m$C [par la construction] mt sera égale à mA, & tC $=$ Ag $=$ CY [par la construction] *or* à cause des triangles semblables CKo, Ctu, Ko : Ao $=$ tu : : CK $=$ CX $=$ CH : Ct $=$ CY; donc (Art. 41.) le point Y est à la circonference de l'Ellipse, de même que le point X, comme il est aisé de le prouver par la même raison. Art. 41.

Et parce que les lignes CX & CY sont perpendiculaires entr'elles, ce sont des demi-axes ; donc Xx & Yy sont les axes demandez, *ce qu'il falloit démontrer.* Art.

COROLLAIRE.

De-là on tire une maniere aisée de décrire l'Ellipse par un mouvement continu, au moyen d'un instrument composé de trois pieces, sçavoir, d'une petite branche droite Cm, d'un triangle mAP, dont l'angle m est attaché par un pivot en m à cette branche, & d'une grande régle qu'on applique sur le diametre DE, à laquelle la petite branche Cm est attachée sur le point C par un pivot, sur lequel elle peut tourner, ainsi que l'angle m du triangle à son autre extrêmité m : si l'on conduit avec la main l'angle P en droite ligne au long de la régle DE, le Crayon posé au sommet de l'angle A décrira en même tems la demie Ellipse XYx, on peut même sans remuer la régle faire passer le triangle AmP, & la branche mC de l'autre côté de la régle DE, mais sa largeur couvrira une partie qu'on ne pourra tracer, c'est pourquoi il faudra la changer de côté. Fig. 112. Plan. 10.

Il faut remarquer que la ligne GP n'eſt pas toujours la ſomme deſdits diametres CD, & de la perpendiculaire AP, mais qu'elle en eſt quelquefois la difference, lorſque la direction de la branche C*m* tombe entre les points A & P.

USAGE.

Cette propoſition eſt très utile dans pluſieurs Traits de la coupe des Pierres où les Axes conjuguez ſont donnez, comme aux Arcs-droits des *Deſcentes*, en ce qu'elle fournit les moyens de tracer les Ellipſes, par le mouvement continu du Trait du Jardinier, dont nous parlerons au Problême VII.

PROBLEME VI.

Un Axe & un point à la circonference de l'Ellipſe étant donnez, trouver l'autre Axe.

Ce Problême n'eſt qu'une eſpece de Corollaire du Problême IV. parce que les ordonnées aux Axes étant des perpendiculaires; en donnant un Point à la circonference, c'eſt comme ſi l'on donnoit une ordonnée à l'axe grand ou petit.

Premierement, *le grand Axe étant donné, ſi l'on cherche le petit.*

Fig. 114. Soit AB le grand axe [*Fig.* 114.] & D le point donné à la circonference de l'Ellipſe, on abaiſſera de ce point ſur AB la perpendiculaire indéfinie OF, puis du point C milieu de AB pour centre, & CB pour Rayon, on décrira un quart de cercle B*b*, qui coupera OF en R; on portera ſur OF le Rayon CB, qui donnera le point F, & la longueur OD en C*d*, parallelement à OF. Par les points R & *d*, on tirera R*y*, qui coupera l'axe donné AB en *y*.

Si de ce point *y*, on tire au point F, une ligne *y*F, elle coupera CD prolongé en X; je dis que CX eſt la moitié du petit axe que l'on cherche.

Secondement, *le petit Axe étant donné, ſi l'on cherche le grand.*

Par le point D donné à la circonference, on tirera ſur CX la perpendiculaire D*d*; puis du point C pour centre, & la moitié CX du petit axe donné pour Rayon, on décrira le quart de cercle XE qui coupera D*d* au point V, & la perpendiculaire AB ſur le milieu C au point E, par les points E & V, on tirera E*z*, qui coupera CX prolongée au point Z; ſi par les points Z & D, on tire la droite ZB,

elle coupera la perpendiculaire AB au point B, je dis que CB eſt la moitié du grand axe que l'on cherche.

Demonstration.

Pour le premier cas, à cauſe des Triangles ſemblables O*y* R, *y* C *d*, & *y* O F, *y* C X, on aura *y*O : O R : : *y*C : C *d*, & *y* O : O F : : *y*C : CX, donc OR : O F = C *b* = CB : : O D = C *d* : CX, donc * le point X eſt à la circonference de l'Ellipſe, & à l'extrémité de l'axe conjugué à A B. * Art. 41.

Pour le ſecond cas, à cauſe des Triangles ſemblables ZCE, Z *d*V & ZCB, Z *d*D, on aura Z *d* : *d*V : : ZC : CE, & Z *d* : *d*D : : Z *c* : CB, donc *d*V : *d*D : : CE = CX : CB, donc [par l'Art. 41.] le point B ſera à l'extrémité du grand axe, *ce qu'il falloit trouver.*

USAGE.

Entre pluſieurs uſages de ce Probléme, on fera voir au 4.ᵉ Livre qu'il eſt néceſſaire pour le Trait du Quartier de Vis ſuſpendu, ſuivant la maniere du P. Deran, & de M. de La Rue, & pour le Trait de la Trompe ſphérique dans un angle ſaillant.

Il pourroit auſſi ſervir pour la diminution des Colones, ſi au lieu de la Conchoïde De Nicomede, qu'on y employe ordinairement, on vouloit ſe ſervir d'un arc Elliptique, le petit axe donné eſt le diametre de la Baſe; le point à la circonference, eſt l'extrémité du diametre ſous l'Aſtragle du Chapiteau, éloigné du petit axe des deux tiers de la longueur de la colonne, ſi le renflement eſt au tiers.

Probleme VII.

Les Axes d'une Ellipſe étant donnez, la décrire par pluſieurs Points, ou par un mouvement continu.

Premierement, par pluſieurs Points trouvez au compas [*Fig.* 110.] *Fig.* 119.

Ayant porté la moitié du grand axe pour Rayon, on portera une des pointes du compas en L, d'où, comme centre, on décrira des arcs qui couperont cet axe en F & *f* pour avoir les Foyers.

De ces points F & *f* pour centres, & d'un intervale pris à volonté pour Rayon, pourvû qu'il ſoit moins grand que *f* A, ou FB, on décrira des arcs de cercle en quatre endroits 1. 2. 3. 4. au deſſus, & au def-

ſous de l'axe AB, comme en 1 *n*, 2 *n*, 3 *n*, 4 *n*, puis on portera la même longueur du Rayon *de*, A en P, & de l'ouverture PB [reſte de la longueur du grand axe] pour Rayon, on décrira des mêmes centres F & *f* des arcs de cercle, qui couperont les precédens aux Points 1. 2. 3. 4. qui ſeront à la circonference de l'Ellipſe; on recommencera pareille operation avec des ouvertures de compas, plus ou moins grandes pour avoir encore quatre autres Points; & ainſi on trouvera tant de Points, & ſi près les uns des autres, qu'on jugera à propos, pour tracer ce contour à la main de l'un à l'autre avec aſſez d'exactitude, ou mieux dans le grand, avec une Régle pliante également mince, qu'on peut arrêter & courber par le moyen de quelques pointes de cloux plantées ſur les points trouvez en dedans & en dehors, ou tous en dehors en appuyant de la main gauche par dedans, pendant qu'on trace de la droite.

Secondement, par un mouvement continu, on peut le faire de pluſieurs façons. 1.°

Fig. 110. Par le moyen d'un Cordeau, on fait ce que nous venons de faire avec le Compas; on plante deux cloux aux Foyers F & *f*, trouvez comme nous venons de le dire; puis ayant fait une boucle au bout du Cordeau, & une autre à diſtance de celle-ci, parfaitement égale à la longueur du grand axe AB, on met chacune de ces boucles à un clou des Foyers, & comme le cordeau eſt lâche, on pouſſe ſon pli F D *f* pour le faire tendre, & y faire couler un crayon D, ou une pointe de quelque Outil; ainſi le même cordeau qui faiſoit le pli F D *f* fera au milieu le pli F L *f*, & le crayon qui étoit en D, ſera tranſporté en L, ce qui eſt ſi connu de tous les Ouvriers, qu'il eſt inutile d'expliquer. Cette conſtruction, qu'on appelle le *Trait du Jardinier*, quoique Méchanique; donne l'Ovale Geométrique, que j'appelle toujours *Ellipſe*, pour la diſtinguer des autres Ovales.

Il eſt clair que pour avoir l'Ellipſe entiere, il faut faire paſſer le cordeau en deſſous d'AB, comme au deſſus.

Demonstration.

Nous avons dit à l'article 29. du premier Livre, qu'une des principales proprietez de l'Ellipſe conſiſte dans l'égalité de la ſomme des deux lignes tirées des Foyers au même point de la circonference, avec la longueur du grand axe; donc la courbe tracée eſt la vraie Ellipſe qui eſt une des Sections Coniques; puiſque la conſtruction par pluſieurs points trouvez au compas, & le cordeau par le mouvement continu, fourniſſent toujours la même égalité, *ce qu'il falloit faire,*

USAGE.

USAGE.

Cette pratique eſt très aiſée, mais peu éxacte dans les grands Ouvrages, parce que le cordeau s'alonge, ſelon qu'il eſt plus ou moins long & tors, & que l'on pouſſe le crayon dans le pli avec une force plus ou moins grande; une chaînette eſt moins ſujette à cet inconvenient, mais elle a les ſiens; car outre qu'elle cauſe des Ondulations, elle eſt encore un peu ſuſecptible de l'inégalité d'extenſion, cauſée par ſon poid, dans un plan vertical, ou par ſon frottement ſur un Plan horiſontal; de ſorte qu'elle ne peut ſe remettre en ligne droite, ſuivant les loix de la Méchanique; puiſque ce poid, ou ce frottement, ſont une troiſiéme Puiſſance qui fait effort contre celles des bouts, leſquelles ne peuvent, en tirant l'une contre l'autre, faire dreſſer la chaine, que lorſque la troiſiéme eſt infiniment petite; c'eſt pourquoi nous allons propoſer une autre maniere Organique qui n'a pas ces défauts.

Seconde Méthode de tracer l'Ellipſe par pluſieurs Points, ſans le ſecours des Foyers ſeulement avec deux ouvertures de compas, ou ſans compas par le moyen d'un cercle & d'une meſure conſtante.

Soient [*Fig.* 116.] les axes donnez AB, HF: on portera la moitié du petit axe CH de C en E ſur le grand, & l'on diviſera leur difference EB en deux également en M. *Fig.* 116.

Du point C pour centre, & de l'intervale CM pour Rayon, on décrira un cercle: il nous ſuffit ici pour exemple d'en mettre le quart N 2. M: ſur la circonference de ce cercle, on prendra à volonté autant de points qu'on en voudra pour tracer l'Ellipſe avec plus ou moins d'exactitude, comme ici les Points 1, 2, 3, deſquels, comme centres & toujours du même intervale CM pour Rayon, on décrira de petits arcs qui couperont l'axe AB, prolongé aux points M, *g*, *h*, d'où l'on tirera à leurs centres 1, 2, 3, des lignes 1 M, 2*g*, 3*h*, ſur leſquelles on portera toujours la moitié de la difference des demi-Axes ME, ou MB, en 1*x*, 2*x*, 3*x*, laquelle donnera tous les points *x*, *x*, *x* à la circonference de l'Ellipſe demandée.

DEMONSTRATION.

Du point C pour centre, & des longueurs CA, & CH pour Rayons, on décrira deux quarts de cercles AQ*b*, *rq*H; puis par un des points trouvez comme D, on tirera les lignes *r*Q, & PL perpendiculaires aux axes; & enfin par le centre C, la ligne C*q*.

A cauſe des paralleles rC, Pq, on aura $Cq : CQ :: rP : rQ$; mais $Cq = CH$, & $CQ = Cb$; donc $CH : Cb :: rP : rQ$; c'eſt-à-dire, que les ordonnées de l'Ellipſe à l'axe AB, ſont proportionelles à celles du cercle A Q*b* au même axe, qui en eſt le diametre; donc [Art. 41. du premier Livre,] le point P eſt à la circonference de l'Ellipſe, *ce qu'il falloit démontrer.*

La même organiquement par un Mouvement continu.

Fig. 118. Ayant diviſé la difference A*e* des deux demi-Axes CA, C*b* en deux également en *m*, ou leur ſomme *e*B en M, on aſſemblera deux Régles égales chacune à la moitié MB, par le moyen d'une cheville, ou d'un clou arondi, comme C*d*, *d*G en *d*, ou deux Régles d'inégale longueur, l'une D, égale à la difference A*m*, l'autre D*a* au demi-Axe AC, puis ayant pris une troiſiéme Régle de longueur égale à quatre fois C*d*, ou deux fois *e*B, pour la 1.e conſtruction, avec les Régles C*d*, *d*G, ou ſeulement au grand Axe pour la ſeconde, on attachera à ſon milieu C, la Régle C*d*, ou CD, avec un pivot; en ſorte que le point C ſoit ſur l'alignement d'un de ſes côtez *e*G, puis on portera ſur la branche *d*G la longueur A*m*, pour y poſer un crayon en *x*, ou ſur la Régle D*a* en D*g*, pour y poſer une pointe propre à faire couler le long de la Régle AB, & le crayon en *a*; dans cette diſpoſition, il ne s'agit que de faire couler le point G, dans le premier cas, ou *g* dans le ſecond, au long de la Régle AB, les crayons poſez en *x*, ou en *a* traceront l'Ellipſe qu'on demande, comme il eſt clair par la démonſtration précedente, pour la conſtruction par pluſieurs points, puiſque celle-ci eſt parfaitement la même réduite en Inſtrument.

Autre Maniere Organique, avec l'Inſtrument appellé Compas à Ovale.

Lorsqu'il ne s'agit que de former un quart d'Ellipſe, le compas à Ovale eſt une ſimple Equerre, ſur les côtez de laquelle on fait couler deux pivots attachez à certaine diſtance, à une Régle au bout de laquel-
Fig. 117. le eſt un crayon pour le tracer. D'où il ſuit que pour une Ellipſe entiere, il faut aſſembler quatre Equerres ſéparées par une couliſſe, pour laiſſer le paſſage de ces pivots; ſuppoſant qu'on ne veuille tracer qu'une demi-Ellipſe, il faut un Inſtrument compoſé de deux Equerres, avec une couliſſe entre deux, comme on voit à la *Fig.* 117. ABCE, & afin que la branche du milieu ſoit ferme, on y ajoute des liens, comme *mn*, MN, qui empêchent qu'elle ne puiſſe s'incliner vers A, ni vers B.

On prend enſuite une troiſiéme Régle RT, qu'on fait entrer dans

trois anneaux de fer ou de cuivre quarrez H, G & K, dans lesquels on l'enfile, & afin de pouvoir les fixer où l'on veut, on y ajoute une vis.

A deux de ces anneaux faits en façon de petite Boëte, tient une queuë en forme de pivot conique, qu'on fait entrer par les bouts de la rènure CE, & dans la rènure AB, si l'on en fait une, qui n'est necessaire que pour mieux assujettir le mouvement de la Régle RT; c'est pourquoi on fait ces rènures plus larges au fond que par le haut, & les pivots étant coniques, quoiqu'ils puissent être Cylindriques. A la boëte K au lieu de pivot, on met un crayon, ou une pointe, comme on le juge à propos pour mieux tracer.

L'Instrument étant ainsi fait, il ne s'agit plus que de sçavoir déterminer la distance des pivots HG entre eux, & à l'égard du crayon K, pour tracer l'Ellipse suivant la longueur des axes donnez.

Ayant porté sur le grand Axe AB, la longueur CD de la moitié du petit, de A en F, la difference des deux demi-axes FC, sera cette distance qu'on cherche du pivot H au pivot G; & la longueur CD sera celle du pivot G au crayon K.

Les pivots & le crayon étant ainsi arrêtez par le moyen des vis, afin qu'ils ne puissent varier, il n'y a qu'à faire mouvoir la Régle RT sur ses pivots, en sorte qu'il y en ait toujours un engagé dans la rènure des coulisses AB, EC, qui sont ici à angle Droit, parce que les axes sont donnez; & à mesure que la Régle tournera sur ces deux pivots, le crayon K tracera l'Ellipse demandée.

J'ay dit que ces deux coulisses étoient à angle Droit, parce que les deux axes sont donnez; car si au lieu des axes, on avoit donné deux diametres conjuguez, elles devroient faire entr'elles d'autres angles que ces diametres, un obtus d'un côté, & un aigu de l'autre, qui seront d'autant plus aigus & obtus, que les diametres conjuguez approcheront de l'égalité; ainsi [*Fig.* 115.] ayant porté la distance CB de D en F, *Fig.* 115.
on fera la coulisse inclinée à l'égard du diametre donné AB, suivant la ligne CF, ou ce qui est la même chose, suivant les angles FCB & ACF, & l'on aura le crayon en D, & les deux pivots en P & F, de sorte que si les lignes CB & DP étoient parfaitement égales, cet instrument ne pourroit plus avoir lieu.

Ou il faut remarquer que la distance DP, qui est la difference de la perpendiculaire FP, & du demi diametre CB, peut tomber entre les points D & P, si le demi diametre CB est plus petit que DP.

Secondement, qu'on peut s'épargner la peine de faire une couliſſe ſur AB, pourvû qu'on tienne le pivot G, *Fig.* 117. ou P, *Fig.* 115. toujours appliqué à la Régle AB.

Fig. 117. Si l'on vouloit en même tems tracer une ſeconde Ellipſe parallele, ou à peu près à la premiere, il n'y auroit qu'à ajouter un quatriéme anneau en X, pour y appliquer un ſecond crayon, comme on a fait en K; mais ces deux Ellipſes ne ſeront pas ſemblables; parce que leurs diametres ne ſeront pas proportionels, de ſorte qu'elles ne peuvent pas être la ſection d'un berceau ou cylindre creux, de même épaiſſeur; la raiſon eſt que ſi des demi-axes CD, CB, on ôte des quantitez égales Dd, BL, les reſtes Cd, CL ne ſont plus en même proportion, Cd n'eſt plus à CL, comme CD à CB; car ſuppoſant CD $=$ 2, CB $=$ 4, Dd $=$ 1, Cd ſera à CL, comme 1 à 3, ce qui eſt tout different du rapport ſuppoſé CD: CB:: 2:4.

Demonstration.

Du point C pour centre, & de l'intervale de la moitié du grand axe CB pour Rayon, on décrira le quart de cercle SB, & par le point K, on tirera ſur CB la perpendiculaire Or, qui coupera le cercle au point O, & du centre C la ligne CO, qui ſera parallele à HK; parce que OK eſt parallele à CH, & que HK $=$ CS $=$ SO; donc CoKH eſt un parallelograme. Que HK ſoit égal à CS, il eſt évident par la conſtruction, puiſque GK $=$ AF, & GH $=$ CF, & CS ou BC $=$ CA, or à cauſe des paralleles, on aura CO: GK:: Or: Kr; mais CO $=$ CS, & GK $=$ CD; donc CD: CS:: rK: rO: donc [Art. 41.] la courbe DKB eſt une Ellipſe.

Ou il faut remarquer. 1.° Que les deux triangles rectangles GHC, GKr, qui ſont ſemblables, varient continuellement par le changement de poſition de la Régle RT; en ſorte que les côtez CH, CG, Gr, rK augmentent ou diminuent, & cependant ils ne ſont jamais que la ſomme des quarrez de leurs hypotenuſes, qui ſont conſtantes HG, KG.

2.° Que l'intervale CH, qui eſt la diſtance du centre C à un pivot, eſt toujours égal à l'excès KO de l'ordonnée du cercle, ſur celle de l'Ellipſe.

D'ou l'on peut tirer une maniere aiſée de trouver autant de points que l'on voudra d'une Ellipſe à peu près parallele à une autre donnée, comme dxL, en imitant ce qui a été fait avec l'inſtrument. Il n'y a qu'à porter l'intervale OK en CH, ou ok en Ch, pour avoir les

inclinaiſons de pluſieurs lignes HK, hk, ſur leſquelles on portera la diſtance donnée Dd en KX, & kx, pour mener par les points donnez & trouvez d, X, x, L l'Ellipſe demandée, à peu près équidiſtante à DKkB donnée.

Si l'on veut qu'elle ſoit exactement équidiſtante, il faut connoître les Foyers Ff, [*Fig.* 111.] mener de chacun une ligne au point donné D, ou tout autre pris à volonté, & diviſer l'angle F D f en deux également par une ligne Dn, ſur laquelle on portera du point D, la largeur du Bandeau, Archivolte, ou tout autre Ouvrage qu'on veut faire exactement de même largeur par-tout. *Fig.* 111.

Pour rendre cette operation plus facile, il n'y a qu'à prendre au contour de l'Ellipſe donnée, ou toute autre courbe, pluſieurs points à volonté pour centre 1. 2. 3. &c. deſquels avec l'intervale donné Dd pour la largeur, on fera autant d'arcs de cercles, auſquels on menera à la main une courbe tangente att,d, qui ſera celle qu'on cherche. *Fig.* 117.

Mais il faut obſerver qu'une telle Courbe, & toute autre qui n'eſt pas une concentrique ſemblable à la courbe donnée, n'eſt pas convenable aux ceintres qui doivent prendre leur naiſſance ſur un piedroit, parce qu'elle y feroit un jarret en a avec le piedroit ap, lequel ſera d'autant plus ſenſible & choquant à la vûë, que l'intervale Dd ſera grand; car, il eſt viſible que les perpendiculaires à la courbe 1a, & Aa ſe couperont en quelque point comme en a; de ſorte que tout l'arondiſſement de la naiſſance A 1, ſe réduit à la courbe intérieure en un ſeul point a, où ces deux perpendiculaires ſe croiſent, par conſéquent, puiſque une partie ſemblable s'y trouve de moins, il s'y fera un angle avec le diametre AB, plus aigu que l'angle mixte a A 1. qui eſt droit à ſon origine A, ou infiniment peu different du droit, & égal à celui d'un piedroit perpendiculaire ſur A B, donc l'angle mixte de la courbe da, avec le piedroit ap perpendiculaire ſur A B, ſera un angle different, qui ſera d'autant plus aigu, que l'arc A 1. ſera grand, par conſéquent un jarret; ce qui eſt inſupportable en Architecture.

Corollaire.

De ce que nous venons de dire, il ſuit encore, que la méthode de ceux qui prennent la meſure de la largeur à l'intervale des deux courbes, ſur les diametres de l'Ellipſe donnée, comme l'enſeigne le P. *Fig.* 111.

Alia interior Ellipsis non tantùm concentrica, sed etiam æquali intervallo distans ab interiori quæ distantia sumatur secundùm radios à centro procedentes.

DECHALES, Livr. 5. Prop. 21. est encore très fautive; car il est visible que si cette distance est, par exemple, Dy, sur Dn ou Du, sur DC, le point u s'approche plus de la circonference que le point y, par conséquent l'Ellipse ne sera plus équidistante à l'exterieure ADmG donnée; de sorte qu'en cet endroit, le Bandeau ou Archivolte qu'on se propose de faire de même largeur, se trouvera plus étroit. : or la ligne Dn, qui divise l'angle FDf en deux également, ne tombe jamais sur les rayons, que lorsque le point D est à l'extremité du petit diametre ou axe; car (par la 3.e Prop. du 6.e Livre d'Euclide,) la ligne qui divise un angle d'un triangle fDF en deux également, coupe la base de ce triangle proportionellement aux côtez; mais les rayons ou demi-diametres coupent tous la base fF en deux également en C, donc ils ne divisent pas l'angle FDf en deux également; nous démontrerons encore d'une autre maniere la fausseté de cette pratique, au chap. VIII. du 4.e Livre.

REMARQUE.

QUOIQUE *le Compas à Ovale* soit un assez bon instrument, on peut s'en épargner la façon, & operer très juste dans les grands Ouvrages, en cherchant plusieurs points de la circonference de l'Ellipse qu'on se propose de faire, sur lesquels on appuye une régle pliante fort mince, & d'une épaisseur bien égale qu'on arrête de chant, ou avec les mains, ou avec des pointes de cloux, comme nous l'avons dit ci-devant, au long de laquelle on peut tracer un contour aussi ferme, & aussi net qu'avec aucun Instrument; voici d'autres problêmes pour l'une & l'autre Methode.

PROBLEME VIII.

Les Diametres conjuguez étant donnez, tracer l'Ellipse par plusieurs Points, ou par un mouvement continu, sans connoître les Axes ni les Foyers.

Fig. 115. SOIENT [*Fig.* 115.] les diametres conjuguez AB, ED, par le point D, extremité du plus grand, on tirera sur AB la perpendiculaire indéfinie FP, sur laquelle on portera la longueur AC, de D en F, d'où l'on tirera au centre C la ligne FC; en suite du point I pris à volonté sur CD, on menera une parallele IG à la ligne FP, & une autre IH au diametre AB. Si du point G, où IG coupe FC pour centre & pour rayon DF, ou AC, on fait un arc de cercle qui coupe IH en H & h; je dis que les points H & h sont à la circonference de l'Ellipse.

DEMONSTRATION.

Soit pris CL sur AB égale à HI, & mené LH qui sera parallele à CD.

A cause des paralleles IG, PF, on aura CD : DF :: CI : IG, mais DF = GH = AG par la construction, & CI = LH; & á cause du triangle rectangle HIG, $\overline{IG}^2 = \overline{GH}^2 - \overline{HI}^2 = CA - \overline{CL}^2 =$ au rectangle BL×LA (par la 5.[e] du 2.[e] Livre d'Euclide) donc si au lieu de CI, on met son égal LH, & au lieu de DF son égale CA, on aura $\overline{CD}^2 : \overline{LH}^2 :: \overline{CA}^2 : BL : \times LA$: donc le point H est à la circonference de l'Ellipse, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

D'ou il suit qu'on peut décrire une Ellipse par un mouvement continu au tour de deux axes conjuguez, sans autre instrument, qu'une Régle & une fausse Equerre, ou deux autres Régles qui fassent un angle égale à FCB, trouvé comme nous venons de l'enseigner, & une troisiéme percée, suivant les distances P, D, F, pour mettre une cheville en P, & en F, assez saillantes, pour pouvoir y appuyer les régles FC, & CB; on mettra un crayon au troisiéme trou en D, ou une pointe propre à tracer l'Ellipse; si l'on fait couler le point F, où est la cheville, le long de la régle FC, & la cheville P le long de la régle CB, le crayon D tracera le quart d'Ellipse D*h*B, & si l'on en fait de même de l'autre côté de la ligne FC, transportant la régle CB en CA, de même que la régle FP, on tracera l'autre quart d'Ellipse CHD, qui fera avec le precedent la demie Ellipse ADB, *ce qu'il falloit faire* par un mouvement continu. Pour ne pas changer la régle CB, il faut la faire longue, en sorte qu'elle excéde les points A & B de chaque côté, de la longueur de DP.

USAGE.

Ce Problême peut servir à tracer des arcs rampans, & les projections des faces Elliptiques en talud, dont on n'a ordinairement que les diametres conjuguez, pour s'épargner la peine d'en chercher les axes; mais on peut le faire par plusieurs points d'une maniere encore plus simple.

SECONDE MANIERE.

Soient les diametres conjuguez AB, DE: [*Fig.* 121.] ayant mené par le point D la ligne DT, parallele à AB, & par le point C la per- *Fig.* 121.

pendiculaire CK, qui rencontrera DT au point K, on prolongera cette ligne vers F. Du point C pour centre, & pour rayon CK, on décrira le quart de cercle HK, & du même centre; & pour rayon le demi diametre CB, on décrira un autre quart de cercle FB, que l'on divisera en autant de parties égales ou inégales que l'on voudra, 1, 2, 3, F; il convient pour la commodité & la promptitude de l'operation qu'elles soient égales, parce qu'il faut divifer l'autre quart de cercle HK, en un même nombre de parties, & si elles étoient inégales, il faudroit qu'elles fussent proportionelles à leurs correspondantes; par chaune de ces divisions 1, 2, 3, dans l'un & l'autre quart de cercle, on menera des parelleles au diamettre CB, comme *aa*, *bb*, *cc*, dans le quart de cercle HK: & 1L, 2M, 3N, dans le quart de cercle BF; en suite par les mêmes points 1, 2, 3, du même quart de cercle FB, on menera d'autres lignes 3*g*, 2*h*, 1*i* parelleles à FC, par conséquent perpendiculaires à AB, lesquelles couperont ce diametre aux points *g*, *h*, *i*; on menera par ces points des lignes *gc*, *hb*, *ia*, paralleles à CD, lesquelles couperont les précedentes a*a*, b*b*, aux points *a*, *b*, *c* qui seront à la circonference de l'Ellipse.

Ces Points étant trouvez, il sera bien aisé de trouver ceux de l'autre côté du diametre ED; car il n'y aura qu'à porter les longueurs *oa*, *pb*, *qc* en *o*a, *ph*, *qc*, sur les mêmes lignes *aa*, *bb*, *cc*, de l'autre côté du diametre CD: on aura ainsi plusieurs points à la circonference de l'Ellipse, par lesquels menant une ligne courbe à la main, ou avec une régle pliante, on aura la demie Ellipse, & l'Ellipse toute entiere, si l'on veut; puisque la moitié CDB est égale à l'autre, qui passeroit par ACE, mais disposée en sens contraire.

Demonstration.

A cause des paralleles au diametre AB, & des divisions égales en nombre, & proportionelles dans les quarts de cercle HK, & FB, les rayons CK & CF sont divisez proportionellement, de même que les lignes CK & CD, le sont aussi entr'elles; donc $CD : Cq :: CF : CN$: & $CD : Cp :: CF : CM$ & $CD : Co :: CF : CL$, mais $Cq = gC$, $Cp = hb$ & $Co = ia$: & par la même raison $g3 = CN$, $h2 = CM$ & $i1 = CL$, donc $gc : hb :: g3 : h2$, c'est-à-dire, que les ordonnées au
Art. 41. diametre du cercle, & celles au diametre de l'Ellipse sont en même raison entr'elles, *ce qu'il falloit démontrer.*

Probleme

Probeme IX.

Alonger ou racourcir les Ellipses en telle Raison qu'on voudra, en sorte qu'elles soient toujours les Sections d'un même Cylindre.

Soit [*Fig.* 119.] le demi cercle BFE, la hase d'un Cylyndre quelcon- *Fig.* 119.
que; ayant abaissé sur son diametre BE, autant de perpendiculaires que l'on voudra *o r*, *o r*, *c*F, on joindra l'axe AB, qu'on suppose donné, ou pris à volonté, au diametre BE, sous quelque angle que l'on voudra, comme ABE, & l'on achevera de former le triangle, en tirant une ligne par les extremitez A, E; ensuite par tous les points *o*, *o* & *c*, on menera des paralleles à la ligne AE, jusqu'à la rencontre de l'axe AB aux points *h*, *h*, C, par lesquels on élevera, sur AB, autant de perpendiculaires indéfinies *h i*, *h i*, CD, qu'on fera égales aux ordonnées *o r*, *or*, CF, en sorte qu'elles soient terminées aux points *i i*D, par lesquels on fera passer une courbe à la main, ou avec une régle pliante, & l'on aura la circonference de l'Ellipse demandée; nous n'en mettons ici que la moitié pour rendre la figure plus simple, l'autre moitié étant parfaitement égale.

Demonstration.

Si l'on suppose le demi cercle EFB, relevé en E*d*B, & la demie Ellipse ADB perpendiculaires au plan du triangle ABE, toutes les perpendiculaires aux diametres EB, AB le seront à ce plan, donc les distances des sommets correspondans F, D, *r* & *i*, qui sont les mêmes que *d*D, R*i*, seront égales aux distances *h o*, C*c* du plan ABE; puisque les lignes *o r* ou *o*R & *h i*, leur sont perpendiculaires, & que ces mêmes *o r* & *h i* sont égales entr'elles; donc elles formeront autant de parallelogrames, comme *c*CD*d*; donc si la figure E*d*BDAE est une moitié de Cylindre, la ligne C*c* sera son axe, & D*d*, qui lui est parallele, sera son côté; c'est-à-dire, à la surface: il en sera de même de toute autre jonction des sommets *i* & *r* ou R, comme *h i*, R*o*, *i* R qui sera parallele, & égale à *h o*, laquelle est parallele à C*c*, donc *i* R sera parallale à l'axe C*c*, & par conséquent à la surface du Cylindre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Que la ligne ADB soit une Ellipse, nous l'avons fait voir au Probleme precédent; puisqu'à cause des paralleles AE, *h o*, C*c*, les lignes EB, & AB sont divisées proportionellement, & que les ordonnées à ces diametres, sont égales entr'elles, & par conséquent proportionelles à celles du cercle, par la construction; donc la courbe ADB est une Ellipse Geometrique.

Il eſt à propos que je rende raiſon, pourquoi j'ajoute ici l'épithete *Geometrique* au nom propre de l'Ellipſe formée par ce problême; c'eſt que DAVILER fameux Architecte, qui a fort bien écrit ſur ſon Art, étoit aſſez peu verſé en Geometrie, pour ne pas connoître l'exactitude de cette operation, s'imaginant apparemment qu'elle produiſoit une courbe d'une nouvelle eſpece; ce qui lui a donné occaſion de lâcher une abſurdite, dont j'ay montré le faux au commencement, & en pluſieurs endroits de cet Ouvrage, *la ſéverité des régles de Geometrie,* (dit-il, Page 237.) *eſt inferieure à la pratique, comme la methode des Cherches ralongées vaut mieux que les figures Geometriques, d'autant qu'en cet Art, la pratique eſt preferable à la Theorie*; quelle miſere d'entendre ainſi raiſonner un Auteur, un Maître de l'Art, & ce qui eſt encore plus ſingulier, en appeller au Tribunal d'un *Ouvrier*, qui n'eſt qu'un eſpece de Singe d'un Geometre, dans les traits de la coupe des Pierres, dont il parle, *le meilleur* (dit-il) *eſt de prendre quelque habile Ouvrier pour ſe conduire, parce qu'il ſoulage & inſtruit*? quelle inſtruction peut donner un homme qui n'agit que par mémoire, & une imitation ſervile de ce qu'il a vû faire à un Maître qui ſouvent étoit auſſi borné que lui, incapable de rendre raiſon de ce qu'il enſeignoit à ſon Diſciple; par conſéquent ſuſceptible d'adopter le faux; comme le vrai? n'eſt-ce pas choiſir un Aveugle pour ſe conduire? car enfin remontons à ces Maîtres, de qui ont-ils pû ſe tranſmettre ces preceptes que d'un Geometre? un tel raiſonnement ne vaudroit pas la peine d'être relevé, s'il n'étoit trop commun parmi les Architectes, & oſerois-je le dire parmi les Ingenieurs, où il n'eſt auſſi que trop ordinaire d'entendre exalter le merite de la ſeule pratique; il me ſemble ouïr ces Chirurgiens, qui ſe mêlent de Médecine, décrier les Médecins tant qu'ils peuvent, fiers d'avoir fait quelques cures, par le moyen de quelques Remédes qu'ils ont tiré de cette ſcience, & appliqué au hazard; ils avancent hardiment que la Pratique vaut mieux que toute la Theorie de la Faculté: mais revenons à notre ſujet, cette digreſſion m'entraine au delà des bornes d'une ſimple remarque.

COROLLAIRE.

Il eſt évident que ſi au lieu du diametre AB, on en avoit pris ou donné un plus petit, comme aB, la conſtruction auroit été parfaitement la même; cette ligne auroit été diviſée auſſi proportionellement à la ligne EB, aux points *l*, *m*, *n*, & *a*; & en élevant ſur ces points autant de perpendiculaires à aB, égales aux correſpondantes *or*: on aura autant de points à la circonference d'une Ellipſe, qui ſera beaucoup plus courte que la precédente, & qui ſera cependant toute à la ſurface du même Cylindre par la même raiſon.

Corollaire II.

D'ou il suit: 1.° Que si l'angle B*c*C est aigu ou obtus, le Cylindre en question sera scalene; de sorte qu'il pourra arriver, que si l'on prenoit un diametre égal à BE qui fit avec C*c* un angle égal à B*c*C, la section sera encore un cercle, comme par exemple E*x*.

2.° Que si au lieu du demi-cercle EFB, pris pour base d'un Cylindre scalene, on avoit le demi-cercle AGB, & que l'on prit le diametre EB pour l'axe d'une Ellipse racourcie, on trouveroit par la même construction *cf* égale à la moitié du grand axe de cette Ellipse, en portant CG en *cf*, & *h*L en *o*K; & ainsi de suite pour toutes les ordonnées.

Corollaire III.

Non seulement, on peut transformer ainsi une Ellipse en un autre, plus ou moins alongée, ou une Ellipse en un cercle, qui soit la base d'un même Cylindre; mais aussi l'on peut encore transformer une portion moindre que la demie Ellipse, ou que le demi-cercle en une autre plus alongée, & plus accourcie, en telle raison que l'on voudra, sans qu'il soit necessaire d'en avoir les diametres, par le seul alongement des abscises, & la repétition des ordonnées correspondantes.

Soit [*Fig.* 120.] un Secteur, de cercle BC*e*, ou simplement un arc D*e* qu'il faut convertir en portion d'Ellipse *d*E qui soit section d'un même Cylindre, dont D*e* est portion de la base. Ayant mené par les extremitez D & *e* deux lignes droites Da, *e*a qui fassent entr'elles un angle droit ou quelconque en a; on divisera la ligne aD en autant de parties égales qu'on voudra, comme ici en trois, & l'on menera par les points 2, & 3. des paralleles 2*p*, 3*p* à la ligne a*e*; ensuite ayant fait à part l'angle *d*AE, égal à l'angle Da*e*, on divisera A*d* en même nombre de parties égales, ou proportionelles; si les divisions de la premiere ligne aD étoient inégales, & par les points 2. & 3. de division de la ligne donnée A*d*, on menera des lignes 2P, 3P, paralleles & égales aux precédentes, correspondantes aux mêmes divisions 2*p*, 3*p*; la ligne courbe qui sera menée par les points EP*pd*, sera la portion *d'Ellipse que l'on cherche.* *Fig.* 120.

Pour sentir la raison de ce Corollaire, il faut achever le cercle, en trouvant le centre C de l'arc donné D*e*, & mener CB parallele à aD; qui coupera les lignes *p*2, *p*3 prolongées aux points *f* & *g*.

Presentement, puisque à la Figure 119. nous avons operé sur les

diametres AB, EB; on peut confiderer le triangle ABE, comme une fection par l'axe du Cylindre, dont le rayon CB de la Figure 120. peut reprefenter une partie de la fection de ce plan avec la bafe B*ye*B, & la ligne aD, celle d'un plan parallele à la fection par l'axe, lequel retranche des lignes paralleles *fp*, *gp*, des parties égales *f*2, *g*3, non feulement dans le cercle de la bafe, mais encore dans l'Ellipfe de la fection; par conféquent, puifque les ordonnées de l'Ellipfe doivent être égales à celles du cercle de la bafe du Cylindre, fi l'on retranche des correfpondantes, des parties égales, les reftes doivent encore être égaux; mais les abfcifes par la conftruction font proportionelles, donc l'arc E*d* de la fection oblique du Cylindre correfpond parfaitement à l'arc *e* D de fa bafe, *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Ce Problême eft fans contredit le plus utile de tous ceux, dont on peut faire ufage pour la coupe des Pierres; car comme la plûpart des des voutes font des Cylindres Droits ou fcalenes, & coupez obliquement par des differentes rencontres de plans ou de Cylindres égaux, ou de bafes Elliptiques égales; on a continuellement befoin d'alonger ou de racourcir les courbes des ceintres, ce que les Ouvriers appellent la *Cerce ralongée.*

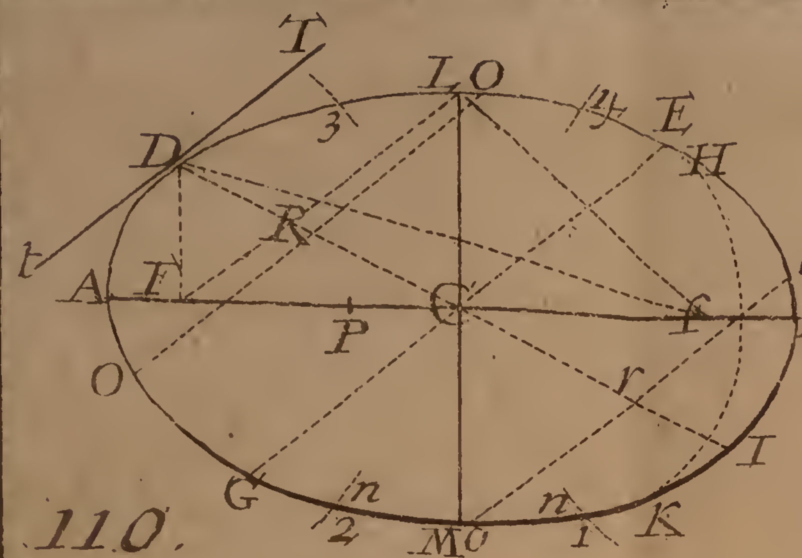
Quant à l'ufage du fecond Corollaire, il eft auffi fréquent en plufieurs rencontres, par exemple pour trouver les joins de tête de la Porte en Tour ronde, &c. comme on le verra au 4.[e] Livre.

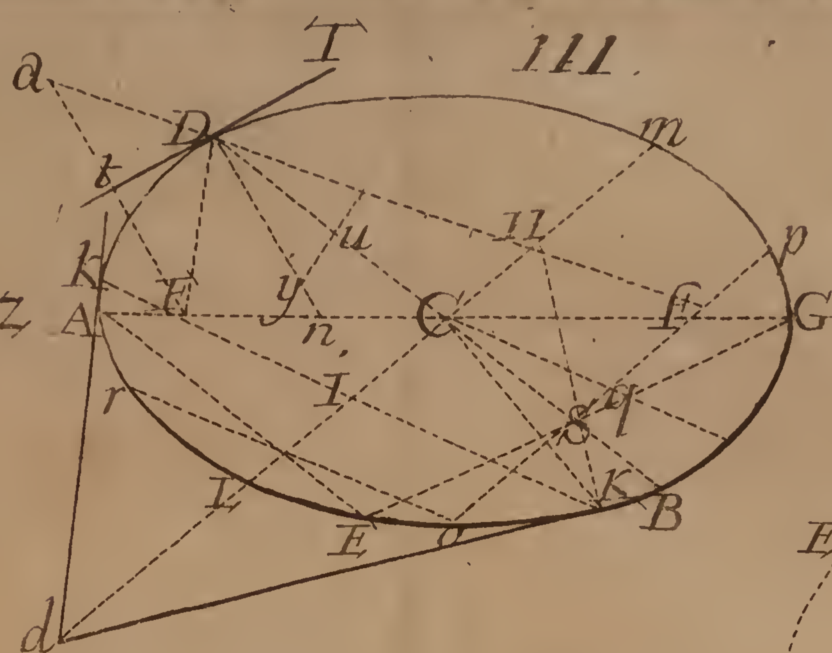
De la Parabole.

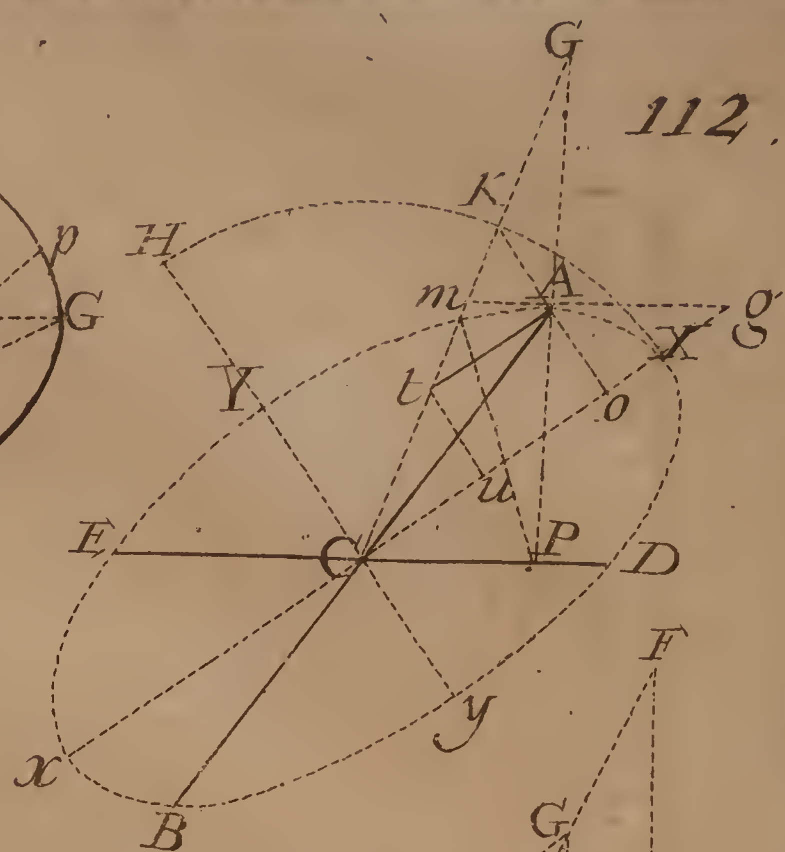
Probleme X.

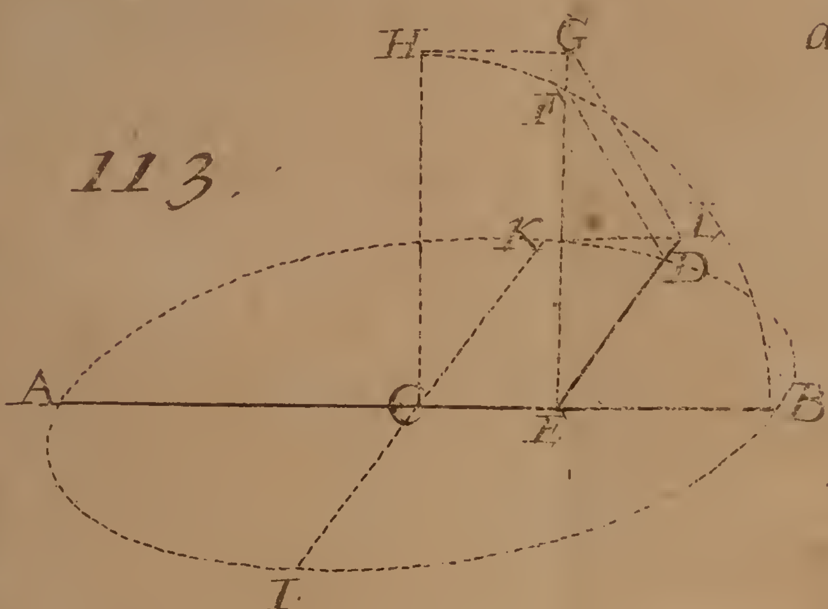
L'Axe d'une Parabole, & un Point à fa circonference étant donnez, la tracer par plufieurs Points, & par un Mouvement continu.

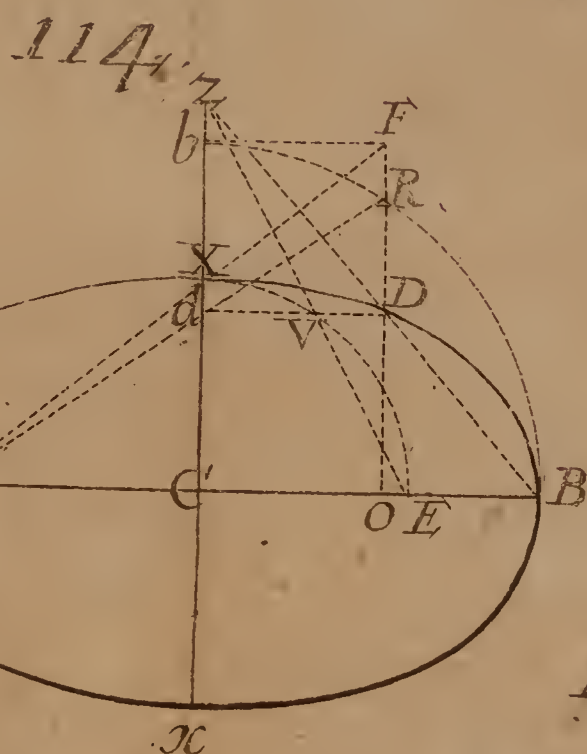
Pl. 11.
Fig. 122. Soit [*Fig.* 122.] SO4. l'axe donné, & D le point de la Parabole à fon contour. Ayant tiré de ce point une perpendiculaire DO fur l'axe SO, on tirera la ligne SD, fur laquelle au point D, on fera la perpendiculaire D4, qui coupera l'axe SO prolongé au point 4; la longueur O4. fera le Paramétre de la Parabole, qu'on divifera en quatre parties égales, dont on en portera une de part & d'autre du fommet S en F, pour avoir le Foyer F, & en G fur l'axe 4S prolongé pour avoir la Directrice H*h*, laquelle eft une perpendiculaire à l'axe prolongé d'un

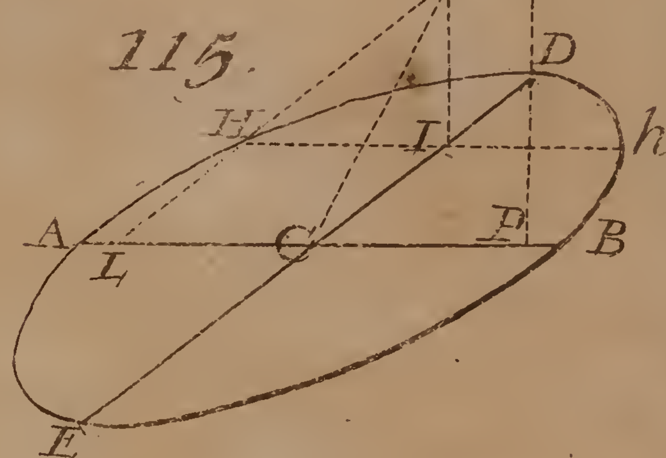

110.
T
L
O
E
H
D
3
4
t
A
F
K
P
C
f
B
Z
o
O
r
I
G
n
2
M
1
K

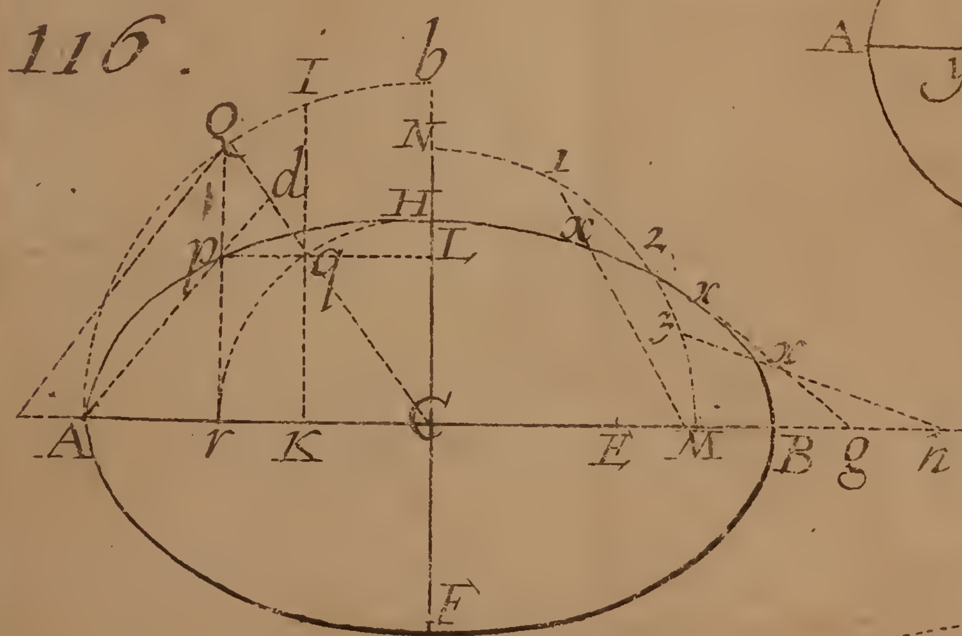

111.
a
T
D
m
t
u
11
p
k
A
E
y
n
C
F
G
r
I
S
q
L
K
E
o
B
d

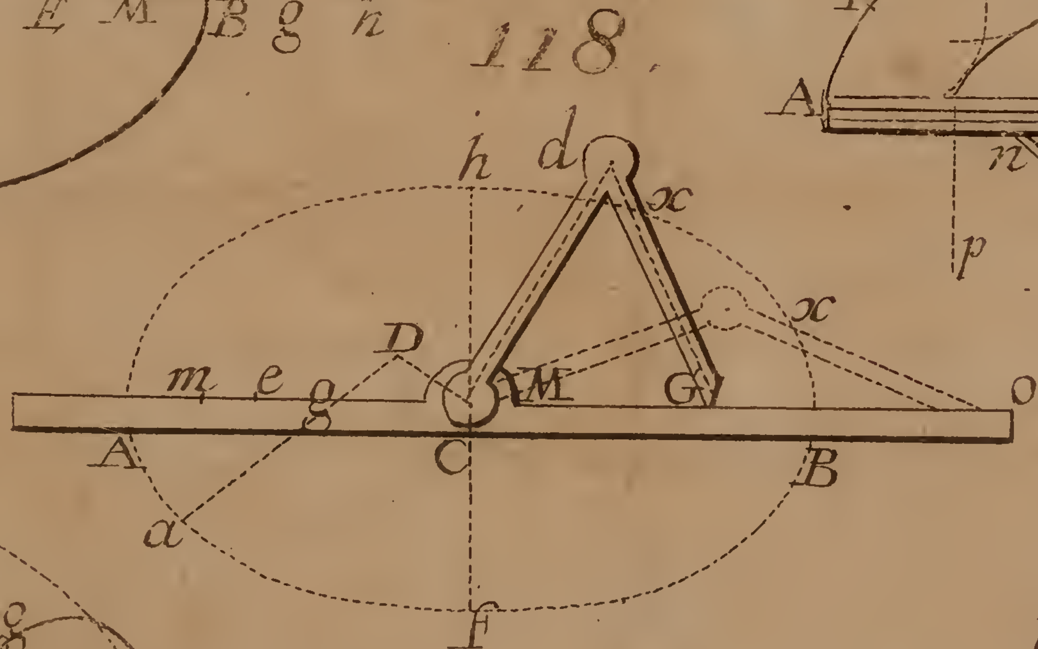

112.
G
K
H
A
m
g
X
Y
t
o
u
E
C
P
D
x
y
B

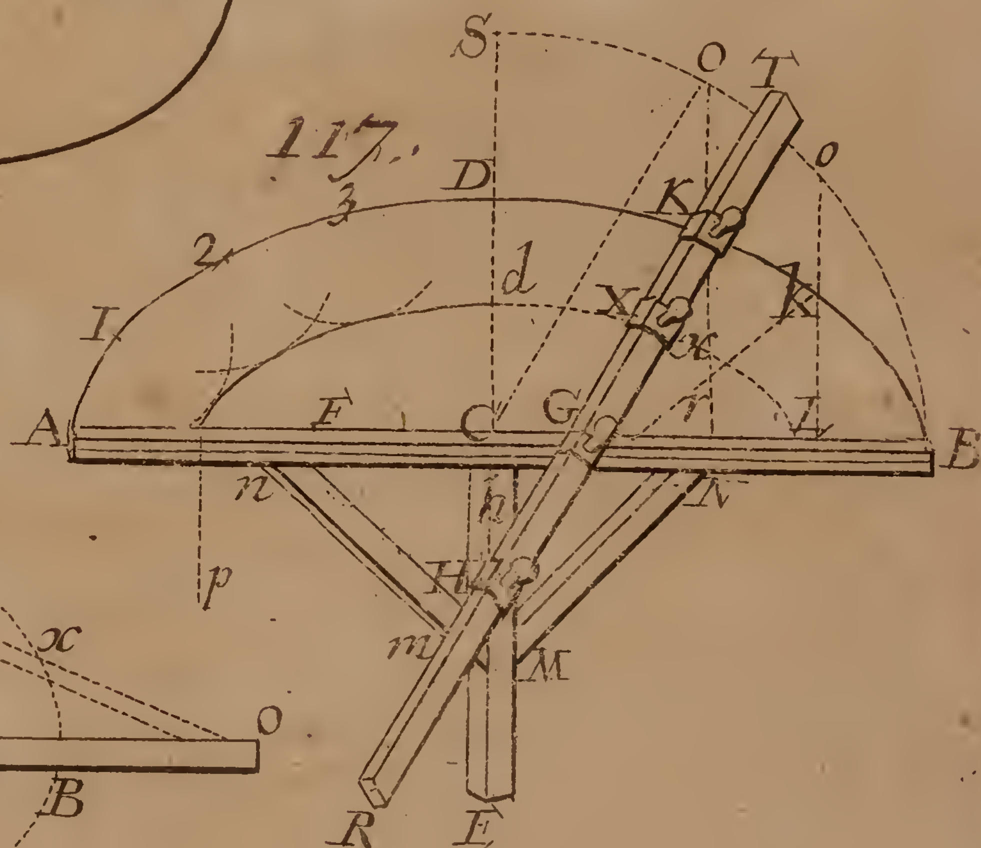

113.
H
G
F
K
L
D
A
C
E
B
I

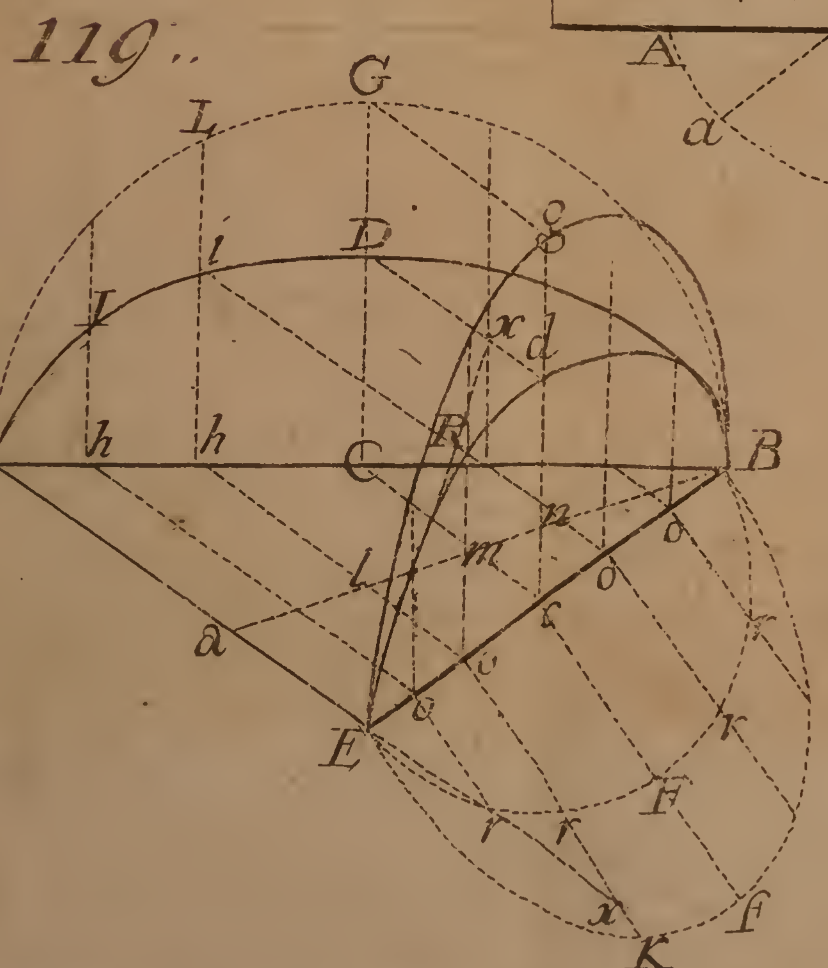

114.
z
b
F
R
X
d
D
V
A
y
C
o
E
B
x

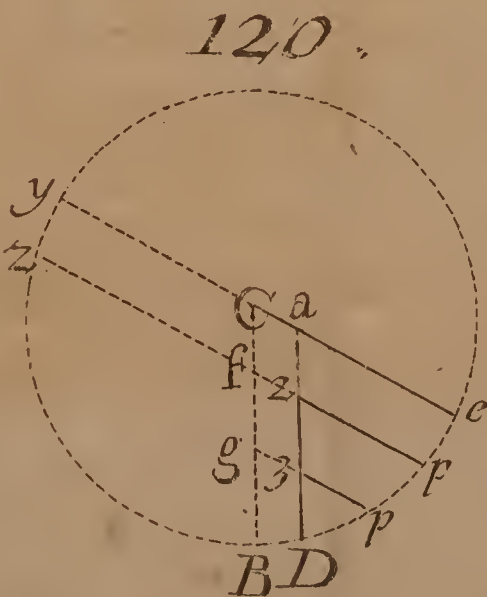

115.
F
G
D
H
I
h
A
C
P
B
L
E

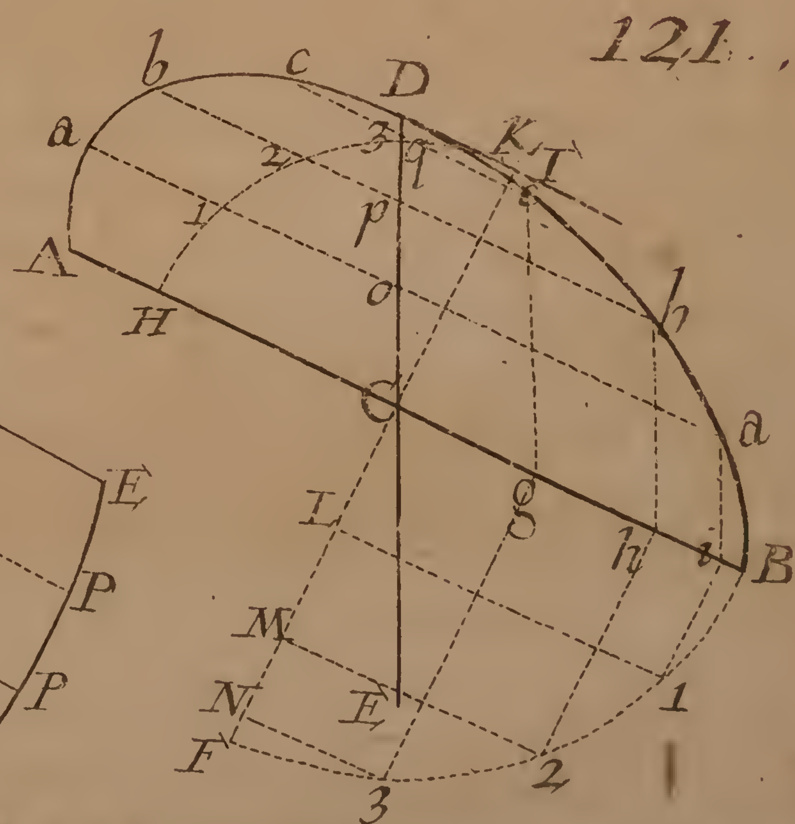

116.
I
b
Q
d
N
1
H
x
2
p
q
L
r
l
3
x
A
r
K
C
E
M
B
g
n
E


118.
h
d
x
D
x
m
e
g
M
G
o
A
C
B
a
F


S
O
T
117.
D
o
3
K
2
d
X
R
I
A
F
C
G
r
L
E
n
N
h
p
H
m
M
R
E


119.
G
L
i
D
g
I
x
d
A
h
h
C
R
B
n
o
m
l
o
a
c
E
F
r
r
x
K
f


120.
y
z
C
a
f
2
e
g
3
f
p
B
D
A
E
2
P
3
P
d


121.
b
c
D
a
K
T
3
2
1
p
A
H
o
h
C
a
I
g
h
B
M
E
N
F
3
2
1

quart du Parametre au-delà du fommet S, nous en dirons l'ufage ci-après.

On tirera enfuite autant de perpendiculaires que l'on voudra à l'axe S O, pour axoir la même quantité de points au contour de la Courbe comme *i*K, dont les points *i* & *i* font pris à volonté; ou bien on cherchera le Parametre, en prenant au contour de la Parabole un point K à volonté, par lequel & par le fommet S, on menera KS *a* indéfinie, puis portant en S *b* la longueur *i*K, on tirera par le point *b* une perpendiculaire à l'axe prolongé, laquelle coupera *k a* au point *a*, la ligne *b a* fera le Parametre qu'on cherche, dont le quart porté de S en G, donnera la fection de l'axe & de la Directrice; enfuite ouvrant le compas de l'intervale G *i*, à chaque point *i* en particulier, on pofera une des pointes en F, d'où comme centre, on décrira un arc qui coupera en K chaque perpendiculaire en *i*K, pour laquelle on a pris l'intervale *i* G correfpondant, faifant de même pour toutes les lignes, on fe fervira du même centre F, & par tous les points SKKD; on tracera à la main, ou avec une Régle pliante une courbe qui fera la parabole que l'on cherche; on en fera de même pour l'autre côté SC*d*.

Demonstration.

La ligne O 4. par la définition du Parametre à la premiere conftruction, ou *a b* à la feconde ayant été faite troifiéme proportionelle à l'axe S O, & à l'ordonnée O D ou *i* K, eft le Parametre de la Parabole, dont le quart eft la diftance du fommet S au Foyer F, & au point G par où paffe la directrice.

Or la diftance de cette ligne eft toujours égale à celle du Foyer à l'extremité de l'ordonnée, comme il eft démontré dans les fections coniques, donc la courbe SKD eft une Parabole.

Seconde Maniere par un Mouvement continu.

On prendra un cordeau égal à la diftance O G, dont on atachera un bout fur la branche EL, d'une Equerre HEL, mefurant fa longueur depuis le point E de fon angle, & l'autre bour fera arrêté à un clou au Foyer F: enfuite ayant pofé la branche EL fur l'axe S O, & l'autre branche EH fur la directrice HA, on y appliquera une régle HR, puis appuyant avec un crayon ou une pointe fur le cordeau pour le tenir appliqué contre la branche EL, on reculera l'Equerre le long de la régle HR, & à mefure qu'on l'écartera de l'axe S O toujours parallelement à elle-même, le crayon coulant dans le pli du cordeau au

point C, tracera la Parabole d'un côté de l'axe ; on tranſportera enſuite l'Equerre pour tracer l'autre moitié du côté apoſé.

Il eſt évident que cette operation eſt preciſément la même que la precédente, mais executée d'une maniere Méchanique ; puiſque l'on aura par-tout CE = CF, comme l'on a eû G*i* = FK, ce qui eſt la proprieté de la Parabole.

USAGE.

La deſcription de la Parabole n'eſt pas d'un fréquent Uſage dans la coupe des Pierres ; elle ſert cependant pour tracer les arcs de face des Trompes quarrées par devant dans un angle Droit : l'axe qui eſt la ligne du milieu de niveau à l'Impoſte eſt donné, & la rencontre du milieu de la Trompe, avec l'aplomb au bout de cette ligne, eſt le point donné au contour de la Parabole.

Elle peut auſſi ſervir à tracer un arc Rampant, dont les Piedroits ſont en ſurplomb, dans une circonſtance, dont nous parlerons dans la ſuite. Elle ſert encore à tracer les jambages des cheminées les plus propres à réflêchir la chaleur du Feu, comme l'a démontré M. Gauger dans la Méchanique du Feu, où il en fait voir l'avantage ſur ceux qui *ſont paralleles* entr'eux.

Comme cette courbe reſemble ſi fort à la *Chainette*, que quelques Mathématiciens s'y ſont mépris, comme le grand Gallilei, & après lui M^rs. Blondel dans ſes Problêmes de l'Architecture, Parent, & le P. Castel dans ſa Mathématique univerſelle ; on pourroit s'en ſervir à tracer les Cintres des voutes, dont on fait les Vouſſoirs égaux. Je crois auſſi avoir lû quelque part qu'un fameux Architecte ſe ſervoit de la Parabole dans les ceintres des Lunettes dans un Berceau.

Enfin on pourroit faire uſage de ce Probleme pour le renflement & courbure du profil de diminution des colonnes, au lieu des deux manieres uſitées, l'axe donné eſt le diametre de la baſe, l'abciſſe eſt la difference des deux demi-diametres à la baſe, & ſous le chapiteau ; c'eſt-à-dire, la diminution d'un côté, le ſommet eſt l'extremité de ce diametre ; & le point à la circonference eſt celui de diminution du diametre ſuperieur, c'eſt-à-dire, ſon extremité ſous l'Aſtragale.

De l'Hyperbole.

PROBLEME X.

Le Centre, le Sommet & un point au contour de l'Hyperbole étant donnez, la décrire par plusieurs Points, & par un Mouvement continu.

SOIT le centre C, le sommet S, & le point D à la circonference, la ligne CO mené du centre par le sommet S en O, sera l'axe prolongé, auquel la perpendiculaire OD sera une ordonnée. Des points S & D pour centres, & pour rayon une ouverture de compas prise à volonté; on fera des sections d'arcs en p & q, pour mener par ces points une ligne pq, laquelle étant prolongée, s'il le faut, coupera l'axe CO en V; d'où comme centre, & de l'intervale VS, ou VD; on décrira le demi-cercle SDG, qui rencontrera SO prolongée en G: ensuite ayant porté la longueur OG sur la ligne DO, prolongé en OH, on lui menera par le point S la parallele indèfinie IST; on prolongera SC en R, faisant CR = CS: on tirera RH, qui coupera IT en I; on portera la longueur SI en SK, pour avoir la ligne KR, qu'on divisera en deux également au point M, ou sera le centre d'un demi-cercle RTK, dont elle sera le diametre, & dont l'arc coupera la ligne ST en T; puis ayant divisé ST en deux également au point N, on portera la distance CN en CF; le point F sera un des Foyers de l'Hyperbole, & si on porte la distance SF en Rf, on aura l'autre Foyer. Fig. 123.

CETTE preparation étant faite, si l'on veut trouver plusieurs points de l'Hyperbole avec le compas d'une ouverture fL prise à volonté, pourvû qu'elle soit plus grande que fS, pour rayon, & du point f pour centre, on fera un arc lL; ensuite on portera le même intervale fl de R en o, par exemple, sur l'axe prolongé, & l'on prendra la difference oS de cet intervale & du premier axe RS, & de cette difference oS pour Rayon, & du Foyer F pour centre, on fera un autre arc xy, qui coupera lL au point x, lequel sera à la circonference de l'Hyperbole, on trouvera de même autant de points que l'on voudra de cette Courbe.

Seconde Maniere par un Mouvement continu.

AYANT pris une régle fE d'une longueur convenable, qui excede la plus grande distance fD du Foyer opposé f, au point donné D; on lui fera un trou au bout f pour y passer un clou, sur lequel elle sera mobile; on portera sur cette régle la longueur RS du premier axe de f en Q; ensuite on prendra un cordeau de longueur égale à QD, dont

on attachera un bout à l'autre Foyer F, puis posant la régle *f*E sur F*o*, on étendra le cordeau qui est lâche dans cette situation, en le tirant par un pli de F en S, le long de la régle, & en l'écartant par le bout E, l'autre restant fixe en *f*, on appuyera sur le pli du cordeau avec un crayon ou une pointe d'outil contre la régle, en le faisant couler vers D, & l'on tracera ainsi l'Hyperbole, comme nous l'avons dit de l'Ellipse & de la Parabole.

DEMONSTRATION.

L'on a cherché une troisiéme proportionelle OG à l'abscisse OS, & à l'ordonnée OD, pour trouver par son moyen le Pammetre SI, car HO=OG: SI:: RO: RS; mais aussi le Parametre est troisiéme proportionelle au premier axe RS, & au second *b*Y, donc en cherchant une moyenne proportionelle ST entre SR & SI=SO, on aura *b*CY qui lui est égale; or il est démontré dans les sections coniques, que la distance du centre C au point N, milieu de ST est égale à celle de ce centre au Foyer, parce que SN est moyenne proportionelle entre RF & SF, ou ce qui est la même chose entr *f*S & SF, comme il est évident par la construction; donc les points *f* & F sont les Foyers; il est aussi démontré que la difference des lignes *f*D, FD tirées des foyers à un point de l'Hyperbole est égale au premier axe RS; donc l'Hyperbole est décrite par les points S & D, *ce qu'il falloit faire.*

Il est clair que la seconde operation, par un mouvement continu, est precisément la même que la premiere par plusieurs points; puisque l'on y a pris la difference FD du premier axe RS, pour en faire la distance du foyer au crayon D; ce n'est donc que la même chose faite méchaniquement avec un cordeau, au lieu d'un compas.

COROLLAIRE.

Fig. 124. Si les deux axes sont donnez, les foyers se trouvent très-facilement en élevant du point S une perpendiculaire S*d*=CD, & tirant C*d* qui sera la distance du centre C au foyer F, que l'on transporte en F par un arc *d*F sur le premier axe prolongé.

Fig. 124. Il faut remarquer que dans l'Architecture où les Cônes sont presque toujours donnez, & le point ou la position du plan de leur section dans le triangle par l'axe du Cône, les deux axes sont aussi toujours donnez; car [*Fig.* 124.] soit ADB le triangle par l'axe, & le plan coupant HSC prolongé; si l'on prolonge aussi le côté BD jusqu'à la rencontre du plan en X, la distance SX est la longueur du premier axe, lequel étant divisé en deux également en C, la ligne CD sera la moitié du

du second axe; & si par le centre C, on tire deux lignes droites CP & CT, paralleles aux côtez DA, DB, on aura aussi les Asymptotes, dont on peut faire usage pour décrire l'Hyperbole par plusieurs points. Cependant comme il peut arriver que le triangle par l'axe du Cône ne soit pas donné; parce que l'on peut considerer les sections coniques hors du Cône. Nous allons faire voir comment l'on peut trouver les Asymptotes d'une Hyperbole, dont on ne connoît que le centre, le sommet & une ordonnée; de même que dans la proposition précedente, ou seulement un diametre & une ordonnée.

PROBLEME XII.

Etant donnez le Centre, le Sommet & une Ordonnée à l'Hyperbole, ou seulement un premier Diametre & une Ordonnée, trouver les Asymptotes & la décrire par plusieurs Points.

Soit [*Fig.* 125.] le centre C, le sommet S, & l'ordonnée DO, on aura l'intervale CS pour la moitié d'un diametre, dont le double SP sera le diametre entier, auquel [étant prolongé] la ligne DO est une ordonnée qui lui sera perpendiculaire, si ce diametre est un axe. *Fig.* 125.

Par le point S, on menera AB parallele indéfinie à DO, & par le point donné D, au contour de l'Hyperbole; on tirera la ligne DP qui coupera AB en A; on fera SG égal à AS, & par le point G ayant mené GR parallele à DO, ou AB; on tirera la droite DSR qui coupera GR au point R, la ligne GR sera le Parametre que l'on divisera en deux également en M; on portera la longueur GM de S en *h*, & sur *h*C, comme diametre ayant décrit un demi cercle; on menera SN perpendiculaire à C*h*, laquelle étant moyenne proportionelle entre le demi diametre CS, & le demi Parametre GM = S*h*, sera égale à la moitié du diametre conjugué au premier SP: on portera donc la longueur SN en SB, qui est parallele à DO [par la construction] la ligne menée du centre C par le point B, sera une Asymptote: la même distance portée de l'autre côté vers A donnera aussi le point par où doit passer l'autre Asymptote CE; *ce qu'il falloit premierement trouver.*

Les Asymptotes étant données, il est très facile de trouver autant de points que l'on voudra au contour de l'Hyperbole; car ayant fait O*d* égal à l'ordonnée OD prolongée de part & d'autre vers *r* & *r*, on tirera à volonté les lignes *qr*, Q*r* par les points D & *d*, ensuite portant les longueurs D*r*, *dr* de *q* en I, & Q en *i*; on aura les points *i* & *i* qui sont à l'Hyperbole; on tirera autant de ces lignes Q*r* qu'on voudra trouver de points *i*, & par ces points, & les points D, S, *d*, on tracera

une courbe à la main, ou avec une régle pliante, laquelle donnera le contour de *l'Hyperbole qu'on cherche.*

On voit, comme au Problême précedent, que si on a la moitié du diametre conjugué toute l'operation est abregée; puisqu'il ne s'agit que de la porter de S en B, pour avoir le point B de l'Asymptote qu'on doit mener par le centre C donné.

La démonstration de ce Problême dépend de quelques proprietez des sections coniques que nous ne pouvons rappeller ici; on les trouvera dans tous les Traitez des sections coniques.

La principale est que les lignes qui traversent les Hyperboles d'une Asymptote à l'autre sont coupées également par leurs diametres; & parce que les ordonnées DO & *d*O sont égales, comme dans toutes les sections coniques, les restes D*r*, & *dr*, sont aussi égaux; ce qui fait la base de l'operation.

USAGE.

On rencontre assez souvent des Hyperboles, lorsqu'il s'agit de faire des voutes ou d'autres corps coniques. La description de cette courbe est nécessaire, 1.° pour faire l'Epure de la Porte en Tour ronde, & en Talud, suivant notre méthode; 2.° pour le trait de la Trompe conique à trois Pans; 3.° pour la Trompe en tour ronde érigée sur une ligne droite; 4.° pour les joins de la Corne de Vache; 5.° pour les naissances des arrieres voussures bombées; 6.° pour la nouvelle arriere voussure de Marseille; 7.° pour les lunettes ébrasées dans une voute sphérique; 8.° les arcs rampans dont les piedroits, feroient en surplomb dans certains cas; 9.° pour les joins montans des arrondissemens coniques des angles en talud; 10.° pour la solution du Problême qui donne la maniere de tirer les joins de Tête des ceintres Elliptiques ou Hyperboliques par des points donnez hors de ces courbes; 11°. enfin le Problême précedent peut servir si l'on veut au trait de la courbe de diminution & de renflement des colomnes, au lieu de la Conchoide de Nicomede; l'Hyperbole selon moy vaudroit mieux pour la grace du contour, parce que si on les diminuoit à la maniere des anciens dès le bas, le fust de la colomne auroit plus de grace étant portion d'Hyperboloide que de Cône tronqué; & par la nature de l'Hyperbole la partie inferieure de la colomne auroit le plus grand arrondissement qui diminueroit & le redresseroit en montant sous le chapiteau; ce qui auroit une grande analogie avec celui que la nature fait

aux Arbres, & par conséquent une plus grande beauté, qui eſt une plus parfaite imitation de la nature.

On auroit donc pour ſommet le côté de la baſe, pour point à la circonference de l'Hyperbole, & pour ordonnée celui de la diminution ſous l'Aſtragale du chapiteau, & pour le centre la diſtance du Module, ou demi diametre de la colomne à la baſe porté ſur la prolongation de ce diametre hors de la colomne, ce qui tombe dans le cas du Problême précedent.

De tout ce que l'on vient de dire, & de pluſieurs autres endroits où nous avons parlé des ſections coniques; on peut conclure que ceux qui diſent comme l'Autheur Moderne de la pratique de la coupe des Pierres, que les ſections coniques n'y ſont pas néceſſaires, n'en connoiſſent pas les uſages.

Scholie.

Par une conſtruction ſemblable à celle de ce Problême, on peut décrire au dehors ou au dedans d'une ſection conique quelconque une courbe ſemblable, dont il ſuffit d'avoir un ſeul point donné.

Soit, pour exemple [*Fig.* 127.] une Ellipſe donnée PTB, dans laquelle on en veut décrire une ſemblable par un point donné *e*; on tirera à volonté par ce point *e* une ligne 1. 2. qui coupera l'Ellipſe donnée aux points 1. 2. on portera l'intervale *e* 1. de 2. en *f*, le point *f* ſera un ſecond point de l'Ellipſe demandée; lequel ſervira à en trouver un troiſiéme, en menant par *f* une ligne auſſi à volonté *g* 4; on portera l'intervale 3*f*, de 4 en *g*, où ſera un troiſiéme point, lequel ſervira à en trouver un quatriéme *h*, en tirant 5 *g* 6, & portant *g* 5 en 6 *h*, ainſi de ſuite.

Ce que nous diſons ici pour l'Ellipſe convient auſſi à la Parabole & à l'Hyperbole; c'eſt pourquoi M. de La Hire a appellé les Figures ſemblables inſcrites ou circonſcrites à une ſection conique; avec cette proprieté *Aſymptotiques*, en ce que l'une peut être conſiderée à l'égard de l'autre, comme une Aſymptote courbe, j'explique ce nom que j'adopterai quelques-fois pour éviter les périphraſes, parce que j'ay trouvé un grand Mathematicien qui ne le trouvoit pas à ſon gré.

PROBLEME XIII.

Par cinq Points donnez qui ne soient pas en ligne droite, tracer une Section conique quelconque par un Mouvement continu, sans en connoître les Axes, les Diametres, les Centres ni les Foyers.

Fig. 126. SOIENT [*Fig.* 126.] les points donnez ABCDE, par lesquels on veut faire passer une section conique qui se trouvera suivant leur situation une Ellipse, une Parabole, ou une Hyperbole; dans l'exemple proposé, ils conviennent à une Ellipse. Ayant tiré par deux de ces points, comme AB une ligne FG, prolongée au delà des points A & B, on tirera les lignes AC, AB, AE & BC, BD, BE: ensuite on prendra avec deux régles, ou avec l'instrument qu'on appelle Sauterelle les angles DAF, DBG, dont on appliquera le côté AD en AC, la branche AF se rangera sur A*x*, de même la branche BD de l'autre angle étant portée en BE, l'autre branche BG se rangera en BX; on en fera de même des angles BE*h*, BDI, & l'on aura l'intersection des côtez E*h* avec A*x* au point *x* & *i*, avec BY, au point Y. On tirera la ligne droite *xy*; ensuite ayant fait avec les mêmes Sauterelles ou quatre régles les angles BAD, ABD mobiles sur les points A & B, comme sur des pivots, on fera croiser les deux branches de la Sauterelle tout le long de la ligne droite *xy*, comme par exemple en *k*, les deux autres branches A*g*, B*f* se croiseront en un point comme L, qui sera à la circonference de la section conique; on continuera de même en promenant la croisée de K tout le long de *xy*; mais lorsque les branches B*f*, AG seront au dessous de B & A du côté de la ligne *xy*, il faudra en prolonger l'alignement par une régle appliqué au long de A*g* ou de BF.

La démonstration de cette construction est un peu trop longue pour lui donner place ici: il suffira de dire qu'il est démonstré dans les Traitez des sections coniques, qu'on peut en faire passer plusieurs differentes par quatre points donnez, mais non pas par cinq; or supposant (comme il est vrai) que ce mouvement organique ne peut produire qu'une courbe du second ordre, si les points se trouvent disposez pour une Ellipse; il n'y en aura qu'une qui satisfasse à la proposition. On peut voir sur cela le sçavant Livre de M. *Mac-Laurin* intitulé *Geometria Organica.*

PROBLEME XV.

Deux Touchantes avec les Points d'attouchement à une Section Conique, & la Direction d'un seul Diametre étant donnez, trouver autant de Points que l'on voudra de cette Courbe, sans connoître le Centre de la Section, ni la grandeur d'aucun Diametre.

Fig. 129. SOIENT les deux touchantes données AD, DB, [*Fig.* 129.] qui

touchent la ſection conique cherchée aux points A & B : ſoit auſſi la ligne AP portion d'un diametre, dont on n'a pas la longueur, mais ſeulement la poſition, c'eſt-à-dire, l'angle DAP, qu'il fait avec la touchante AD : ayant tiré la droite AB d'un point d'attouchement à l'autre, on la diviſera en deux également en F, par où on tirera la ligne droite DFC indéfinie, qui ſera portion d'un diametre, ſur lequel on cherche un point de la Courbe.

On ſçait que ſi la ſection eſt une Parabole, cette ligne DC ſera parallele à AP, autre poſition de diametre donnée : ſi elle doit être une Ellipſe, les lignes AP & DC ſeront convergentes vers C, & ſi elle doit être une Hyperbole, elles ſeront divergentes, & concourront hors de la Courbe.

Par le point F, on tirera FG parallele à AP, qui coupera AD au point G, & l'on diviſera GD en deux également en I; par le point G, on menera GH perpendiculaire à AD, puis du point I pour centre, & de l'intervale IA pour Rayon; on fera un arc H*h*, qui coupera GH au point H : enſuite on menera A*d* parallele à DC, on fera AK égale, ſi l'on veut à GH, où l'on en prendra une partie aliquote, comme la moitié, le tiers ou le quart, ou on la fera plus grande, & l'on fera A*d* égal à AD, ou à la même partie aliquote, que AK l'eſt de GH, & l'on tirera par le point D la ligne *d*E, juſqu'à la rencontre de AB prolongée, s'il le faut, en E, par où on tirera EK qui coupera DC au point *x*, lequel ſera un de ceux de la Courbe.

Pour avoir enſuite un autre point de cette Courbe; on menera par le point *x* une ligne *ab* parallele à AB, & l'on fera la même operation ſur les lignes A*a*, & *ax*, & B*b*, & *bx* qui ſeront deux tangentes données, qu'on a fait ci-devant ſur les deux AD, DB, & l'on aura deux autres tangentes, dont une ſera toujours une partie de AD; & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on ait cinq points de la Courbe pour la tracer par un mouvement continu par le Problême XIII. ou que les points trouvez ſoient multipliez & approchez autant qu'on le ſouhaite, pour la tracer éxactement à la main ou à la Régle pliante.

DEMONSTRATION.

Il eſt démontré dans les ſections coniques qu'un diametre, lequel étant prolongé, paſſe par la rencontre de deux tangentes, coupe en deux parties égales la ligne qui paſſe par les deux points d'attouchement; & par conſéquent toutes celles qui lui ſont paralleles, & par l'inverſe que ſi l'on diviſe une ligne qui paſſe par les points d'attouchement de

Voyez la Hire l. 2. p. 19.

deux autres, en deux également, & que de leur rencontre, & par le milieu de cette ligne, on en mene une autre prolongée, elle passera par le centre de la section conique, si elle en a un; or par la construction nous avons coupé AB en deux parties égales en F; donc la ligne DFC est un diametre.

Nous avons aussi dit Article 46. que la partie de ce diametre coupée par la ligne AB, qui joint les points d'attouchement, celle qui est coupée par la courbe de la section, c'est-à-dire, le demi diametre de celles qui ont des centres, & l'intervale du centre au concours des deux tangentes sont continuellement proportionelles; donc supposant ce centre en C, qui sera dans cette proposition (si l'on veut) hors de la Figure 129. il sera toujours vrai que CF : Cx : : Cx : CD & que AP & DC doivent concourir au centre de la section, si elle en a un; mais parce que on a fait HG moyenne proportionelle entre AG & GD, si l'on porte GH en AI: la ligne Ix sera parallele à AP; comme FG l'est à AP (par la construction,) presentement à cause des trois lignes CF, Cx, CD qui sont en proportion continuë, ou des trois AG, AI, AD; on aura CF : Cx : : Fx : xD, ou : : AG : AI, c'est-à-dire : : AK : Ad (par la construction;) donc à cause des paralleles Ad & FD, on a Fx : xD : : AK : Kd : : CF : Fx : : Cx : CD; donc le point x est à la section, puisqu'il coupe FD, de maniere que Cx est une moyenne proportionelle entre CF & CD : *ce qu'il falloit démontrer.*

Nous avons dit que si CD est parallele à AP, la section sera une Parabole, alors le point G tombera en D, & AI deviendra la même que AD, d'où il suit qu'il suffit de diviser FD en deux également en z pour avoir ce point à la Parabole; ce qui se trouveroit aussi par la premiere construction, parce que AK & Kd seroient égales, & par conséquent Fx & xD qui leur sont paralleles dans le triangle ADE.

Si les lignes DC & AP concourent au dehors, la construction sera toujours la même, mais renversée, telle est l'Hyperbole à l'égard de l'Ellipse.

USAGE.

Cette proposition peut servir dans l'arrondissement des angles des Figures irregulieres, par exemple pour une cage d'Escalier dans un angle aigu ou obtus, dont on prend la naissance à des points donnez par la convenance du lieu: elle peut aussi servir pour les arcs Rampans, où l'on a trois tangentes & trois points d'attouchement donnez; mais pour ceux-ci, nous donnerons le Problême suivant.

PROBLEME XIV.

Trois Tangentes à une Section Conique, & leur Point d'attouchement étant donnez, trouver celle des Sections qui doit les toucher, & les Lignes nécessaires pour la décrire.

Premierement, on peut facilement connoître la nature de la section conique demandée par les observations suivantes.

1.° Si deux de ces tangentes sont paralleles, comme AS, BO *Fig.* 130. & 131. la section ne peut être qu'un cercle ou une Ellipse; parce qu'il n'y a que ces deux qui rentrent en elles-mêmes. Elle sera un cercle si les tangentes PC, CT sont égales de même que T*i* & *ir*, & une Ellipse, si elles sont inégales, comme PE, EF * & RS, ST, &c. *Fig.* 130. & 131. **Fig.* 131.

2.° Si deux de ces tangentes, n'étant pas paralleles, concourent en X *Fig.* 127. du côté opposé au troisiéme point d'attouchement T donné, comme PA, RB, la section demandée sera encore une Ellipse, par la même raison, ou un cercle.

3.° Si les deux tangentes extrêmes AS, BO étant prolongée, concourent du côté du troisiéme point d'attouchement T donné; & que la tangente moyenne soit parallele à la ligne RP *Fig.* 128. qui passe par les points d'attouchement P & R des extrêmes, comme SO parallele à RP; il sera encore facile de connoître qu'elle est la Courbe qui satisfait à la question. *Fig.* 128.

Ayant divisé RP en deux également en *m*, on tirera *m*X, qu'on divisera en deux également en T.

1.° Si la tangente moyenne SO passe par ce point T, la courbe demandée sera une Parabole.

2.° Si cette ligne passe au dessous, comme en EL, elle sera une Ellipse.

3.° Si elle passe au dessus du côté de X, comme en *hy*, elle sera une Hyperbole.

4.° * Si la tangente moyenne SO n'est pas parallele à RP, qui passe par les deux points d'attouchement des extrêmes; on connoîtra encore facilement qu'elle est la section qui satisfait à la proposition; car ayant prolongé RP & SO, jusqu'à ce qu'elles concourent en Y, il ne s'agit que d'examiner le raport des parties des lignes SY & PX, si SY : SO : : XO : OP, la courbe sera une Parabole, si le raport de SY à YO, est **Fig.* 132. *Fig.* 132.

moindre que celui de X O à O P, elle sera une Ellipse, s'il est plus grand, elle sera une Hyperbole.

Fig. 133. *Premiere solution pour la Parabole* ayant divisé RP en deux également en M, & tiré MX qui coupera SO en T; on lui menera par les points P & R, les paralleles PQ, RV jusqu'à la rencontre de SO prolongée, qui les coupera aux points V & Q; on divisera ensuite les lignes TX, PQ, RV en un même nombre de parties égales, par exemple ici en trois, à commencer le compte des divisions vers la ligne SO; les lignes menées par les points correspondans 1. & 1. 2. & 2. se couperont en des points *y* & *z*, Y & Z qui seront à la circonference de la Parabole; ainsi menant une ligne à la main, ou avec une Régle pliante par les points R*zy*TY*zp*; on aura le contour de la section qui touche les trois lignes données.

Seconde solution pour l'Ellipse & l'Hyperbole, par les points d'attouchement donnez RTP, ayant tiré les lignes RT, PT [*Fig.* 134.] on les
Fig. 134. 135. divisera en deux également en N & *n* par où, & par les points S & O, on menera les lignes NS, *no*, lesquelles étant prolongées, se couperont au point C, où sera le cêntre de la section, par le moyen duquel on a déja un diametre en portant CT en C*t* sur la même ligne prolongée; ainsi la question sera réduite à celle-ci: *un diametre & une ordonnée à ce diametre étant donnée, trouver son Parametre, & autant de points que l'on voudra de la section.*

Par les points P & *t* ayant mené VP*t*, qui coupera SO prolongée en V; on portera VT en TD sur le diametre T*t* prolongé [*Fig.* 134.] & sur la prolongation, on menera D 3. parallele à SO, qui sera terminée au point 3. par la droite PT 3. par ce point, on menera 3. Q parallele & égale à DT, & l'on divisera les longueurs 3. Q & TV en même nombre de parties égales, par lesquelles & par le point T, on menera les lignes 1T*y*, 2T*z*, & du point *t* par les divisions de TV, les droites *ty*, *tz*, qui couperont les précedentes aux points *y* & *z*, & qu'ils seront à la circonference de l'Ellipse *Fig.* 134. ou de l'Hyperbole *Fig.* 135. si par les points *y* & *z*, on mene des paralleles *yf*, *zf* à SO, qui couperont le diametre T*t*, *Fig.* 134. ou sa prolongation *Fig.* 135. en *e* & *g*, & qu'on fasse $ef = ey$, $gf = gP$, on aura les points *t*, *f* & *f* correspondans à ceux de l'autre côté de la courbe; & on pourra la tracer à la main, ou avec une Régle pliante; *ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Premierement, pour l'invention du centre de la section. Puisque les lignes RT & TP qui joignent les points d'attouchement sont divisées en deux

également en N & n, & que les lignes NS & nO paſſent par la rencontre * des tangentes; elles ſont dans la direction des diametres, par conſéquent chacune d'elles paſſera par le centre qui ſera au point C qui leur eſt commun, & le point T étant à la circonference, la ligne menée par CT ſera encore un diametre égal à 2. CT = Tt, par la conſtruction; & parce que SO tangente paſſe par T, toute ligne comme gP qui lui ſera parallele, ſera une ordonnée à ce diametre; par le moyen de laquelle on a trouvé ſon Parametre, qui doit être une troiſiéme proportionelle au premier Tt, & au ſecond inconnu, qu'on ſuppoſe ici pour la facilité de la démonſtration égal EI, *Fig.* 134.

Art. 50. *Voyez la Hire l. 2. p. 19. L'Hopital Art. 20.*

Ayant mené tI juſqu'en SO prolongée en u, & ayant fait comme dans la conſtruction TW = Tu, W 4, parallele à SO, & tiré T 4, la ligne W 4. ſera le Parametre du diametre tT; car ſi l'on appelle tT $2a$, CI b, Tu, d, 4W, x; à cauſe des triangles ſemblables Ttu; CtI, on aura $2a : d :: a : b$, & à cauſe de TW = Tu, & des triangles ſemblables T4W, TIC, on aura $a : d :: b : x$, donc en multipliant ces deux analogies, on aura $2aa : dd :: ab : bx$, & $2aabx = ddab$, & retranchant de part & d'autre ab: on aura $2ax = dd$, c'eſt-à-dire, que le rectangle de $2a$ = Tt par x = 4W, ſera égal au quarré de dd = 2CI = EI, donc 4W eſt le Parametre qui eſt égal pour toutes les Ordonnées gP, ez, ey au diametre Tt, auquel il eſt troiſiéme proportionelle; *ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

Dela on tire la maniere de connoître quelle eſt la ſection qui convient aux trois tangentes données; car ſi les lignes qui paſſent par les rencontres des tangentes, & les milieux des lignes qui joignent les points d'attouchement, concourent en dedans, comme à la Figure 134. la ſection eſt une Ellipſe, ſi elles concourent en dehors, *Fig.* 135. c'eſt une Hyperbole, & ſi elles ne concourent point, qu'elles ſoient paralleles, c'eſt une Parabole, *Fig.* 133.

CHAPITRE III.

De la Description de quelques Courbes Usuelles dans l'Architecture.

Lesquelles ne sont pas des Sections Coniques.

PROBLEME XVI.

Tracer une Ovale du quatrième Ordre formée par la Section plane d'un Corps Cylindrique, Annulaire, Horisontal ou Rampant, c'est-à-dire, Helicoide.

Pl. 13. Fig. 149. SOIT [planche 13. *Fig.* 149.] la moitié d'un corps Cylindrique, Annulaire *i*DIGF*gi*, dont les côtez *i*DI exterieur, & *g*FG interieur, sont des cercles Concentriques au centre C, & dont l'axe courbe est dans le même plan que ces deux cercles. Soit un autre plan perpendiculaire à celui-ci qui coupe le corps Annulaire, suivant la ligne AB; il faut décrire la courbe formée à la surface de ce corps par la section du plan.

SUR *ig* diametre du corps Cylindrique ayant fait le demi cercle *ihg*, qui represente la moitié de sa base; on divisera ce diametre *ig* en autant de parties que l'on voudra avoir de points de la courbe pour sa moitié, jusqu'à une ligne CD, qui sera prise pour Rayon du cercle exterieur, & perpendiculairement sur *i*I; par les points de division 1, 2, 3, 4, on fera du même point C pour centre autant d'arcs concentriques, prenant successivement pour Rayons de ces arcs C 1, C 2, C 3, C 4, & terminant ces arcs à la ligne AB, par où passe le plan coupant, aux points KLM, par lesquels on élevera autant de perpendiculaires indéfinies sur AB, & pour en déterminer la hauteur, on élevera de même sur le diametre *ig* autant de perpendiculaires par les points 1, 2, 3, 4, lesquelles couperont le demi cercle *ihg* aux points *s*, *t*, *h*, *u*, *x*; ensuite portant les longueurs 1 *s* en K*k*, 2 *t* en L*l*, 3 *u* en M*m*, & 4 *x* en EÆ; on aura les points *klm*Æ, par lesquels on fera passer une courbe tracée à la main, ou avec une Régle pliante. On portera les Ordonnées correspondantes de l'autre côté de CD en N*n*, O*o*, P*p*, & on aura tout un côté de cette Ovale depuis son axe AB, auquel l'autre sera égal; si on a besoin de le tracer, ce que nous n'avons pas fait dans cette Figure pour ne la rendre pas trop confuse.

A l'égard du milieu où est le plus grand abaissement de l'inflêxion; il sera trouvé par l'arc tangent à la ligne AB qui est ici 4E, & sa hauteur 4 *x* portée en EÆ.

Corollaire I.

Si le Plan coupant approche plus près du point F que la ligne AB, l'inflêxion au milieu ſera plus grande ; de ſorte que ſi le plan coupant paſſe par F, au point d'attouchement du cercle *g*FG, qui eſt le côté interieur de l'Anneau, la courbe ſe diviſe en deux, & le point Æ tombe ſur le point F ; parce que le point *g* correſpondant de la baſe *ihg* eſt dans le même plan que le point F, par conſéquent l'ordonnée EÆ ſe réduit à rien. Si au contraire le plan coupant AB, toujours perpendiculaire à CD, paſſe par le point T milieu de FD, l'inflêxion de la Courbe ceſſera vers ſon milieu où elle ſera très peu courbe, & preſque droite ; & au contraire à meſure que le plan AB s'aprochera de D, toujours perpendiculairement à CD, la courbe deviendra de plus en plus courbe vers ſon milieu, & reſemblera fort à une Ellipſe, ce que l'on peut facilement concevoir par la tranſpoſition des ordonnées 1*t*, 2*t*, *ch*, qui vont en s'élevant, & qui ſe rapprochent à meſure que le plan coupant s'approche de D : & parce que l'ordonnée 4*x* qui s'abaiſſe à l'égard de *cb* n'a plus lieu, lorſque le plan coupant paſſe en T, ou au delà vers D, de même que l'ordonnée 3*u* n'a plus lieu, lorſque le plan coupant AB eſt plus près de D que le point 3. de la baſe *ihg*, n'eſt éloignée du point *i*; & ainſi des autres.

Corollaire II.

Il eſt évident que ſi le corps Annulaire eſt fort épais à l'égard du vuide de ſon milieu *g*FG, la ſection ſera plus ſenſiblement pliée dans la partie interieure, c'eſt-à-dire, quand la ſection ſe fait au dedans de T, & plus arondie au delà.

A l'égard de la ſeconde partie de ce Problême qui concerne la Coubre faite par la ſection d'un corps Annulaire, dont l'axe n'eſt pas dans un même plan, mais élevé en Helice tournant autour d'un axe, comme le Lierre autour d'un arbre ; nous avons dit qu'elle étoit la même que la précedente, avec cette ſeule difference que ſes Ordonnées K*k*, L*l*, M*m* ſous la Figure 149. ne font pas un angle Droit avec leur axe a*b*, mais un angle aigu aK*k*, aL*l*, &c. leſquelles cependant ſeront toujours paralleles entr'elles, & inclinées à leur axe ſuivant le même angle.

Ainsi pour tracer la Courbe du corps Cylindrique, Helicloide coupé par un plan parallele à l'axe de l'Helice ; on commencera par tracer la ſection d'un corps Annulaire, Horiſontal, de même demi diametre de revolution CD, & de même diametre de baſe *ig*: enſuite ayant fait une ligne *ab*, qui repreſente la ſection du plan vertical AB, avec l'Horiſontal *ab* on élevera au point *a*, une ligne *a*a perpendiculaire à *ab*, & d'une

longueur *a* a, qui sera déterminée par l'élevation de l'Helice sur l'Horison au point où le plan vertical coupe le côté exterieur montant du corps cylindrique, helicoide ; & de ce point a d'hauteur donnée, on tirera la ligne a*b* inclinée, qui sera l'axe de la section qu'on cherche ; il ne s'agit donc plus que de diviser cet axe en même raison que l'axe AB du corps Annulaire est divisé, pour cela il n'y a qu'à en transporter les divisions des abscisses sur l'horisontale *ab*, ou (si on les met sur le même axe ED, en sorte que AB soit parallele à *ab*,) on ne fera qu'abaisser des paralleles à ED, par les divisions KLME, &c. lesquelles couperont l'axe incliné a*b*, en des points KLM*e*, &c. sur lesquels on portera les Ordonnées de la base *ihg*, aux points correspondans aux nombres 1, 2, 3, 4, comme l'on a fait ci-devant, & comme la Figure 149. le fait voir très sensiblement.

La seconde difference qu'il y a de cette Courbe à celle du corps Annulaire, est qu'elle n'est pas uniforme à chaque moitié, le long de son axe a*b*, à cause de l'obliquité de ses Ordonnées ; elle est plus arondie vers a du côté de l'angle aigu, que vers *b* du côté de l'angle obtus, la raison en est claire ; car quoique toutes ces Ordonnées soient paralleles, les distances de leurs sommets ne sont pas égales ; car si l'on tire des lignes droites des points a & *b*, aux points *k* & P, quoique les côtez aK & p*b* soient égaux, de même que K*k* & P*p* ; il est évident par la Geometrie Elementaire que dans les triangles *pb*P, a*k*K, qui ont deux côtez égaux qui comprennent des angles differents, la base oposée à l'angle obtus, sera plus grande que celle de l'angle aigu.

Demonstration.

Si l'on suppose un plan passant par l'axe du corps Annulaire, Cylindrique, & sur ce plan plusieurs Cylindres d'inégale grandeur, mais concentriques au centre C, & dont l'axe commun soit perpendiculaire au même plan *i*DIC ; les sections de leurs surfaces coupées par ce plan seront autant de cercles Concentriques ; & si l'on suppose un second plan AÆB perpendiculaire au premier, & coupant le corps Annulaire & les Cylindres, il fera dans chaque Cylindre un parallelograme, dont les côtez seront perpendiculaires au plan *i*DIC, comme K*k*, L*l*, M*m*, &c. & chacun de ces côtez aura une partie commune à l'Ordonnée du cercle, qui seroit fait par la section C*i*, CK, ou CD, d'un troisiéme plan coupant le corps Cylindrique, perpendiculairement à celui qui passe par son axe courbe, par le centre C, & l'origine de chaque Ordonnée K, L, M, E, &c. comme C*y*, lequel seroit pour section un demi cercle égal à *ihg*, que nous prenons pour base de ce corps ; donc tous les points *klm*Æ, &c. sont au contour de la Courbe, *ce qu'il falloit faire.*

Nous avons dit au Livre I. de quel uſage étoit cette courbe dans les voutes ſur le Noyau & la vis St. Giles ; on en verra l'application au Trait de ces voutes au Livre IV. voilà à peu près toutes les ſections des corps, dont nous devons connoître les Courbes.

De la Spirale.

Quoique la ſpirale ne ſoit pas une ſection de ces Corps réguliers, qui ſont le principal objet de notre Stereotomie ; elle eſt cependant une ſection de ceux que la nature produit, & que l'Architecture imite en pluſieurs rencontres, tels ſont certains coquillages, & quelques cornes d'Animaux : par cette raiſon nous avons cru devoir lui donner place dans la deſcription des Courbes uſuelles, pour la conſtruction, & la décoration des Edifices.

Il n'y a pas de courbe dans la Geometrie qui puiſſe être ſujette à plus de varieté qne la ſpirale ; M. Varignon dans un Memoire inſeré dans ceux de l'Academie des Sciences en a fait voir differentes generations, qui peuvent être pouſſées à l'infini, nous qui n'en voulons qu'à la pratique, nous nous contenterons d'en donner les premiers Principes.

Probleme XVII.

Tracer la Spirale la plus ſimple & la plus uniforme, qu'on appelle la Spirale d'Archimede. Plan. 12.

Du centre C, [*Fig.* 136.] & de l'intervale C A pour Rayon pris à volonté pour celui d'une revolution entiere de la ſpirale ; ayant décrit un cercle A 3, 6, 9 A, on en diviſera la circonference en autant de parties qu'on voudra avoir de points au contour de la ſpirale : on la diviſe commodement en 12. comme dans cette Figure ; parce qu'en portant ſix fois le Rayon à la circonference du cercle, on n'a plus qu'à diviſer en deux chaque ſixiéme, & tirer les diametres A 6, 9, 3, &c. on peut multiplier cette diviſion autant que l'on voudra, pour avoir la courbe plus exactement. Enſuite on diviſera le Rayon CA en autant de parties qu'on a diviſé la circonference, pour trouver par leur moyen ſur chaque differente poſition du Rayon A C, la longueur du Rayon de la courbe, laquelle partant du point A, s'approche continuellement de ſon centre C ; ou ce qui eſt encore mieux, ſi l'on veut la conſiderer autrement, partant du centre C, s'en écarte continuellement, en tournant autour de ce centre à l'infini, ſi l'on veut. *Fig.* 136.

Du centre C, & pour Rayon l'intervale C 1, partie de C A ; on décri-

ra l'arc 1 *a*, lequel coupant le Rayon C*a* 1, de la premiere division de la circonference A 1, donnera le point *a* au contour de la spirale; ensuite du même centre, & d'un intervale plus petit d'une division C 2; on décrira entre les Rayons C*a* 1, C*b* 2, l'arc 2*b*, qui donnera le point *b* sur le Rayon C*b* 2. On continuera de même pour trouver les autres points *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, &c. en diminuant toujours le Rayon d'une douziéme partie, jusqu'à ce qu'on ait parcouru toute la valeur du cercle A 3 *b* 9 A, & alors on aura une revolution entiere de la spirale, qui revient au Rayon AC, d'où elle étoit partie.

Le cercle qui enferme la premiere revolution s'appelle *Cercle circonscript*, & celui qui répond à plusieurs, ou qui est au dehors ou au dedans du point A s'appelle *Cercle de revolution*, & les arcs 1 *a*, 2 *b*, 3 *c*, *Arcs de revolution.*

Corollaire I.

Il suit par cette géneration que les parties du Rayon AC, sont essentiellement proportionelles aux arcs de revolution, ou ce qui est la même chose, à ceux du cercle circonscript; de sorte que si le Rayon A C en parcourt la 24.e ou 36.e partie, ce Rayon diminuera ou augmentera pour chaque arc de revolution d'une 24.e ou 36.e partie, &c.

Corollaire II.

Il suit encore que lorsqu'on veut avoir plus d'une revolution, par exemple, une & demi, ou deux & un quart; il faut diviser le Rayon A C, que nous supposons toujours pris à volonté, en un nombre de parties convenables à ce dessein, par exemple pour une & demi, dans la supposition de la division de celle du cercle en douze; on divisera le Rayon en dix-huit parties, & pour deux & un quart en vingt-sept, & alors on aura plus d'un point de la spirale sur chaque Rayon du cercle de revolution; on tracera enfin d'un point à un autre, une ligne courbe à la main, ou avec une Régle pliante; & l'on aura la spirale qu'on demande, si on la veut réguliere; mais parce qu'on veut quelques fois en alonger ou racourcir le contour, suivant les differents effets qu'on se propose; nous dirons comment on peut le varier.

Corollaire III.

Si après avoir tracé une spirale comme en A *c f i* C, du côté droit, on retrace la même tournée du côté gauche, comme la ponctuée A *k f l* C, qui croise la précedente en *f*, partant de la même origine A, & aboutissant au même centre C; il se formera un entrelas, dont le milieu à

la figure d'un cœur C*iflC*, qui peut servir aux ornemens des grilles de fer contourné, & autres Ouvrages de pareille nature, qui ont été fort à la mode dans les Roses des vitraux de l'Architecture Gotique.

Probleme XVIII.

Alonger ou racourcir le contour de la Spirale, en telle Raison que l'on voudra.

L'on peut résoudre ce Problême d'une infinité de manieres; car on peut faire les Rayons des arcs de revolution dans le rapport des Ordonnées de telles abscisses de courbe que l'on voudra choisir, & les arcs de revolution dans le rapport de leurs Ordonnées; ce qui rend ce Problême très general. On peut aussi, sans varier les arcs de revolution les faire tous d'un nombre égal de Degrez, & varier seulement les Rayons de ces arcs en telle raison que l'on voudra, comme dans celle des tangentes, ou des secantes, ou des Puissances, comme des Racines, des Quarrez, des Cubes, &c. les Architectes se servent dans leur volute Ionique, du rapport des tangentes: j'en vais donner un exemple, où l'on peut augmenter l'inégalité des divisions en élevant le Rayon à diviser AC, *Fig.* 137. au dessus du point P, où est l'angle Droit du sinus total RP; par exemple en C: *Fig.* 138.

Soit donc le rayon donné AC, pour le plus grand de la spirale 137. dont on veut que le contour se reserre plus que la spirale réguliere, à mesure qu'elle approche du centre C, & à laquelle on veut faire faire deux revolutions: ayant transporté ce rayon en aC, *Fig.* 138. & ayant pris à volonté le point R, en sorte qu'ayant mené à ce point une ligne CR, elle fasse avec aC, un angle obtus a*c*R, on tirera aR, & du point R pour centre & pour Rayon RC; on fera l'arc CD qui coupera DR au point D; on divisera cet arc en vingt-quatre parties pour deux revolutions, & par chaque division, & par le centre R, on tirera autant de lignes jusqu'à la rencontre de aC, qui donneront vingt-quatre divisions inégales, diminuant vers le point C; on portera ces divisions sur le Rayon AC, [*Fig.* 137.] où l'on les marquera par des chiffres, pour éviter la confusion, & on operera sur ce Rayon de la même maniere qu'au Problême précedent; ce qui donnera une spirale, telle qu'on la voit à la Figure 137.

Fig. 137, 138.

Corollaire.

Dela on tire la maniere de faire une spirale dans une autre, pour lui servir de compagne, qui forme avec elle une côte élevée, ou un creusé en canal, comme aux volutes des Chapiteaux des colomnes de certains

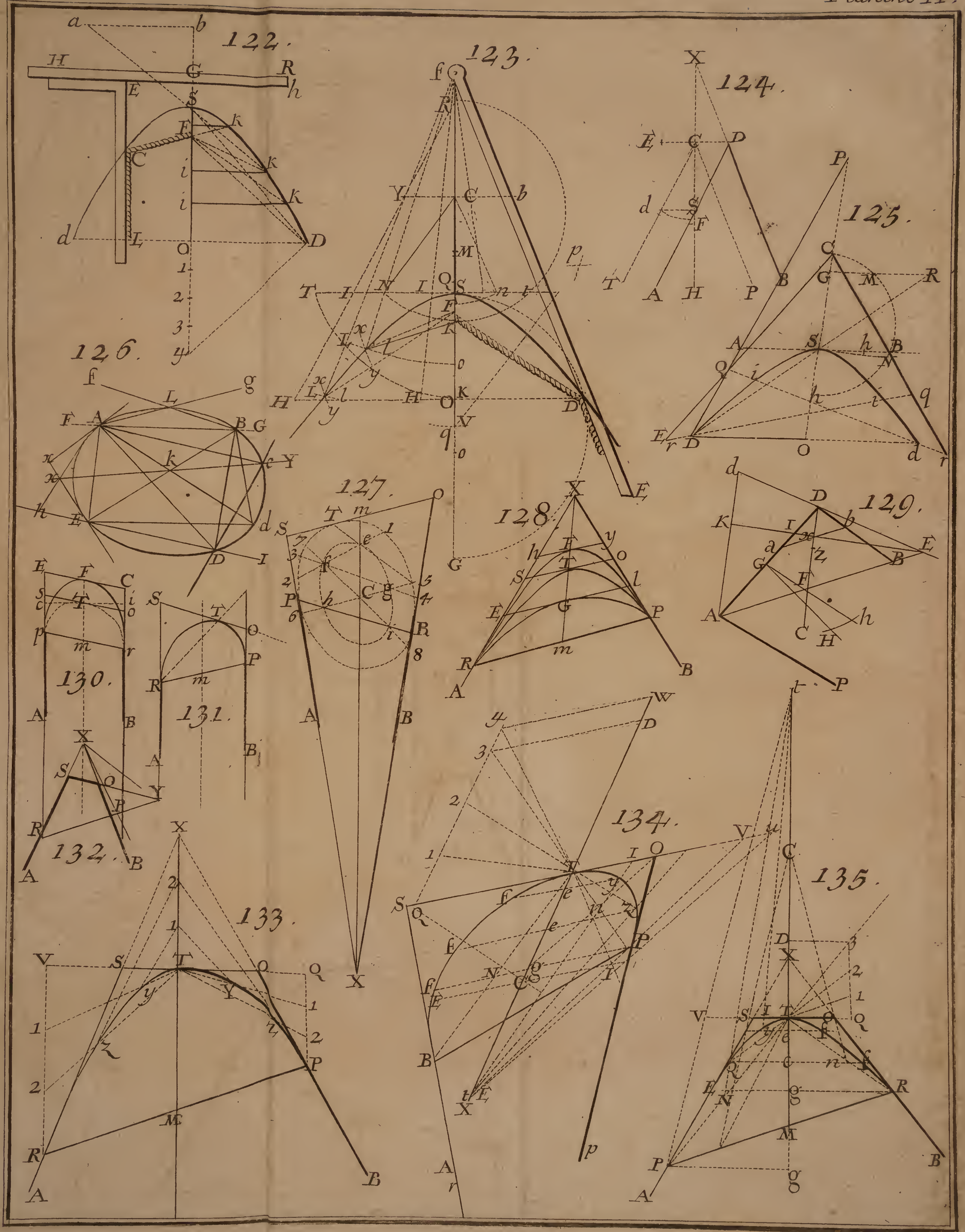
ordres d'Architecture; en ſorte qu'elles ſe reſſerrent plus ou moins au gré de l'Architecte; quoique partant ſi l'on veut d'un même point D, elles viennent aboutir au même centre C par differents chemins, ainſi la ſpirale D*i*K*lmn*C ſe rapproche plus de ſa compagne A 3 6 9 12 C que la ſpirale DEFGHC, quoique l'une & l'autre partent du même point D, & arrivent au même centre C.

Fig. 139. Soit [*Fig.* 139.] la ligne A 12, égale à la diſtance donnée de la premiere revolution à la ſeconde, & dans cet intervale un point D à volonté pris pour la naiſſance de la ſpirale interieure, que l'on placera auſſi ſur le Rayon AC de la Fig. 137. on fera 12 S perpendiculaire & égale à 12 A, puis on tirera SD & SA: ſur s 12, on portera tous les intervales de la premiere ſpirale pris ſur les Rayons tirez du centre C: C 2, C 4, C 6, &c. par exemple 15 3 de S en 3 à la Fig. 139. 18, 6 de s en 6, ainſi du reſte; & par les points 3, 6, 9, &c. ayant mené des paralleles à A 12 qui couperont SD aux points *efgh*, on aura les longueurs *e* 3, *f* 6, *g* 9, *h* 12 qui donneront ſur les mêmes Rayons du cercle de revolution A 6 12 18 A les points E, F, G, H, des diminutions des Rayons pour la ſpirale interieure ou compagne de la premiere A 3 6 9 12 &c. D'où il ſuit qu'en élevant ou abaiſſant le point D, on change le contour de la ſpirale: preſentement ſi aulieu de la droite SD, on avoit fait un arc de cercle ou S*c*D, S*b*D, on auroit eu une compagne de la ſpirale, qui auroit commencé & fini au même point que la précedente, mais qui n'auroit pas ſuivi la diſtance proportionnelle triangulaire.

On peut non ſeulement changer les longueurs des Rayons, mais encore le rapport des arcs de revolution; ce qui peut fournir le moyen de faire une infinité de ſpirales, toujours differentes; car on peut faire ce rapport égal à celui des Ordonnées d'une courbe quelconque Geometrique ou Mechanique, comme l'a imaginé M. Varignon, qui nous a ouvert le chemin à des variations infinies de ſpirales, où il s'en trouve d'un contour très agreable: je vais donner un exemple de celles qu'il appelle *Paraboliques verticocentrales*, c'eſt-à-dire, qui ont leur ſommet au centre de la ſpirale, choiſſant la plus ſimple, qui eſt celle qu'on tire du cercle; il ſera aiſé d'en faire l'application à l'Ellipſe, aux autres ſections coniques, ou à telle courbe qu'on voudra.

Spirale, Circulaire ou Elliptique ou Parabolique, &c.

Soit *Fig.* 140. la ligne AX priſe pour l'axe d'une ſpirale, dont la courbe Generatrice eſt un quart de cercle CLR: ſoit AC, le plus grand Rayon de la ſpirale, & le point C pour ſon centre, la ligne AC ſera priſe pour l'axe de la courbe qu'on choiſit pour *Generatrice*, lorſqu'elle eſt ici un cercle,


122 .
123 .
124 .
125 .
126 .
127 .
128 .
129 .
130 .
131 .
132 .
133 .
134 .
135 .

cercle, dont elle ſera le rayon, & le point A le centre: l'axe de la ſpirale AX, ſon centre C, & la courbe Generatrice C 6 R étant donnez, on ſe déterminera au nombre de revolutions, qu'on veut qu'elle faſſe, & l'on prendra une ligne conſtante S T, qui ſoit contenuë dans la plus grande Ordonnée RA de la courbe Generatrice RLC, autant de fois que l'on veut de revolutions completes ou incompletes: nous la ſuppoſerons dans cet exemple contenuë deux fois & demi dans RA, pour avoir deux tours & demi de la ſpirale; enſuite il faudra toujours faire cette analogie.

Comme la ligne conſtante S T,

Est à l'Ordonnée variable de la courbe Generatrice.

Ainsi le cercle de revolution 12 9, 6, 3,

Sera à l'arc de revolution, au premier tour, ou au cercle de revolution, plus à un arc de ſeconde revolution donné.

A l'arc de revolution cherché;

Si la courbe Generatrice eſt une Ellipſe, une Parabole, ou une Hyperbole, &c. la ſpirale s'appellera *Elliptique*, *Parabolique ou Hyperbolique*, *&c.*

Pour s'épargner le calcul de cette analogie; on diviſera la ligne donnée S T en autant de parties égales qu'on voudra, pour ſervir d'échelle propre à connoître le rapport de cette conſtante avec les Ordonnées du cercle tirées par des points de l'axe A C, qui ſeront pris pour les termes des Rayons des arcs de revolution, comme C 1 [a], C 2 [a], C 3 [a], C 4 [a], &c. leſquels termes ſeront auſſi ceux des abſciſſes de cet axe A X; ſuppoſant, dans cet exemple, la ligne S T diviſée en 12. & le cercle de revolution 12, 9, 6, 3, auſſi en 12, ou ſi l'on veut en 360. degrez, dont 30. répondront à une diviſion de ST; on diviſera l'Ordonnée AR en 30. parties égales pour deux revolutions & demi, & par ces diviſions *bcde*F, &c. on menera des perpendiculaires à l'Ordonnée AR, ou ce qui eſt la même choſe des paralleles à l'axe A C, qui couperont la courbe Generatrice ALC aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6, par leſquels on menera des perpendiculaires à l'axe A C, qu'elles couperont aux points 1 [a], 2 [a], 3 [a], 4 [a], 5 [a], 6 [a], enſuite par chacun de ces points, & du point C pour centre; on décrira des arcs de revolution proportionez à la partie de la conſtante S T, par exemple, pour la premiere, l'arc 1 [a], 1 [r] de 30. degrez; 2 [a], 2 [r], de 60. degrez; 3 [a], 3 [r], de 90. degrez; 4 [a], 4 [r], de 120. degrez, & ainſi de ſuite: ce qui ſe fait facilement en diviſant le cercle en 12. & augmentant d'une douziéme de ſa circonference à la rencontre du Rayon, auquel elle doit ſe terminer; comme on le voit dans la Figure aux points 1 [r], 2 [r], 3 [r], 4 [r], 5 [r], &c. par tous

ces points trouvez, on tracera une courbe à la main, ou avec une régle pliante, & l'on aura une ſpirale, telle qu'on ſe la propoſe pour le nombre des revolutions : nous donnerons même le moyen de fixer les intervales des revolutions, comme on le jugera à propos.

Nous ferons remarquer auparavant qu'on peut trouver les Rayons des arcs de revolution d'une autre maniere ; on tranſportera les diviſions de la ligne ST ſur C*r*, perpendiculaire à CA, par exemple en 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, d'où tirant des paralleles à CA, qui couperont la courbe Generatrice aux points *f g h i k l m*; on aura des longueurs 6*f*, 7*g*, 8*h*, 9*i*, 11 *k*, 10*l*, 12 *m*, qui ſeront celles des abſciſſes, qu'on doit prendre pour Rayons des ars de la ſeconde revolution BDSV, prenant celle-ci pour exemple en partie ſeulement ; ainſi *cu* ſera égal à CV, 90*s*, à CS & CD à 60*d*, &c. & ſans prendre la peine de faire des arcs de revolution ; il ne s'agit que de porter ces parties ſur les Rayons qui leur conviennent, c'eſt-à-dire, les correſpondans au nombre des diviſions de la conſtante, plus ou moins une, ou pluſieurs revolutions, comme L3*r* ſur CA, *l*3 ſur C11*r*, *k*10 ſur C10*r*, *i*9 ſur C9*r*, *h*8 ſur C8*r*, &c.

COROLLAIRE I.

D'ou l'on tire le moyen de *fixer la premiere revolution de la ſpirale, à telle diſtance que l'on veut du centre C, ſur l'axe AC*: car ſi l'on veut, par exemple, qu'elle commence en B, on menera par ce point B la ligne BL perpendiculaire à l'axe AC, juſqu'à ce qu'elle rencontre la courbe Generatrice en L, par où menant LS parallele à l'axe AC, qui coupera l'ordonnée RA au point S, la diſtance SR ſera la longueur de la ligne conſtante qui eſt ici égale à ST, laquelle a toujours un certain rapport avec la circonference du cercle de revolution 12, 3, 6, 9 ; mais ce point B étant une fois déterminé, on n'eſt plus le Maître de changer les autres revolutions ; elles ſe trouvent réglées par le rapport des parties de la conſtante SR trouvée avec les arcs de revolutions.

COROLLAIRE II.

L'INVERSE du Corollaire précedent eſt claire à la ſeule inſpection de la Figure ; car ſi l'on veut connoître à quel point de l'axe AC ſe terminera la premiere revolution ; il n'y a qu'à tirer par le point S, extremité de la conſtante ST, poſée de R en S, une ligne SL parallele à l'axe, juſqu'à ce qu'elle coupe la courbe Generatrice en L, & par ce point L, mener la perpendiculaire LB au même axe, laquelle donnera le point B que l'on cherche : ſi la ligne ST eſt contenuë pluſieurs fois dans AC, on trouvera de même tous les points de revolution ſur l'axe.

Corollaire III.

Il ſuit naturellement de cette conſtruction : 1.° Que ſi au lieu du cercle, on avoit prit un quart d'Ellipſe pour courbe Generatrice, & qu'on eut mis à la place de R A, la moitié de ſon grand ou de ſon petit axe ; on auroit alongé ou reſſerré la ſpirale : 2.° Que plus la ligne S T ſera contenuë de fois dans A R., plus la ſpirale ſera arondie, & au contraire ; par où l'on voit que cette conſtruction, indépendamment du changement qui provient de la courbe Generatrice, qu'on peut choiſir, donne une grande facilité de ſe contenter ſur ſon contour plus ou moins redoublé : au lieu de poſer le ſommet de la courbe Generatrice au centre de la ſpirale ; on peut la mettre dans une ſituation differente ; mais alors la ſpirale qui en reſultera, ne ſera plus du nombre de celles qu'on appelle *Vertico-Centrales*, dont nous parlons : je vais donner un exemple d'un autre eſpece que M. Varignon appelle *Cocentrales.*

Soit [*Fig.* 141.] la courbe H Y P, une Hyperbole Equilatere, dont A C & C 24 ſont les Aſymptotes, leſquelles font un angle Droit en C, où je poſe le centre de la ſpirale ; & par conſéquent celui du cercle de revolution DEFG, que je fais d'une ouverture de compas priſe à volonté, & dont je diviſe la circonference en tel nombre de partie que je veux avoir de points de la ſpirale à chaque revolution, par exemple en douze ; enſuite ayant pris auſſi à volonté une ligne conſtante, par exemple C G, je la diviſe auſſi en douze parties égales, c'eſt-à-dire, en un même nombre que la circonference du cercle de revolution, & par chacune de ſes parties, je mene des paralleles à une des Aſymptotes A C, que je prends pour l'axe A X de la ſpirale ; & parce que cette premiere parallele rencontre l'Hyperbole hors de cet axe en H ; je commence auſſi ma ſpirale au point 1 *r*, éloigné de l'axe A X d'une douziéme partie de la revolution A 1 *r* du point 2. où la ſeconde diviſion de la conſtante C G, donne le point 2. je fais un arc 2, 2 *r* de deux douziémes de la revolution, qui me donne le point 2 *r*, & ainſi de ſuite, comme aux ſpirales Paraboliques, Verticocentrales ; mais enfin parce que l'Hyperbole HYP, ne parvient jamais à ſon Aſymptote CG, cette ſpirale ne fera que tourner autour du centre C, dont elle approchera toujours à chaque revolution, ſans pouvoir jamais y arriver.

Je ne m'arrêterai pas aux differences des poſitions des courbes Generatrices, qui croiſent l'axe de la ſpirale ; je dirai ſeulement qu'alors, il ſe forme deux ſpirales, une d'un côté, l'autre de l'autre de cet axe, leſquelles ſont égales & tournées en ſens contraire, comme nous l'avons dit de la ſpirale d'Archimede [*Fig.* 136.] ſi les deux parties de la courbe Generatrice ſont égales ; mais ſi elles ſont inégales, il eſt clair que la Figu-

re de Cœur qui en resulte deviendra irréguliere; un côté étant plus ou moins enflé que l'autre; ce qui n'est d'aucun usage pour les ornemens d'Architecture: c'est pourquoi je passe sur les varietez infinies qui en peuvent résulter; les exemples que je viens de donner, étant suffisans pour exercer les Architectes & les Artistes qui ont des ornemens à tracer dans des agreables variations de contour de spirales.

J'avertiray seulement; 1.° que si la courbe Generatrice se ferme du côté de l'axe de la spirale, comme si l'on prenoit un demi cercle, ou une demie-Ellipse, au lieu de leur quart; la spirale ne continueroit pas à tourner du même sens, depuis la plus grande Ordonnée; mais elle se rebrousseroit & reviendroit en quelques façons sur ses pas, ayant sa concavité tournée du même côté.

2.° Que si l'on prend pour courbe Generatrice, une Hyperbole équilatere, cocentrique, c'est-à-dire, dont le centre soit le même que celui de la spirale; celle qui en sera engendrée, n'aura ni commencement ni fin; c'est-à-dire, qu'elle commencera à une distance infinie de son centre, & n'arrivera jamais à ce centre; & cependant que lui donnant un commencement, elle coupera son axe après la premiere revolution; ce qui est une suite des proprietez des Asymptotes, qui approchent à l'infini de l'Hyperbole, sans pouvoir y arriver, comme nous venons de le dire.

3.° Que si l'on prend pour courbe Generatrice une courbe Logarithmique, au lieu de l'Hyperbole, la spirale qui en sera engendrée, aura un commencement, & n'aura point de fin, où si elle a une fin, elle n'aura point de commencement; selon que l'on mettra son Asymptote sur l'axe, ou perpendiculairement à l'axe de la spirale.

On peut faire la même chose par le moyen de l'Hyperbole, en mettant le centre de la spirale non au centre de l'Hyperbole; mais sur une de ses Asymptotes à quelque distance de ce centre; ce qui fournit un moyen très commode pour tracer une infinité de volutes, qu'on peut faire venir d'un point éloigné du centre & de l'axe, & les faire finir au milieu par un *Oeil* circulaire, comme font les Architectes à la volute Ionique; parce que l'on peut sauver plus délicatement le jarret qui se fait à la jonction de la spirale & de cet *œil*, si elle est de la nature de celles qui tournent autour de leur centre, sans y arriver; par la même raison, on fait aussi plus parfaitement la jonction de la branche droite du limon, avec *la volute ou colimaçon* qui le termine au bas des Escaliers les plus à la mode.

On peut encore changer toutes sortes de spirales en les élargissant, ou resserrant de telle maniere que l'on voudra, par le moyen de la réduction

des Quarreaux changez en Parallelogrames, & même en Trapezes; si on vouloit la resserrer d'un côté plus que de l'autre, supposant par exemple que suivant un dessein que je me propose; je trouve la spirale ALBVC trop ouverte. sur son diametre 2 r C 8; je n'a y qu'à faire des Parallelogrames resserrez suivant cette condition, comme on voit à la Fig. 142. & tracer sur l'original des quarrez en même nombre, ce que l'on a pas fait ici pour éviter la confusion; parce que tous les Dessinateurs sçavent réduire au quarreau du petit au grand; & qu'il n'y a ici d'autre difference, que celle de la Figure des quarreaux, qui sont quarrez dans l'Original, & oblongs dans la réduction; ce qui fait une figure dissemblable, mais cependant encore proportionelle en un sens. *Fig. 142.*

USAGE.

La spirale est une courbe, dont on fait usage en Architecture en plusieurs sortes d'Ouvrages; premierement elle est très fréquente dans les ornemens de serrurerie & de sculpture; on l'employe pour les volutes des chapiteaux Ioniques & Composites en petit, & en grand dans les amortissemens de differentes pieces d'Architecture, particulierement pour les Consoles & les terminaisons des contreforts ou piliers butans qu'on éleve, pour arbouter les voutes des Nefs & des Domes des Eglises, comme on en voit en quatre differents endroits au dehors du Val de Grace à Paris, & dans toutes les Eglises Modernes, tant en Italie qu'ailleurs; les Architectes qui ont du goût pour tracer l'ornement, leur donnent des contours tâtonez en renflant ou resserrant chaque partie, selon qu'ils trouvent que l'œil est plus ou moins satisfait: s'ils avoient connoissance des secours de la Geometrie, je ne doute point qu'ils ne réussissent beaucoup mieux dans la grace du contour, lequel, étant intrinséquement régulier, se presente par toutes ses parties avec une uniformité qui ne contente pas moins l'esprit que les yeux; ce que l'on ne peut se flater de faire par le seul tâtonement.

Enfin la spirale est une courbe néceſſaire pour former la basse des Enroulemens qui s'élevent en Limace, comme sont ceux que l'on fait aux extremitez des limons des Escaliers, que les Ouvriers appellent *Colimaçons*: la *Circulaire*, telle que nous venons de la donner à la Figure, convient mieux à l'évasement des premieres marches, & à la jonction du limon droit que la spirale d'Archimede, ou la volute des Architectes, comme j'en ay fait l'experience chez un de mes amis où je l'ay employée, & celle qui est Hyperbolique, Cocentrale encore mieux, nous donnerons ci-après la maniere d'en tracer les joins.

Des Arcs Rampans.

EN termes d'Architecture les lignes qui ne ſont ni verticales ni horiſontales, mais inclinées à l'Horiſon, ſont appellées *Rampantes*, & les arcs dont les naiſſances ne ſont pas de niveau entr'elles, l'une étant plus baſſe que l'autre, ſont appellez *Arcs rampans*, tels ſont les *Arcs Droits* des deſcentes biaiſes, dont les naiſſances du cintre de face ſont de niveau, & les arcades pratiquées au deſſous des Rampes des Terraſſes ou des Eſcaliers.

Pour expliquer géometriquement, & plus géneralement la ſignification de ce terme à l'égard des lignes courbes; on peut dire que toutes celles dont les Ordonnées ne ſont pas perpendiculaires à un diametre Vertical; lorſqu'elles ſont paralleles à la ligne qui paſſe par les naiſſances de l'arc, ſont des courbes Rampantes & *des Arcs Rampans.*

Il eſt bon de faire remarquer ici que les Aparailleurs appellent particulierement *Courbe Rampante*, celle du limon de la *Vis à jour*; mais nous ne croyons pas devoir ici nous priver d'une expreſſion génerale pour nous conformer à un langage ſi peu reſpectable.

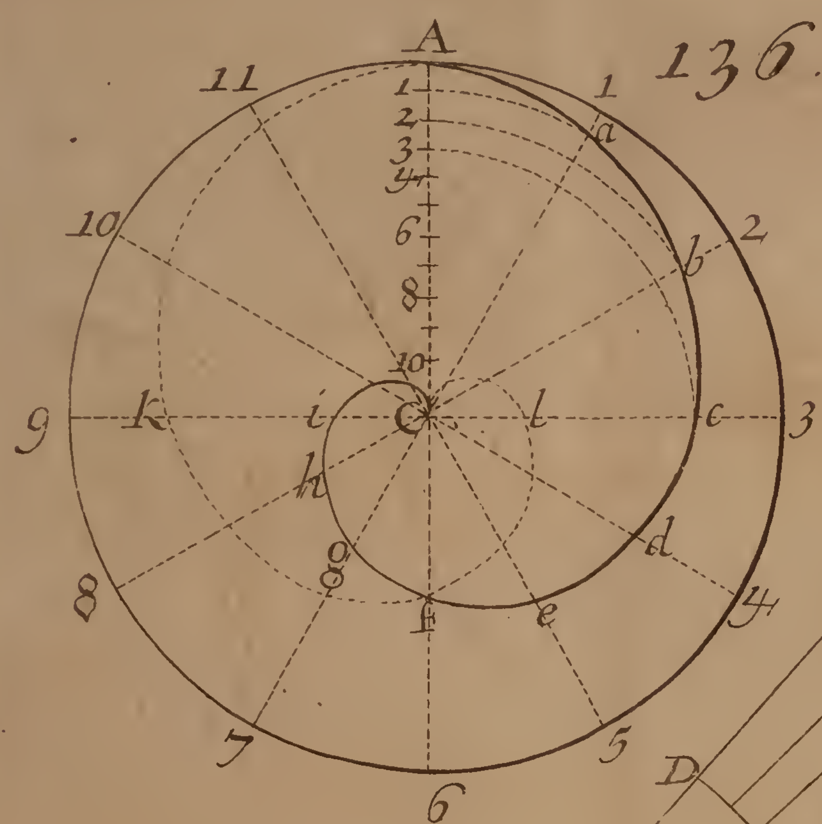
PROBLEME.

Changer en Arc Rampant un Arc de Cercle, ou d'une Courbe quelconque.

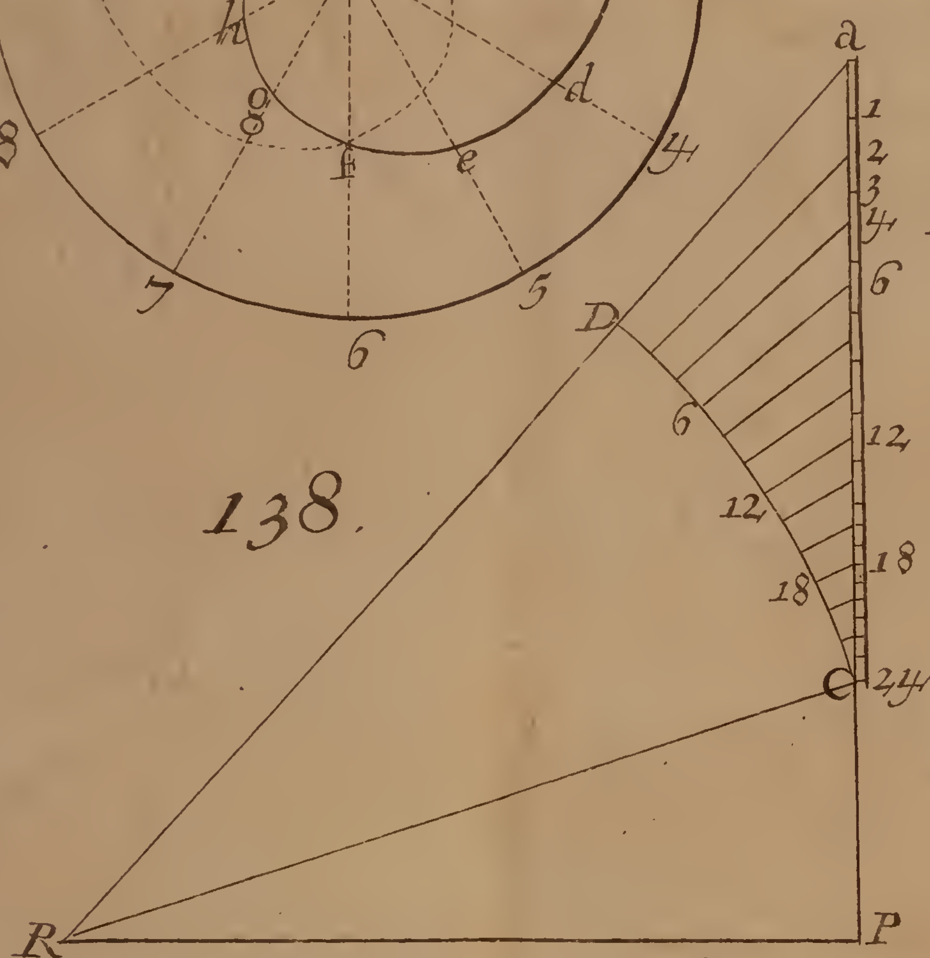
Fig. 143. Soit donné [*Fig.* 143.] l'arc de cercle AHB qu'on ſuppoſe ici un demi cercle, quoiqu'il puiſſe être un ſegment plus ou moins grand; ſur le milieu C de la corde AB, on élevera une perpendiculaire indéfinie C*h*, à laquelle on menera deux paralleles par les extremitez A & B; enſuite on prendra ſur C*h* un point *c* à volonté pour le ſommet d'un angle C*cb*, qu'on fera égal au complement de l'inclinaiſon qu'on veut donner à la Rampe avec une ligne de niveau *b*N, & l'on tirera la ligne *ab*, qui ſera terminée par les paralleles indéfinies A*a*, B*b*, dont les interſections en *a* & *b* donneront les points des naiſſances, haute & baſſe de l'arc Rampant qu'on ſe propoſe de faire.

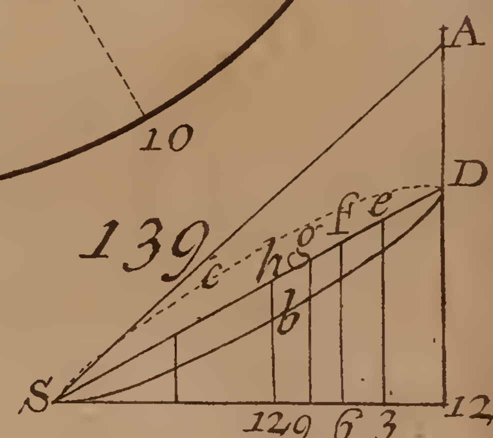
Ensuite ayant tiré à volonté pluſieurs paralleles OO, *ii*, DF à la corde AB, qui couperont CH aux points *r*, G, *e*; on portera les abſciſſes C*r*, CG, C*e* & CH en *c*R, *cg*; *c*E: & *ch*: & par les points R*g*E, on menera des paralleles à *ab*, ſur leſquelles on portera de part & d'autres les longueurs *r*O, G*i*, *e*D du demi cercle qui donneront les points *o*, I, *f*, *h*; *d*, &c. par leſquels on tracera à la main, ou avec une Régle pliante le contour de l'arc rampant *ahb*, qu'on demande.

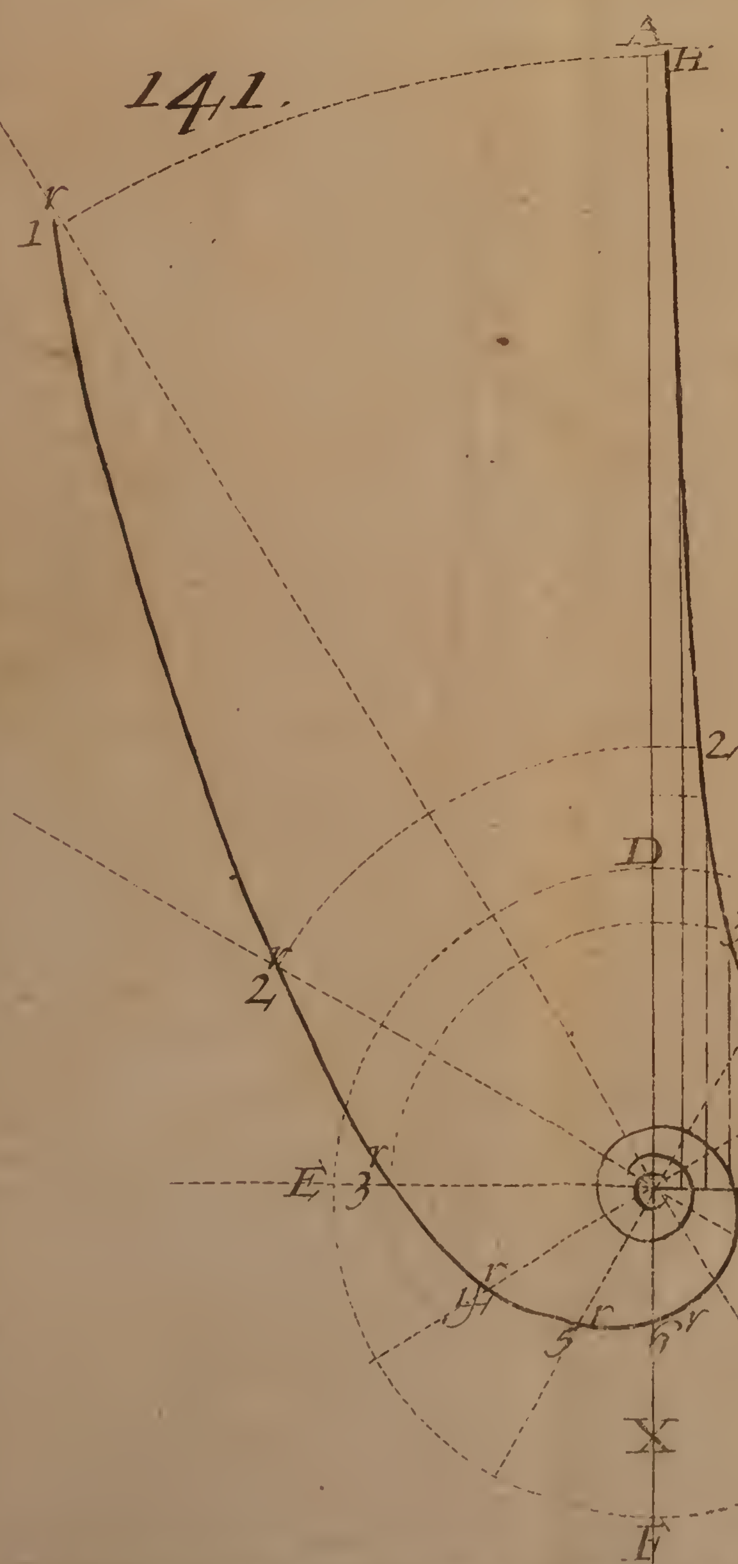
On peut faire la même choſe d'une autre maniere, en menant à volon-

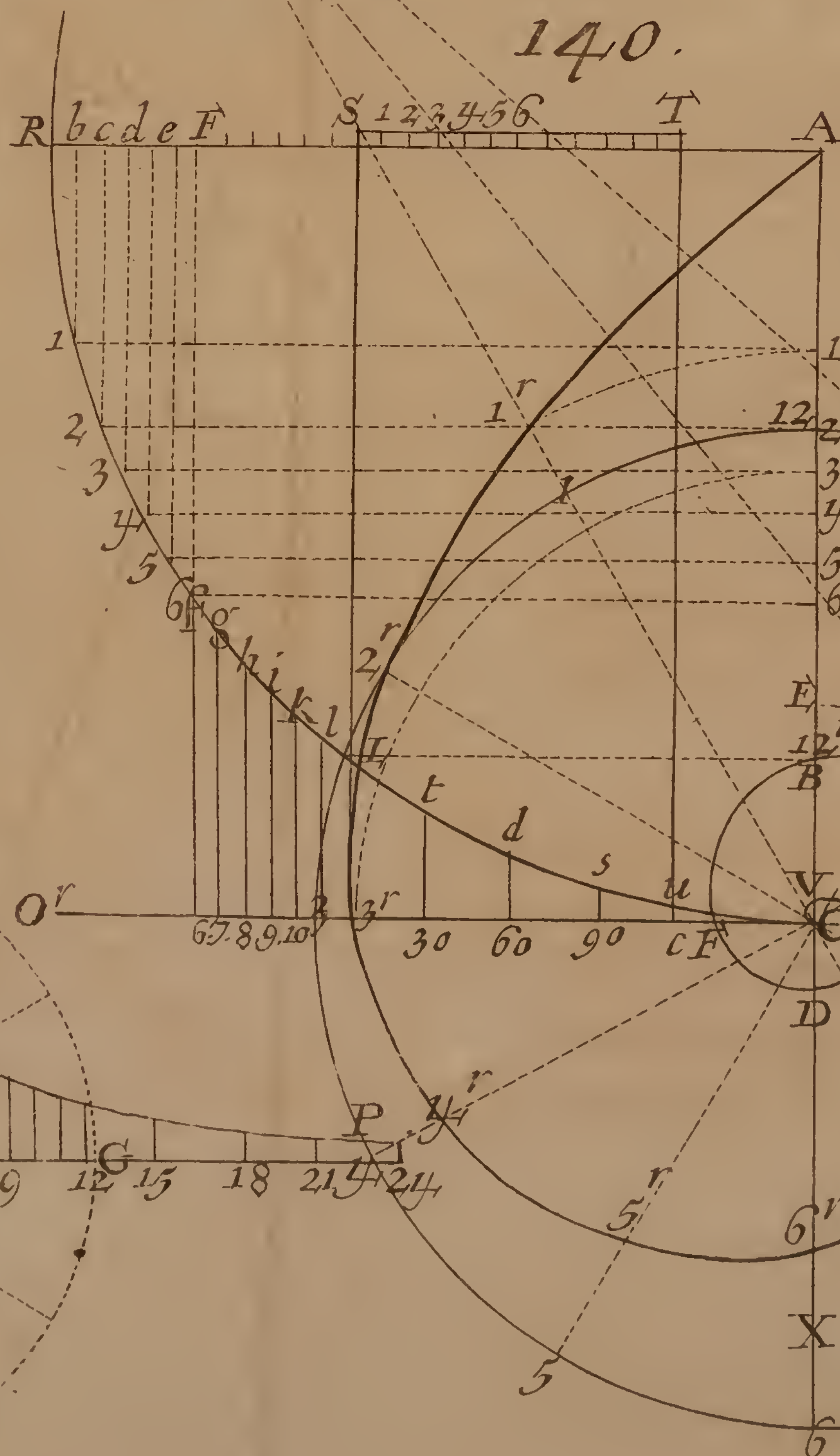

136.

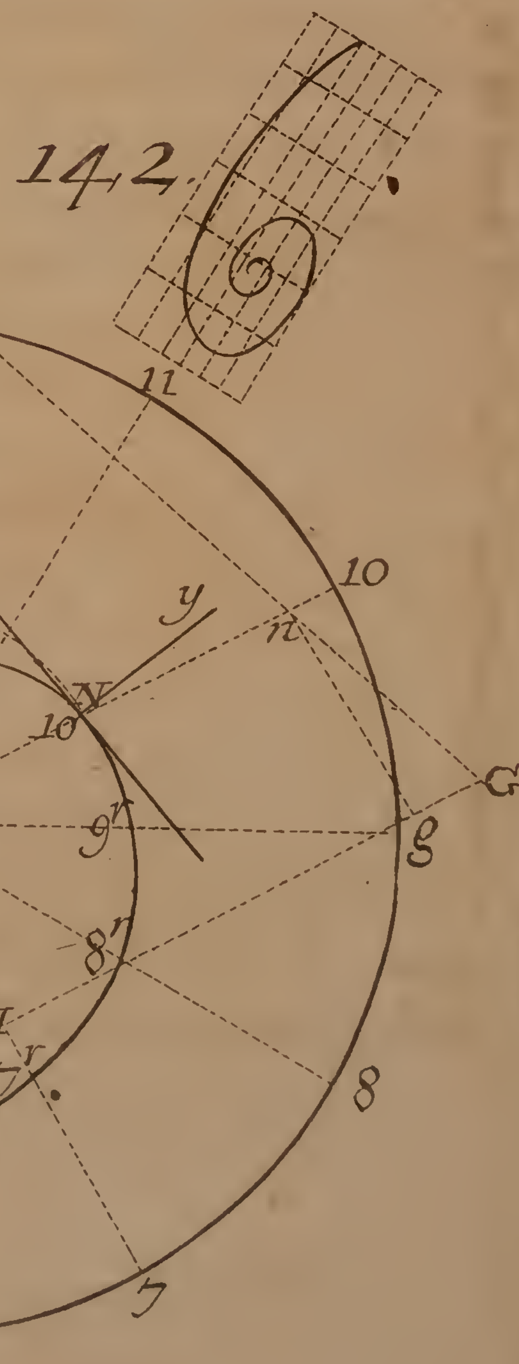

137.


138.


139.


141.


140.


142.

té [*Fig.* 144.] autant de paralleles que l'on voudra à la ligne C*b*, prolongées indéfiniment, & portant sur chacune des ces paralleles, comme *o*R, *o*D, les longueurs O*r* & O*d* comprises dans le segment de cercle donné; en OR & OD, au dessus de la ligne inclinée *ab*, & l'on aura autant de points que l'on voudra *a*R*b*D*b* de l'arc Rampant demandé, qui est comme l'on voit une portion d'Ellipse. *Fig.* 144.

Second exemple pour toute autre courbe que le cercle.

Soit [*Fig.* 145.] une spirale DBHL*c* que l'on veut faire ramper en tout ou en partie; ayant pris pour axe la verticale AB, qui passe par le centre de la spirale, à laquelle les Architectes ont donné le nom de *Cathete*; on lui menera à volonté autant de perpendiculaires qu'on voudra avoir de points de la spirale rampante, comme AD, EH, FN, GI, &c. que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elles rencontrent une autre ligne *ab*, parallele à AB & distante à volonté, qu'elles couperont aux points a*hlkb*: ensuite on fera l'angle *hki* égal au complement de l'inclinaison que l'on veut donner à la Rampe, pour déterminer la position d'une des Ordonnées *ki*, à laquelle on menera des paralleles indéfinies par les points trouvez *ahlk*, comme *ad*, *he*, *ln*, *co*, *kg*, sur lesquelles on portera les longueurs des Ordonnées à l'axe AB, comme AD en a*d*, HE en *he*, LF en *lf*, &c. suivant leur ordre; & l'on aura les points *defgbinhmlc*, par lesquels on tracera à la main une spirale, qui est celle qu'on demande. *Fig.* 145.

Troisiéme exemple pour les Figures mêlées de differentes courbes, par exemple [*Fig.* 146.] un contour de Balustre droit, qu'on veut rendre rampant pour porter un appui de rampe d'Escalier. *Fig.* 146.

Ayant mené des perpendiculaires à l'axe AB, c'est-à-dire, à la ligne du milieu du Balustre droit, jusqu'à la rencontre d'une parallele CD, posée à distance prise à volonté, on menera par tous les points de rencontre autant de lignes inclinées à CD, suivant la pente de la Rampe donnée, ou déterminée par la situation des lieux, qui couperont une troisiéme parallele *ab* prise pour l'axe du Balustre rampant, à distance prise à volonté, en des points correspondans aux divisions du Balustre droit, qui seront les milieux des distances des côtez du Balustre rampant, comme on vient de le dire pour la spirale dans l'exemple précedent; ce que la Fig. 146. expose sensiblemeut à la vûë.

USAGE.

Ce Probléme, & particulierement les deux derniers exemples, sont la basse de la pratique de tous les ornemens de bois, de pierre ou de fer, que l'on met aux appuys des rampes des Escaliers; car ayant commencé

par tracer régulierement les Baluſtres, Guillochis & Enroulemens de Rinceaux & autres deſſeins, tels qu'on les veut dans une ſituation horiſontale; on en ralonge les parties inferieures, & on racourcit les ſuperieures dans une ſi juſte proportion, que l'œil n'eſt point choqué de ce changement; & bien loin de cauſer de la difformité dans les contours des ornemens, il ſemble au contraire qu'il y ſurvient une varieté agreable à la vûë.

Il peut auſſi ſervir pour les cintres des Arcades & voutes Rampantes, lorſqu'on n'a aucune ſujetion de hauteur ou de direction de piedroit, parce qu'alors, il n'y a qu'à changer l'arc circulaire en Rampant; mais à cauſe des differences qui peuvent y ſurvenir, nous devons y pourvoir par un Problême géneral.

Des Courbes qui conviennent à ces ſortes de Voutes & d'Arcades qu'on appelle Arcs Rampans.

Nous avons parlé au Problême précedent de la tranſmutation des courbes, dont les Ordonnées ſont horiſontales en courbes inclinées à l'horiſon; il s'agit à preſent de trouver le moyen de faire paſſer une courbe par certains points donnez, qui ſont ceux des Impoſtes & des Clefs des arcs Rampans, avec cette circonſtance qu'elle ſoit touchée par les lignes droites qui paſſent par ces points, leſquelles doivent auſſi être données de poſition ou de direction.

Les lignes qui doivent toucher les arcs Rampans, ſont premierement les deux *piedroits* ou *jambages* qui portent l'arcade; leſquelles peuvent avoir trois ſituations differentes, 1.° ou verticale, lorſqu'ils ſont *à plomb*, en termes de l'Art, 2.° ou inclinées en *ſurplomb*, 3.° ou inclinées en *talud*.

Secondement, une ligne réelle ou imaginaire qui termine la hauteur de l'arc Rampant, laquelle peut auſſi être horiſontal, ou inclinée à l'horiſon.

La ſituation la plus ordinaire des piedroits eſt la verticale; cependant quelques fois pour plus de ſolidité, on leur donne du talud, & quelques fois auſſi pour mieux buter & appuyer une voute ou un mur, on les fait en ſurplomb, ce cas eſt plus rare dans la pratique que le précedent; car on ne fait plus guere d'arcs boutans, comme dans l'Architecture Gotique; les Modernes tâchent de cacher la néceſſité de ces eſpeces de contreforts par des moyens plus agreables à la vûë, comme ſont des Groupes de colonnes, ou des Conſoles renverſées.

La

La ſituation la plus naturelle à la termination de la hauteur d'un arc rampant ſemble être une ligne horiſontale; en effet il peut toujours l'être par une telle ligne, qui devroit être appellée la ligne de *Sommité*; cependant on appelle ainſi toute ligne donnée qui traverſe les piedroits prolongez, & qui doit toucher la courbe de l'arc rampant.

Outre ces trois lignes eſſentielles aux arcs rampans qu'elles doivent toucher; on en conſidere une quatriéme, qui joint leurs points d'attouchement aux piedroits qu'elle coupe, leſquels ne ſont pas de niveau par la nature de cette eſpece d'arc; on l'appelle *la ligne de Rampe.*

Les differences de poſition de ces quatre lignes, ſçavoir des deux piedroits, de la ligne de ſommité, & de la ligne de rampe, font toute la difficulté & la varieté des cas, où il faut chercher les Courbes convenables.

Il eſt évident à tous ceux qui ſçavent un peu de Geometrie, qu'on peut trouver une infinité de courbes qui peuvent toucher les trois premieres lignes droites dans tous les cas, ou du moins dans pluſieurs de ceux qu'on peut propoſer; mais on ſe borne en Architecture à celles des ſections coniques, qui ſont les plus connuës, pour éviter les difficultés que les autres entrainent avec elles, ou dans leur conſtruction, ou dans la maniere de leur mener des tangentes, en certaines circonſtances marquées.

Pour moy je trouve qu'à cette difficulté près les ſpirales de M. de Varignon donnent un contour de ceintre autant & plus agreable à la vûë que celui des ſections coniques, qu'on peut employer pour un arc Rampant: je pourrois parler auſſi de la ſpirale d'Archimede; mais on ne peut autant la varier, comme celles-là; or cette difficulté n'eſt pas petite, ſi l'on vouloit operer geometriquement; on peut même dire qu'elle eſt inſurmontable; car Archimede a démontré que la ſous-tangente de ſa ſpirale étoit égale à la circonference du cercle de revolution; d'où il ſuit que ſi l'on pouvoit lui tirer une tangente, on auroit trouvé la Quadrature du cercle: cependant ſuppoſant la rectification de la circonference du cercle, qu'on connoît ſuffiſamment pour ne pas trouver d'erreur dans la pratique; on peut mener des tangentes à cette ſpirale, comme nous le dirons ci-après.

On demandera, s'il eſt de néceſſité indiſpenſable que la courbe du ceintre de l'arc rampant touche les deux piedroits, & pourquoi.

A cela je réponds, ce que j'ay déja dit ailleurs, que puiſque l'arc doit être une continuation du piedroit; il doit ſe faire une tranſition inſen-

ſible de la ligne droite du piedroit à la courbe de l'arc rampant ; or l'alliance de la ligne courbe avec la droite, ne peut ſe faire qu'au point de l'attouchement, où l'angle qu'elles font enſemble eſt infiniment grand ; par conſéquent imperceptible à la vûë ; puiſqu'il differe infiniment peu de la ligne droite, l'œil ne peut être trompé que par cet artifice ; toute autre jonction ailleurs qu'au point d'attouchement devient difforme, & choque la vûë : l'Architecte de la Chapelle de Verſailles n'a pas ſenti ce défaut, lorſqu'il a fait des arcs rampans ſous les arcs boutans au deſſus des bas côtez ; car leur jonction au grand mur eſt un bon pli bien marqué, c'eſt un arc coupé & appliqué contre ce mur ſans art & ſans naiſſance naturelle ſur un piedroit, ou ſur un Doſſeret.

Le plus grand ſujet de variation des arcs Rampans vient de la ligne de ſommité, qu'il eſt au choix de l'Architecte d'approcher ou d'éloigner des Impoſtes de l'arc, & de lui donner telle direction & inclinaiſon qu'il juge à propos, ſuivant le deſſein qu'il ſe propoſe ; & l'égard qu'il a à la ſituation des Lieux, comme lorſque l'arc Rampant doit ſoûtenir un Palier, ou ſe terminer ſous un Plinthe de niveau, la ligne de ſommité devient horiſontale ; quelquesfois il convient de donner à cette ligne une direction parallele à celle de la ligne de Rampe, comme lorſque l'arc Rampant ſoûtient une ſeconde Rampe égale & parallele à la premiere, quelquesfois plus ou moins inclinée ; ſi cette ſeconde Rampe ou un Plinthe ou Corniche au deſſus eſt inclinée plus ou moins : dans ces deux derniers cas, le point d'attouchement de la ligne appellée de ſommité, n'eſt pas au ſommet de la Courbe ; je veux dire à l'endroit le plus élevé, comme les Figures 148. & 150. le font voir : puiſque ce point eſt variable, il s'agit de le trouver, lorſqu'on a déterminé la diſtance & l'inclinaiſon de la ligne de ſommité.

Probleme XX.

La Direction des Piedroits, la ligne de Rampe, & celle de Sommité d'un Arc Rampant étant donnez, décrire la Section Conique, qui doit lui ſervir de Cintre.

Ou en termes Geometriques.

Trois lignes inclinées entr'elles, qui doivent toucher une Section Conique, dont les Points d'attouchement des deux Extrêmes ſont donnez, trouver celui de la moyenne, & les lignes néceſſaires pour décrire cette Courbe.

Fig. 147. 148. 150. 151.

Soient les piedroits AR, BP [*Fig.* 147. 148. 150. 151.] la ligne de
Fig. 131. 132. Rampe RP, la ligne de ſommité SO : Premierement, ſi les piedroits AR, BP ſont paralleles entr'eux, auſſi bien que les lignes de Rampe RP, &

de sommité SO; * il est clair que le point d'attouchement de cette derniere est donné au milieu de SO au point T; parce qu'en ce cas la section qui satisfait au Problême est une Ellipse, comme nous l'avons dit ci-devant, & que la ligne T*t* qui passera par le milieu de RP, sera un diametre conjugué à la ligne de Rampe, où sera le centre C; parce que BP & SO étant des tangentes, les lignes qui leur sont paralleles, & qui passant par le centre C sont des diametres conjuguez; cela ne souffre point de difficulté. *Fig.* 147.

Dans tous les autres cas où les lignes de Rampe & de sommité ne sont pas paralleles; quoique les piedroits soient paralleles entr'eux, ou ne le soient pas; on trouvera le point T, où la courbe doit toucher la ligne de sommité, comme il suit. *Fig.* 148. 150. 134. 151.

Ayant prolongé les lignes RP & SO données jusqu'à ce qu'elles concourent en Y par le point S, on menera une parallele DE à OR, si les piedroits ne sont pas paralleles, comme aux Figures 150. & 151. laquelle ne sera qu'un piedroit prolongé, s'ils sont, comme à la Figure 148. paralles, elle coupera RY en D, ensuite ayant porté DS en SE, ou Figure 148. PS en SE; on tirera ER qui coupera SO au point T, où sera celui d'attouchement que l'on cherche.

Ce point étant trouvé: 1.° il sera facile de décrire la section conique qui doit toucher les trois lignes AO, OS, SB aux points RTP par le Problême XIV.

2.° On pourra aussi la décrire par le Problême XIII. parce qu'on a cinq points donnez; si elle est une Ellipse ou une Hyperbole, dont le centre soit dans l'étenduë du plan où on veut la décrire; car menant des paralleles à SO par les points donnez à la circonference P & R qui couperont le diametre T*t* en V & *u*: si on fait V*p* = PV, *ur* = *u*R, *q*C = C*u*, & qu'on mene par *q* une parallele à SO, sur laquelle on prenne *qn*, *q*N = *u*R, *ur* & C*t* = CT, on aura déja huit points de l'Ellipse. *Fig.* 150.

3.° Supposant que le centre se trouve loin hors de l'étenduë de la surface, sur laquelle on veut la décrire; on pourra en trouver autant de points que l'on voudra par le Problême XV. car on a deux tangentes, & la position d'un, & même de deux diametres S*m* & OM, qui passent par les points S & *m* & O & M, supposant PT & TR divisez en deux également en *m* & M.

4.° On peut par ce moyen trouver les diametres conjuguez; car puisque T*t* est donné, en faisant C*t* = CT, que son conjugué doit passer

par le point C trouvé, comme au Problême XV. & parallelement à SO, il ne s'agit plus que de trouver sa longueur de part & d'autre du point C; ce que l'on peut faire par le Problême IV. puisqu'on a une, & même deux Ordonnées au diametre *t*T, sçavoir R*u* & P*u*, ou par un autre methode que voici.

Ayant mené par le centre C une ligne FG parallele à SO; on menera aussi RK parallele à T*t*; ensuite on cherchera une moyenne proportionelle entre CK & CG, laquelle donnera C*z* pour moitié du diametre conjugué à T*t* (par l'Art. 46.) qui dit que les lignes menées du centre à la tangente, & coupées par une Ordonnée, sont divisées en raison continuellement proportionelles CK: C*z*:: C*z*: CG.

Art. 46.

Demonstration.

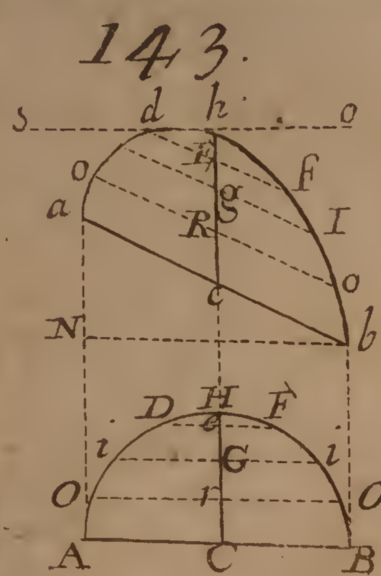
Nous avons dit dans nos Préliminaires sur les sections coniques Art. 48. que les tangentes à une section conique qui se rencontrent, & qui sont terminées par d'autres lignes tirées par deux points d'attouchement, se coupent en raison Harmonique; ce que nous avons dit être démontré dans les Traitez de ces sections: or la tangente OY est coupée par la ligne RP prolongée, qui passe par deux points d'attouchement R & P, & par les tangentes RO & PS, qui passent par ces mêmes points R & P; donc on a trois points du'une division Harmonique, sçavoir O, S & Y, il reste à prouver que le quatriéme T est bien trouvé.

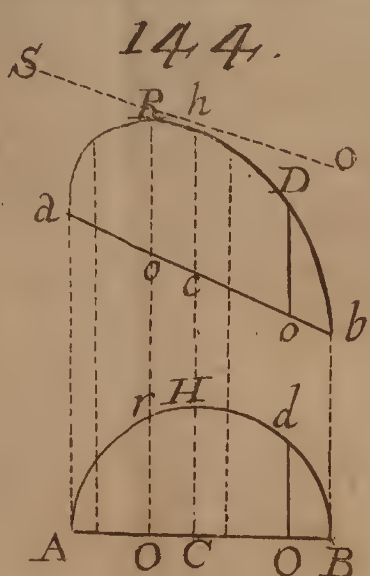
A cause des triangles semblables YOR, YSD, on aura YO: OS:: YS: SD = SE, & à cause des triangles semblables ORT, SET, on aura OR: SE:: OT: ST; donc par raison d'égalité YO: OS:: OT, ST, *ce qu'il falloit démontrer.*

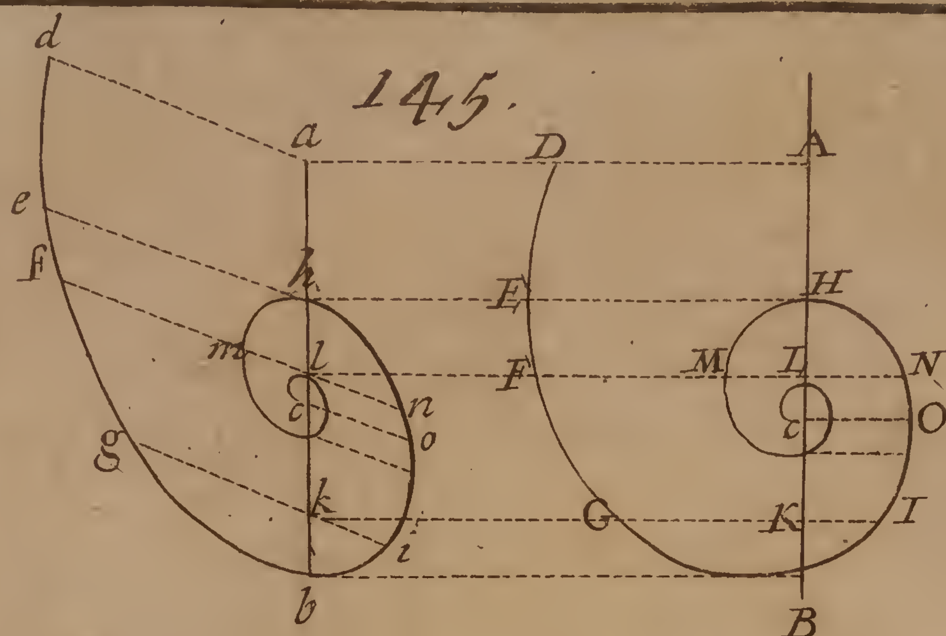
Remarque.

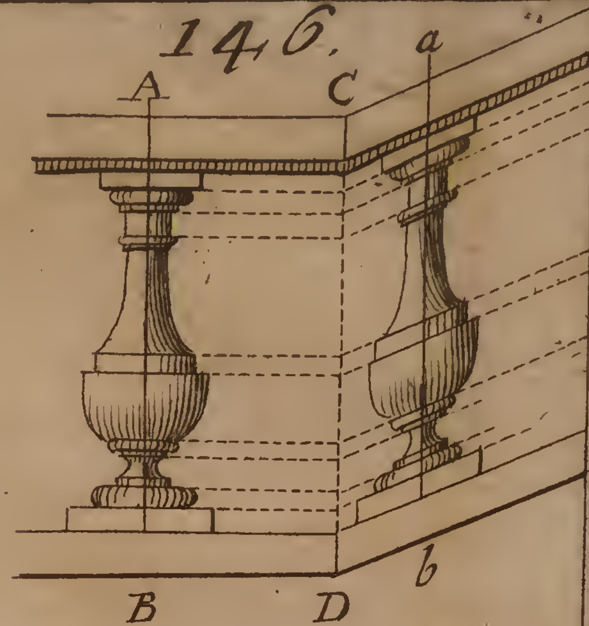
Cette proposition renferme quinze Problêmes que M. Blondel a donné pour trouver les Courbes des sections coniques, qui peuvent toucher toutes sortes de piedroits & de lignes de sommité en quelque position qu'ils puissent être pour former un arc Rampant; ainsi elle abrege beaucoup cette matiere.

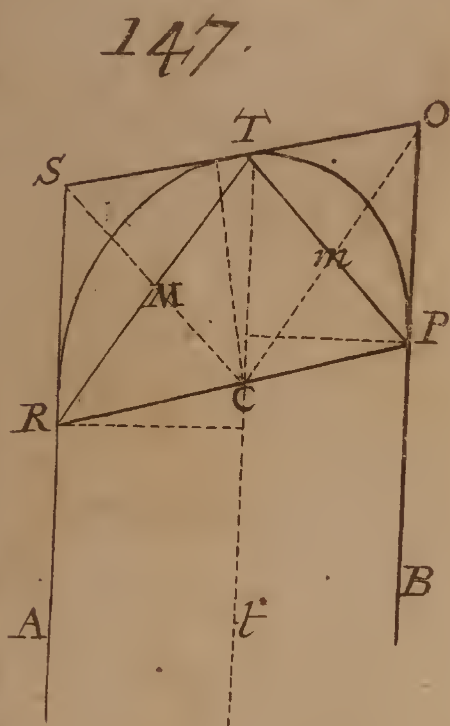


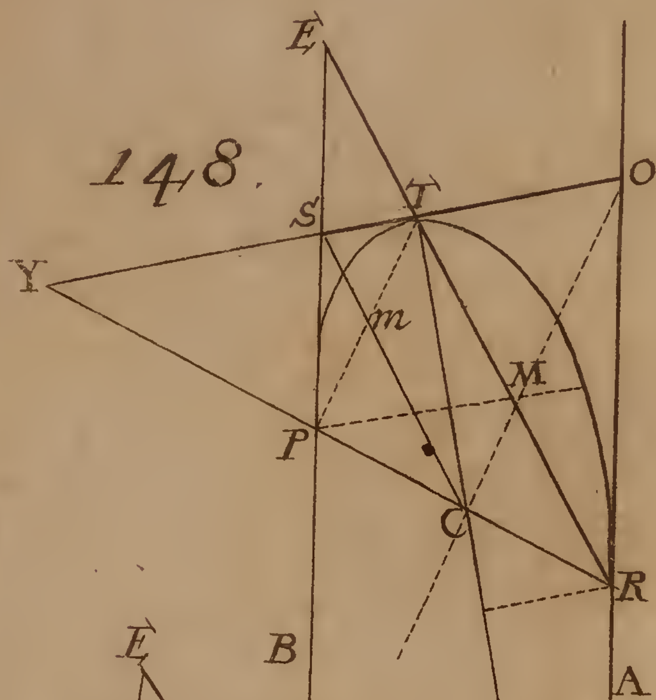

143.

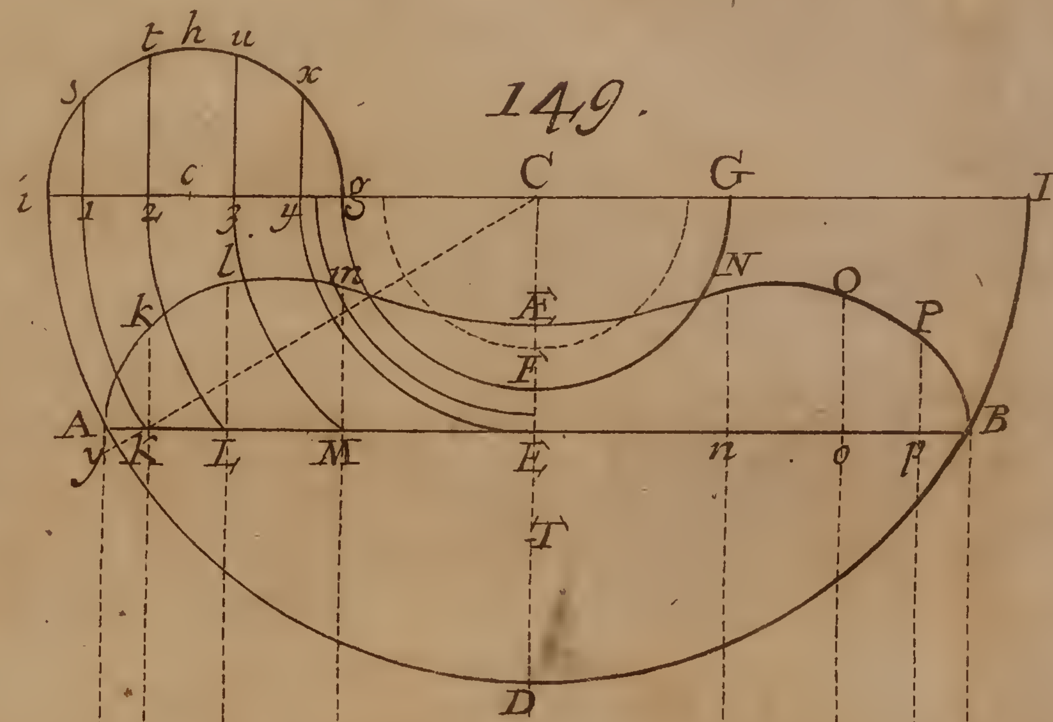

144.

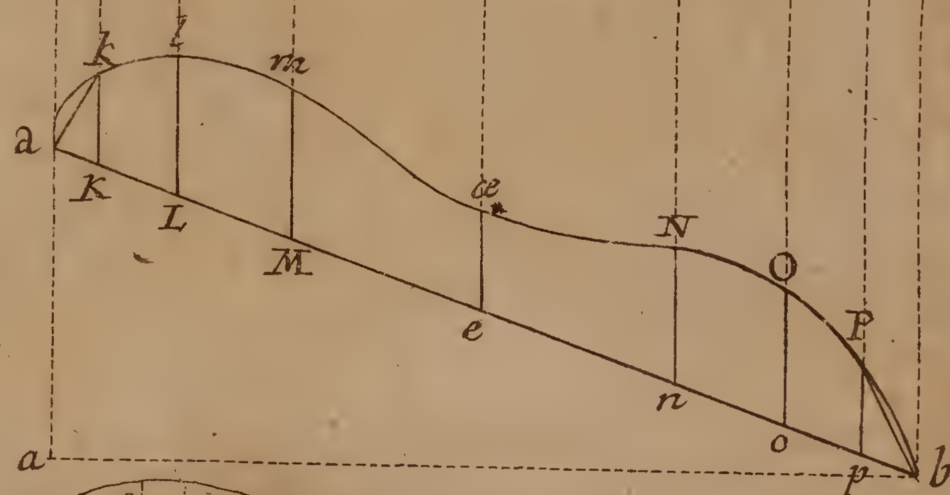

145.

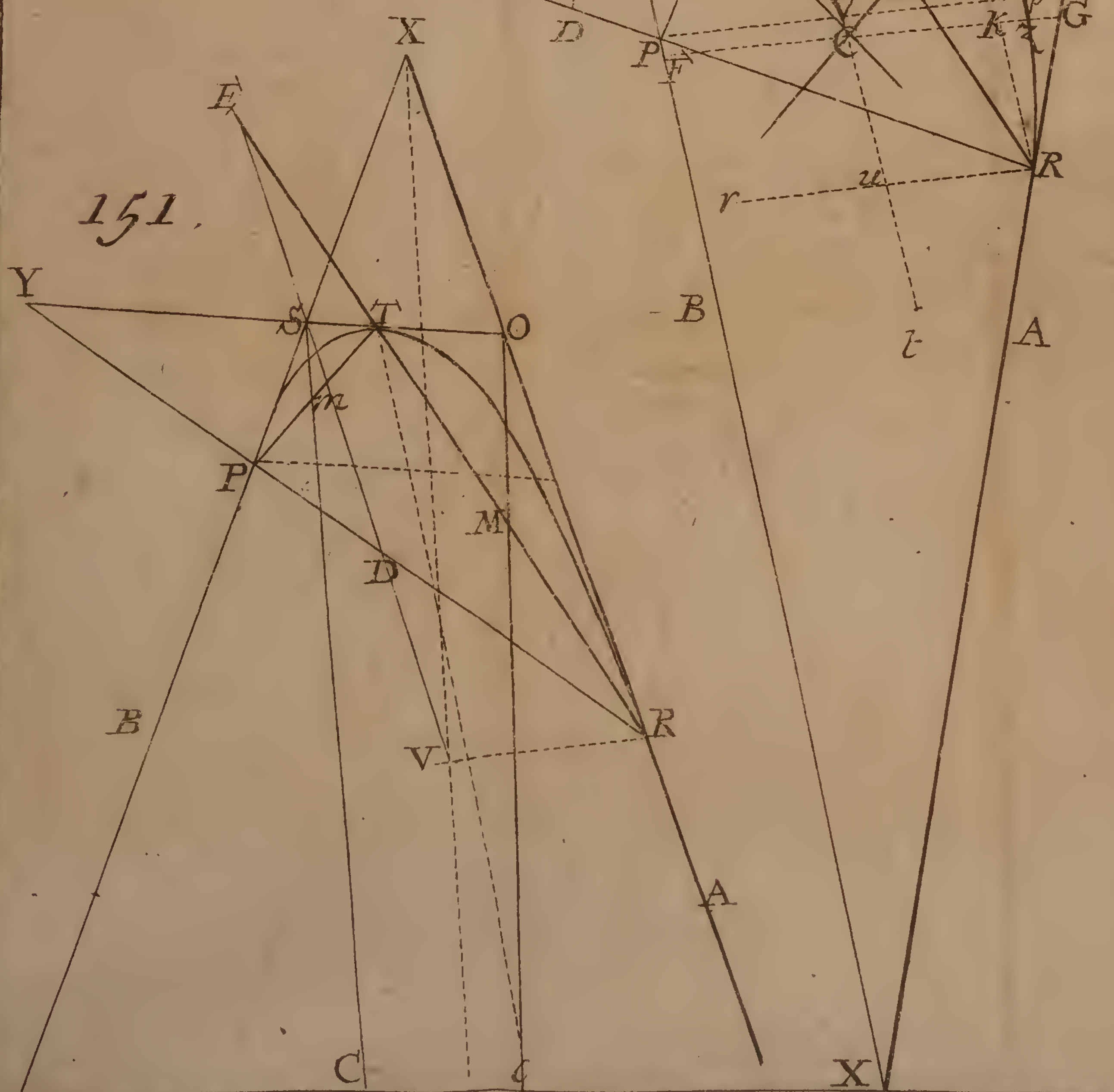

146.

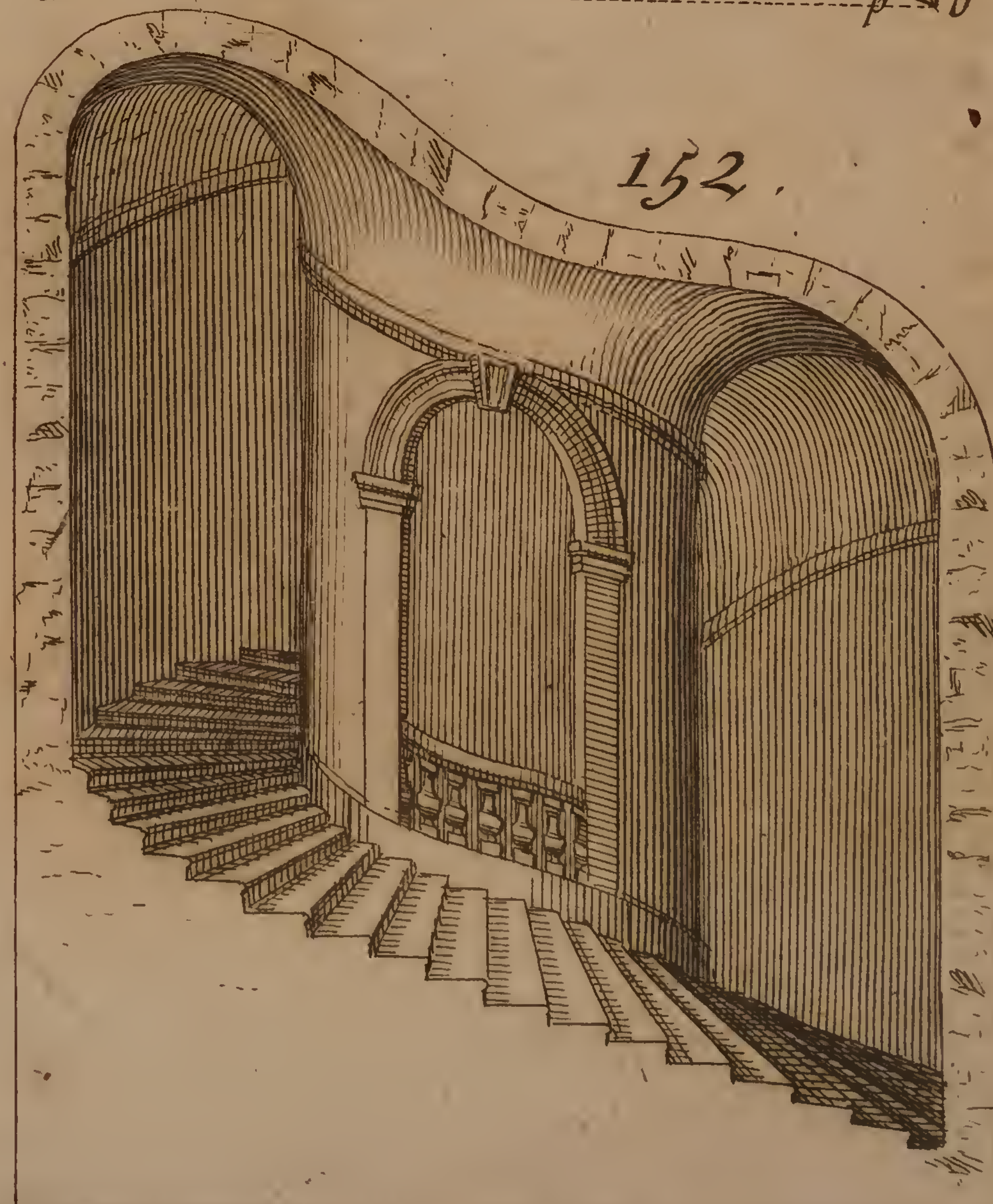

147.


148.


149.




150.
151.


152.

CHAPITRE IV.

De l'imitation des Courbes Régulieres par des compositions d'Arcs de Cercles.

LORSQU'ON aime la régularité, on ne se sert point de ces Courbes qui n'ont que de la ressemblance avec les régulieres, dont elles ne sont que des copies imparfaites, formées par la composition de plusieurs arcs de cercles de differents Rayons; l'original est sans contredit préferable à la copie; cependant l'ignorance des proprietez des Courbes, même les plus communes, comme sont les sections coniques & les spirales, jointe à une plus grande facilité apparente de tracer des arcs de cercles, & peut être encore celle d'en tirer les joins de tête pour les traits des voutes, ont fait chercher plusieurs moyens de les imiter par un assemblage de portions de cercles; & comme l'Ellipse est une des plus usuelles, les Dessinateurs & les Architectes se sont efforcés pendant longtemps, mais inutilement, de l'imiter parfaitement sans jarrets par 3, 4, ou 5. portions de cercles, les axes étant donnez: pour s'en convaincre, il n'y a qu'à jetter les yeux sur deux des planches du Livre de BOSSE, touchant la maniere de dessiner l'Architecture, où il a rassemblé ce qu'on avoit fait de mieux jusqu'alors: cette découverte étoit reservée à un Geometre, tel que M. PITOT de l'Academie Royale des Sciences, qui a trouvé la position de trois centres, & la longueur de deux Rayons, avec lesquels on peut l'imiter aussi parfaitement qu'il est possible, comme nous le dirons ci-après.

IL paroît aussi par les planches du Livre du P. DERAN, particulierement par celle du Chapitre XIX. que cet Auteur qui s'étoit exercé à tant de Traits, n'entendoit pas celui de l'imitation de l'Ellipse; car la difference de la juste position des centres de ses arcs Rampans est trop considerable, & les jarrets trop sensibles, pour qu'on en doive rejetter la faute sur le Graveur. Cependant ces Traits sont regardez en Architecture comme des choses remarquables: une personne versée dans cet Art me citoit pour une des raretez du nouveau Pont de Compiegne un arc surbaissé, qui avoit cinq centres; à quoi je répondis en souriant qu'il auroit été plus beau & meilleur, si au lieu de cinq centres, il n'avoit eû que deux Foyers.

Régle Generale.

TOUT l'art d'imiter les Courbes par differents arcs de cercles, consiste à poser les deux centres des arcs qui se joignent sur une même ligne

droite, qui passe au point de leur jonction, afin que la perpendiculaire qu'on lui tireroit à ce point fût tangente commune, de l'une&de l'autre arc au même point; la raison est, 1.° que l'angle de l'arc avec la tangente étant infiniment petit de part & d'autre du point d'attouchement, le Rayon est presque aussi exactement perpendiculaire sur cet arc, qu'il l'est sur la tangente, à une difference près qui est infiniment petite: 2.° Que l'angle composé de ces deux presque droits sera infiniment grand, par conséquent ses côtez seront dirigez en une ligne si peu differente de la ligne droite, que l'œil ne peut en appercevoir le pli; tels seroient tous ceux d'un Polygone d'une infinité de côtez infiniment petits inscrits dans le cercle.

Cependant l'œil Geometrique qui est un Juge severe, apperçoit fort bien le changement subit de la convexité & de la concavité, particulierement si les Rayons des deux arcs qui se joignent, sont considerablement differents en longueur, comme il est souvent nécessaire qu'ils le soient pour former une demi-Ellipse de trois arcs; alors les gens les moins connoisseurs sentent bien cette irrégularité, sans en sçavoir la raison; c'est pourquoi je ne conseille à personne d'avoir recours à cet artifice de l'ignorance; quoique je donne ici les meilleures régles pour en cacher les défauts, je ne le fais que pour contenter ceux qui aiment à s'épargner de la peine, au préjudice d'une plus grande perfection d'ouvrage, ou lorsque la chose n'est pas assez de conséquence pour meriter plus de soin, ou pour en faciliter l'exécution aux Ouvriers qui ne sont pas capables d'une operation plus parfaite.

Probleme XXI.

Deux Axes étant donnez, imiter une Ellipse par un assemblage de quatre Arcs de Cercles.

Ou ce qui est le même, imiter une demi-Ellipse par trois arcs de 60. Degrez chacun.

Pl. 14. *Fig.* 153. Soit le grand axe AB [*Fig.* 153.] & la moitié du petit axe CD: on portera premierement la longueur CD de cette moitié sur le grand axe en B*y*, pour avoir la difference des deux demi-axes C*y*, qu'on divisera en deux également en F, puis on portera CF en C*z*: sur *zy*, comme diametre, on fera le demi cercle ZE*y*, qui coupera CD en E, on portera la longueur ZE en ZS, & la distance CS d'un côté à l'autre, CS en C*s*: les points *s* & S seront les centres des petits arcs des extrêmitez de l'Ovale, & les lignes AS & *s*B leurs Rayons; enfin des points *s* & S, comme centres, & de l'intervale *s*S, on fera le triangle équilateral ST*s*, dont le sommet T sera le troisiéme centre que l'on cherche; & les côtez

de ce triangle prolongez, détermineront la jonction des grands & petits arcs en i en I, sur lesquels on prendra Ts + sB pour Rayon du grand arc ; ainsi les trois arcs seront de soixante Degrez chacun, & auront des Rayons communs ; *ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Soit AC $= a$, CD $= b$ & l'inconnuë C$s = x$, par la Construction CY $= a - b$ & CZ $= \overline{\tfrac{1}{2}a - b}$, ainsi CE $= \sqrt{\overline{a - b} \times \overline{\tfrac{1}{2}a - b}}$ & ZE $= \sqrt{\overline{\tfrac{1}{2}a - b}^2 + \overline{\tfrac{1}{4}a - b}^2}$, mais CS ($x$) $=$ CZ $\overline{\tfrac{1}{2}a - b}$ + ZS ou ZE $\sqrt{\overline{\tfrac{1}{2}a - b}^2 + \overline{\tfrac{1}{4}a - b}^2}$ donc $x = \overline{\tfrac{1}{2}a - b} + \sqrt{\overline{\tfrac{1}{2}a - b}^2 + \overline{\tfrac{1}{4}a - b}^2}$ *ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME XXII.

Imiter par deux Arcs de Cercles les portions d'Ellipses faites sur deux Diametres, qui ne sont pas des Axes conjuguez, dont l'un est terminé par deux Tangentes à ses extrêmitez, & dont le Conjugue est déterminé par une troisiéme Tangente donnée de position.

On ne peut imiter avec une composition de deux arcs de cercle rassemblez, toutes sortes d'Ellipses faites sur des diametres conjuguez, qui ne sont pas des axes, & qui doivent toucher une ligne donnée de situation & de distance ; mais on peut faire en sorte que l'Ovale touchera la parallele de la troisiéme tangente donnée.

Pour connoître si le Problême peut être résolu par des arcs de cercle.

Soient [*Fig.* 154.] PD & RG deux tangentes aux points B & A, & Dg une troisiéme ligne qui doit toucher l'Ovale proposée à faire ; on portera la longueur DB sur la ligne Dg en Db, & la longueur gA en ga, si ces deux points a & b ne tombent pas au même point, le Problême ne peut pas être résolu ; parce qu'il est démontré dans la Geometrie Elementaire, que si d'un point d ou G pris hors du cercle, on lui mene deux tangentes dB, dT, ou GA, GT, elles sont égales entre elles ; supposant donc la ligne Dg donnée, il faut pour résoudre ce Problême faire Db $=$ DB, & $ga = g$A, tirer Aa & Bb, le point T de leur intersection sera celui d'attouchement de la tangente dG, auquel on tirera la perpendiculaire indéfinie TC, & par les deux autres points d'attouchement A & B donnez, faisant Bc perpendiculaire sur dP, & AC perpendiculaire sur RG ; les points C & c, où ces lignes couperont TC, seront les centres des arcs de cercles qui doivent répresenter l'Ellipse proposée à faire, dans le cas où elle peut en approcher le plus. Si la ligne Dg donnée de position est au dessous

Fig. 154.

D'Eucl. l. 3. *pr.* 37.

du point T, comme EF, il faut faire $Eh = EB$, & $Fi = FA$, tirer Bh & Ai, lesquelles étant prolongées, se couperont au point T, qui est celui de l'attouchement que l'on cherche, par lequel ayant tiré une parallele dG à la donnée Dg ou EF; on reconnoîtra que la somme des lignes Bd & AG sera égale à celles des parties dT & GT.

DEMONSTRATION.

A cause des paralleles Dg & dG ou EF, $DB : Db :: dB : dT$ & $gA : ga :: GA : GT$, mais $gA = ga$ (par la construction) & $DB = Db$, donc $dT = dB$, & $GA = GT$; donc le point T est celui de l'attouchement de la ligne DG, *ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE I.

D'ou se tire la maniere de *faire toutes sortes d'arcs Rampans, avec des portions de Cercle dans quelque position que soient les Piedroits, entr'eux, paralleles, en surplomb ou en Talud, & en quelque situation que soit la ligne de sommité dG:* en voici des exemples pour les piedroits paralleles entr'eux qui sont les plus ordinaires.

PREMIER cas où la ligne de sommité dG est horisontale, & les piedroits
Fig. 155. à plomb. Soit *Fig.* 155. la ligne de Rampe donnée AB, sa hauteur sur l'Horison BO étant portée sur Ob d'alignement à la ligne horisontale AO, on divisera Ab en deux également en m, d'où l'on élevera la perpendiculaire mT: puis du centre m, & pour Rayon Am, on décrira l'arc de cercle AT jusqu'à la rencontre de mT; ensuite ayant pris sur mT, la longueur $mc = OB$, le point c sera le centre du second arc BT, qui rencontrera le premier au point d'attouchement T, ce qu'il falloit faire pour en rendre la jonction imperceptible.

Second cas où la ligne de Rampe AB est parallele à celle de sommité dG.

Fig. 156. AYANT divisé l'horisontale AO en deux [*Fig.* 156.] également en m, & élevé en ce point la verticale mT, qui coupera la ligne de sommité dG au point T, il faut faire $Ad = dT$, comme nous l'avons dit au commencement de cette proposition; puis au point T faire TC perpendiculaire à dG, ou ce qui est la même chose à la parallele AB; le point C où cette perpendiculaire coupera l'horisontal AO, sera le centre du grand arc de cercle AT: puis menant Be parallele à AO, elle coupera TC au point c, où sera le centre du second arc TB, qui se joindra au grand au point d'attouchement en T, comme il est nécessaire.

Troisiéme

Troisiéme cas où la ligne de sommité D*g* [*Fig.* 157.] n'est pas parallele à la ligne de Rampe AB. *Fig.* 157.

Ayant trouvé le point T, comme on l'a dit au commencement de ce Problême; on tirera TC perpendiculaire à D*g*, & B*c* parallele à A*o*, on aura, comme au cas précedent, les points C & *c* pour les centres des deux arcs qui doivent former le Rampant ATB.

Demonstration.

On voit que dans le fond tous ces cas ne different en rien pour la construction: Car, 1.° [*Fig.* 155.] puisque AO & *d*G sont paralleles entr'elles, de même que CT & A*d*; il est évident que A*d* = *d*T, & puisque C*b* = CA = CT, & O*b* = OB, BG sera égal à CO = TG, donc les deux tangentes de chacun de ces arcs AT, TB sont égales, par conséquent elles conviennent au cercle, & les centres C & *c* étant sur une même ligne, la même tangente *d*G est commune aux deux arcs de differents cercles.

Les deux cas suivants sont démontrez par le Principe general qui établit la position des centres, & les mêmes conditions des tangentes, dont nous venons de parler.

Corollaire.

Dela on tire la maniere de tracer *l'Ovale pointuë*; s'il est permis d'user ici de ce mot, pour exprimer l'inégalité de son contour aux extrêmitez de son grand axe; laquelle à cause de sa conformité avec le contour d'un œuf appellé en latin *Ovum*, est nommée en Architecture un *Ove*: comme c'est un ornement, dont on fait grand usage dans les Corniches, & qu'on en trouve de faux Traits dans les Livres; je vais tâcher de les corriger. Albert Duret dans sa Géometrie en donne deux faux, l'un qu'il tire du Cône, dont le contour fait un jarret à chaque extremité du grand axe, comme il seroit facile de le démontrer, si la chose en valoit la peine; l'autre Trait qui a été suivi par quelques Auteurs, est une composition d'arcs de cercles, où il a fait encore une erreur grossiere, joignant les second & troisiéme arcs au dessus du point I en S au dehors des Rayons communs DI: 3I. *Fig.* 158.

Soit donné le petit diametre AB pour la plus grande largeur de l'Ove; on le divisera en quatre parties, & ayant prolongé ce diametre de part & d'autre, de trois de ses parties faisant DA & B2 égales à *m*B: puis du point C, milieu de AB pour centre, on décrira un cercle AHBE, dont

on divisera les quarts de circonference A E, B E en deux également aux points 3. & 4. par lesquels on menera les lignes D I, 2 *i*, qu'on fera égales à D B ou 2 A, en décrivant deux arcs B I, A *i* des points D & 2. pour centres; lesquels arcs étant continuez, se couperont au point *x* par où, & par le centre C, on tirera la ligne H *x*: ensuite des points 3. & 4. pour centres, & de l'intervale 3 I pour Rayon, on décrira deux arcs qui se couperont en *y* sur la ligne H *x*: on divisera l'intervale E *y* en deux également en *c*, par où on tirera les lignes 3 G, 4 *g*, qui rencontreront ces arcs en G & *g*; enfin du point C pour centre, & *c* G ou *cg* pour Rayon, on décrira l'arc G *g*, qui achevera l'ovale en Ove.

Il est aisé de voir qu'on peut alonger ou racourcir cet Ove, en remontant ou rabaissant les centres 3. & 4. & le dernier *c*.

Les Architectes placent ordinairement cet Ove dans une Niche, dont *Bosse* régle ainsi le contour, il fait H L perpendiculaire & égale au diametre H E; il la divise en deux également en O, & la moitié O L en quatre parties égales: il divise ensuite le grand axe H F en trois également, & ce tiers en cinq, il porte une de ces cinquiémes de F en *p*, & de l'intervale S *p* tiers de F H, il décrit un arc F *z*, il ne dit pas de combien de degrez; ce qui seroit cependant nécessaire pour avoir les intervales des Rayons *q* K, *z* N, qui sont les cordes & les rayons de ces arcs.

Toute cette construction n'est qu'une fantaisie & un goût de dessein arbitraire imité apparemment des restes des Corniches antiques, où l'on voit ces Niches formées de differentes façons, en côtes relevées & divisées entr'elles par des ornemens de feüilles, & quelquesfois de Dards; ce qui n'est pas de notre sujet.

Nous avons donné ci-devant la maniere de décrire des demi-Ovales, par le moyen de trois arcs de cercle de 60. degrez chacun, suposant les axes donnez; il nous reste à montrer comment on peut les faire de tant d'arcs de cercles que l'on voudra, soit régulierement en ovale, ou irrégulierement en portion d'Ove; ce qui est nécessaire pour tracer differentes sortes de *Cavets*, ou moulures creuses, & les contours de certains amortissemens qu'on appelle *Piedouches*.

Fig. 159. Soient par exemple [*Fig.* 159.] donnez plusieurs points A, 1, 2, 3, B, rangez d'une façon convenable au contour creux qu'on se propose; on prendra l'intervale A 1 pour côté d'un triangle équilateral A 1 D, & du point D pour centre, on décrira l'arc A 1: ensuite ayant tiré la corde 1, 2, & l'ayant divisée en deux également en *m*, on y élevera une perpendiculaire *me*, qui coupera 1, 2, prolongée en *e*, où sera le centre du

fecond arc de cercle 1, 2, on tirera de même la corde 2, 3, & fur fon milieu M, on élevera la perpendiculaire MC, qui coupera 2*e* prolongée au point C, où fera le centre du troifiéme arc 2, 3, ainfi de fuite, on aura le dernier centre *f*.

La raifon de cette pratique eft claire par la feule conftruction, où l'on reconnoit l'application de la Régle génerale, en ce qu'il y a deux centres fur la ligne droite, où fe fait la jonction des arcs qui doivent fe toucher, c'eft-à-dire, avoir une tangente commune, comme TN, qui touche également les arcs 2, 1 & 2, 3, *ce qu'il faut faire pour éviter tous jarrets.*

Corollaire.

Il fuit de cet exemple, que quoique nous ayons compofé des arcs Rampans de deux feuls arcs de cercles d'un nombre de degrez égaux ou inégaux; on peut encore mieux les former de tel nombre d'arcs que l'on voudra; car fi l'on conçoit la Figure 159. changée de fituation, & qu'on prenne les points A & *p* pour des Impoftes, il eft vifible que la Courbe A 1 2 3 *p* peut fervir pour un ceintre d'arc Rampant: mais alors elle fera moins une imitation de l'Ellipfe, que de la fpirale à laquelle le Problême fuivant fervira d'introduction.

Probleme XXIII.

La difference d'hauteur des Impoftes A & H, & l'intervale horifontal DA des Piedroits d'un arc Rampant étant donnez, tracer un Cintre compofé d'autant d'arcs de Cercles que l'on voudra inégaux en Rayons, mais égaux en nombre de Degrez, ou fi l'on veut d'une partie *de plus avec certaines circonftances.* *Fig. fur 160.*

Soit [à la Figure au deffus du chiffre 160.] le cintre ABH qu'on fe propofe de faire, par exemple de cinq arcs de cercles; fur la hauteur donnée DH comme diametre, on décrira un demi cercle HID, qu'on divifera en cinq parties égales, c'eft-à-dire, en cinq arcs, dont on tirera les cordes, aufquelles on menera des paralleles tangentes au cercle, pour lui circonfcrire la moitié d'un décagone: enfuite ayant prolongé la ligne AD vers *n*, on portera fucceffivement les cinq côtez de D en *n*.

On divifera *n*A en deux également en X, par où on menera X*x* parallele & égale à DH, fur laquelle comme diametre, ayant décrit un demi cercle, on lui circonfcrira le même Polygone; mais tourné differemment en commençant par porter une moitié de côté en X 1, & *x* 5, fur les paralleles DA & H 5, on fera C 3 égale à O 2, diftance du centre O, à un angle du Polygone, & des points 3 & 1, 3 & 5 pour centres & pour

Rayon le côté du Polygone, on fera des interſections d'arcs qui donneront les points 2 & 4, pour tirer par les points 2, 3, 4, 5 les côtez qu'on prolongera indéfiniment vers B, E, F, G; enfin des points 1, 2, 3, 4, 5 pour centres & pour rayons 1 A, 2 B, 3 E, 4 F, 5 G; on décrira des arcs AB, BE, EP, FG, GH qui formeront enſemble ſans aucun jarret le cintre qu'on demande : ſi le nombre des côtez du Polygone n'eſt pas complet, qu'il y ait une moitié de plus, il y aura auſſi un arc de cercle moindre que les autres; ce qui arrivera toujours, lorſque les côtez feront enſemble la moitié d'un nombre impair, comme du triangle Equilateral, du Pentagone, de l'Eptagone, &c.

Il n'eſt pas néceſſaire de rendre raiſon de cette conſtruction pour le concour des arcs de cercles, qui ſe rencontrent au point commun d'attouchement; il ſuffit de dire pourquoi, on a porté les côtez du Polygone circonſcrit ſur la ligne AD prolongée; c'eſt pour avoir l'axe X*x*, & le centre C du Polygone generateur qui doit être au milieu d'une ligne compoſée de la donnée DA & de l'ajoutée D*n*; parce que chaque Rayon des arcs de ſuite diminuë de la longueur d'un côté du Polygone 1 2, 2 3, 3 4, &c. par conſéquent tous enſemble diminuent de la quantité D*n*, au dedans d'un demi cercle, qui auroit X A ou X*n* pour Rayon, & feroit partie du cercle de revolution de la ſpirale, dont cet arc Rampant eſt une moitié. On voit par-là la raiſon de la conſtruction de la Figure 155. où nous avons porté la hauteur O B en O*b* ſur A O prolongée; parce que nous étant propoſé de faire un ceintre de deux arcs de 90. degrez chacun, qui ſont la moitié du cercle, le Polygone generateur en doit être le quarré, dont la hauteur O B eſt un côté qui doit être diminué ſur la longueur du Rayon du ſecond arc: ce que l'on verra plus clairement au Problême ſuivant, qui n'eſt qu'une eſpece de Corollaire de celui-ci.

J'ay dit qu'il falloit que l'arc Rampant fit une demi-revolution, parce que j'ay ſuppoſé les piedroits à plomb paralleles entr'eux; mais s'ils étoient en talud, il faudroit qu'il en fit plus, & en ſurplomb moins, par la raiſon que nous avons ſouvent repeté, que les piedroits doivent être tangens aux arcs à leurs naiſſances.

PROBLEME XXIV.

Imiter la Spirale par des portions d'Arcs de Cercle.

Suivant le Principe géneral que tous les arcs inégaux doivent ſe joindre à un point commun d'attouchement, pour qu'on n'en aperçoive pas la jonction; il ne s'agit pour imiter la ſpirale, que d'avoir toujours deux centres de ſuite ſur un même Rayon, il faudroit encore que ces Rayons

diminuaſſent toujours dans une certaine proportion qui pourroit beaucoup varier, & que les angles qu'ils font entr'eux fuſſent égaux ou variables, auſſi dans une certaine proportion, comme nous l'avons dit des ſpirales; ce que l'on peut bien concevoir après ce que nous avons dit de cette courbe, & l'exécuter ſuivant l'intention qu'on a de faire plus ou moins de revolution, en imitant la ſpirale réguliere : mais comme il ne s'agit pas dans cette imitation d'une ſi grande préciſion, qui ne peut convenir à une compoſition d'arcs de cercles; il nous ſuffit de donner la maniere génerale de faire ce qu'on appelle en Architecture *Volute*.

Ayant pris un point C pour centre de la ſpirale ou volute; [*Fig.* 160.] on prendra ce point pour le milieu du côté d'un Polygone quelconque : nous donnons ici pour exemple l'Exagone *Fig.* 160. & 161. & on le fera de telle grandeur que l'on voudra, à l'égard du plus grand Rayon que l'on veut donner à la volute, & de l'intervale que l'on veut occuper par les Rayons oppoſez, dont on peut compter la diminution par le nombre des changemens des centres de chaque arc, & la longueur des côtez du Polygone ajoûtez enſemble. Les Architectes, qui, pour terminer les revolutions vers le centre, y font un cercle qu'ils appellent *l'Oeil* de la volute, ſe réglent par la grandeur de cet œil, auquel ils aſſignent un certain nombre de parties du Module, c'eſt-à-dire, d'une diviſion faite ſur le diametre de la colomne, ſuivant leurs ſiſtémes arbitraires. *Fig.* 160.

Pour nous qui ne propoſons qu'une maniere génerale, dont on peut facilement deduire les particulieres; nous dirons ſeulement qu'ayant fait un Polygone quelconque, *Fig.* 161. & ayant pris le milieu d'un de ſes côtez pour centre de la ſpirale; on tirera de ce point C à tous les angles du Polygone des Diagonales C 4, C 5, C 3, C 2, & enſuite s'étant fixé un nombre de revolutions, on y inſcrira autant de Polygones ſemblables au premier, qui auront toujours un de leurs côtez commun avec le premier *b* C 1, & les côtez de ces Polygones feront encore en telle raiſon que l'on voudra, ſelon le deſſein propoſé que la volute ſe reſſerre plus ou moins vite. *Fig.* 161. & 162.

Cette diſpoſition étant faite, on prolongera tous les côtez de ces Polygones d'une part ſeulement, & à volonté, autant à peu près qu'il convient à la longueur des Rayons, ſuivant le premier A C qui a été donné comme on voit dans la Figure 160. 1 2 *a*, 2 3 *b*, 3 4 *c*, 4 5 *d*, 5 G *e*, G 1 *f*, & 1 2 *a*, qui acheve la revolution. Enſuite du centre 2, & pour Rayon 2 *a*, on fera l'arc *a b* terminé en *b* par le Rayon 2 *b b* 1; du centre 3 & de l'intervale 3 *b* pour Rayon, on décrira l'arc *b c*; du centre 4, & pour Rayon 4 *c*, on décrira l'arc *c d*, & ainſi de ſuite en changeant de centre à chaque *Fig.* 160.

arc, posant la pointe du compas sur un des angles du Polygone, & arrêtant l'autre au Rayon fait du côté de ce Poligone prolongé.

Apres la premiere revolution, on continuera de même pour la seconde sur le Polygone inscrit immédiatement dans le premier, & au bout de cette seconde revolution, on continuera sur les angles du troisiéme Polygone, suivant l'ordre des chiffres de la Figure 161.

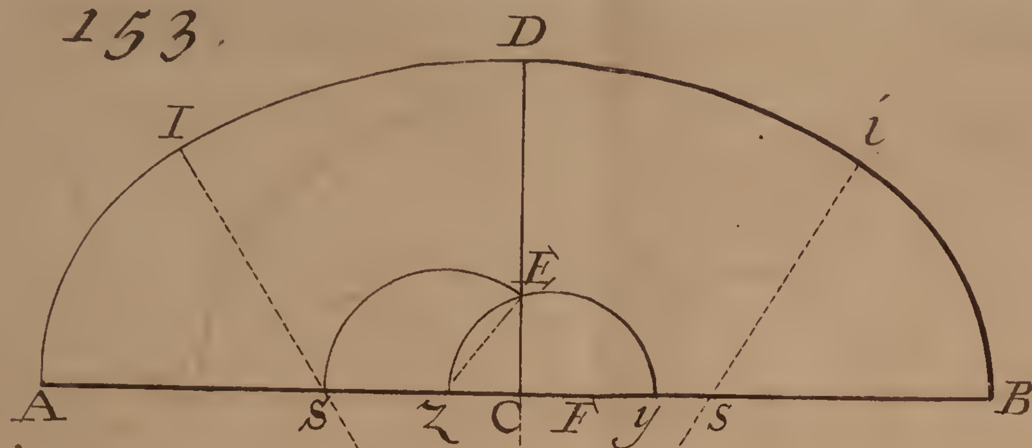
Fig. Ou il faut remarquer que la seconde revolution, commençant par deux centres 6, 7 qui sont sur un Rayon commun, ne doit point faire de jarret avec la premiere; mais elle fait une sorte d'irégularité, en ce que la distance du centre 6 au centre 7, n'est pas égale à celle du centre 5 au centre 6, comme elle l'a été depuis le point 1, jusqu'au point 5, & comme elle le doit être ensuite aux intervales 8, 9, 10, 11, & 12; la même chose arrive à la troisiéme revolution; cependant les Architectes qui donnent la Geometrie à bon marché, disent comme Daviler que la *volute de Goldman*, qui est faite sur ce principe, est *Geometrique*, quoiqu'elle ne soit qu'un cas de notre methode, dont la seule difference est que son Polygone central est un quarré, comme on voit en la Figure 162. mais en fait de volute Ionique, on n'a pas besoin d'y regarder de si près; car les Architectes n'en veulent qu'à une décoration de goût, & non pas à une grande précision.

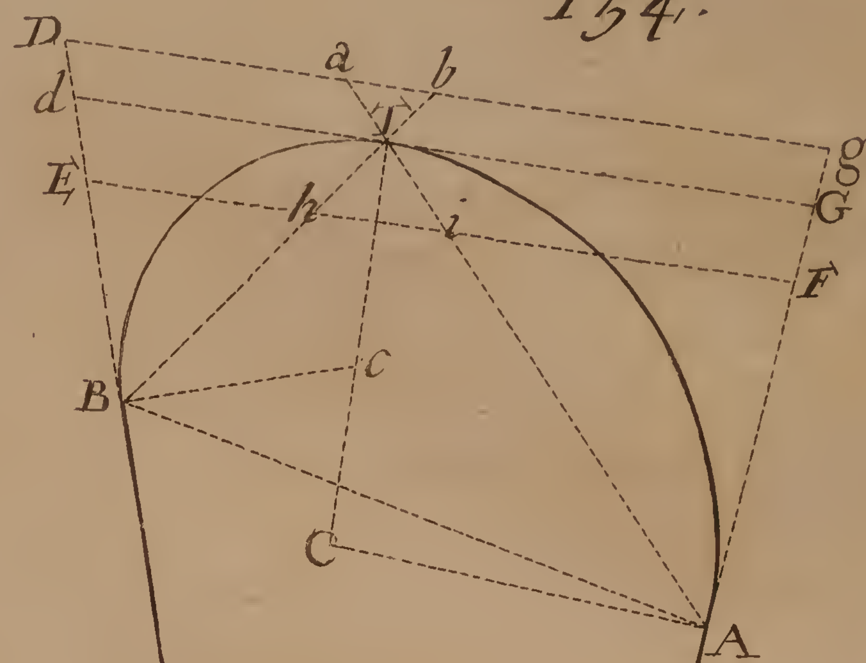
Corollaire I.

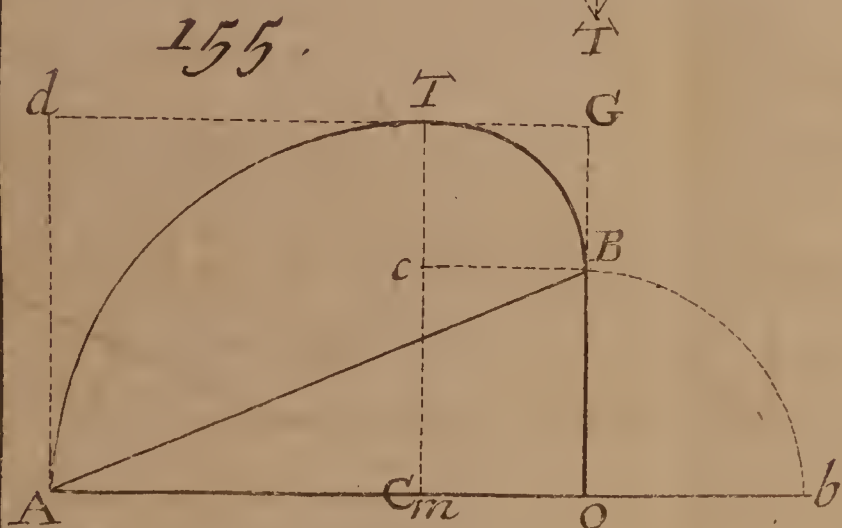
Il suit que si l'on veut *agrandir la volute* en dehors, on peut en agrandissant les Rayons, continuer les arcs de suite, en changeant de centres sur les mêmes angles des Polygones, ou sur d'autres circonscrits sur le même côté 6 C 1.

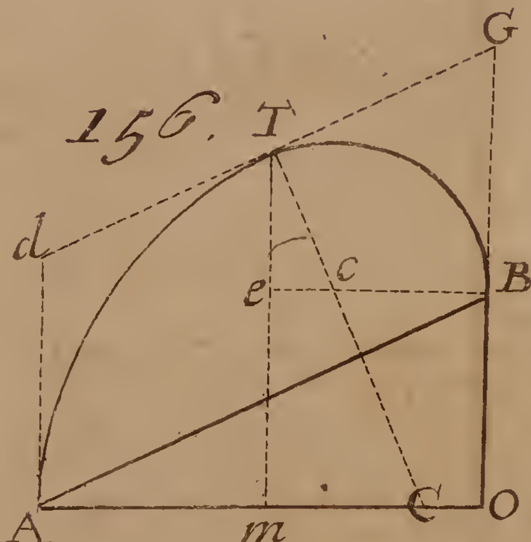
Corollaire II.

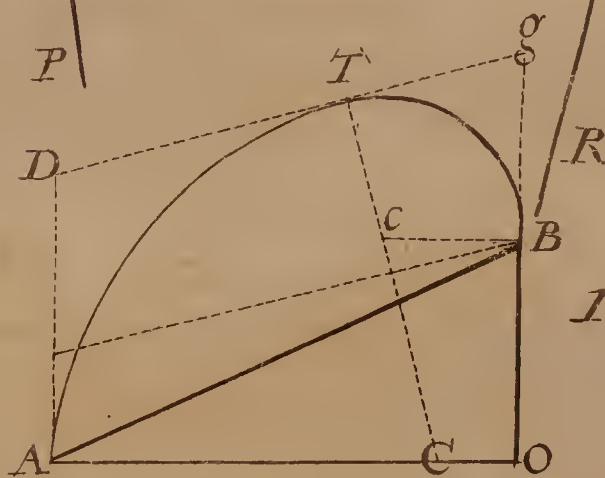
Secondement que si l'on veut *faire un double trait* qui vienne aussi en se resserrant avec le premier; ayant déterminé la largeur *a i* sur le Rayon *c a*, on cherchera le côté d'un Polygone semblable au premier, qui soit en même raison que *c i*, *c a*, par cette analogie *c a* : *c i* : : *c* 1 : *c x* appellant *x* le point qui sera à l'angle du second Polygone sur le Rayon sous 2 *b*; la petitesse de la Figure ne nous a pas permis d'exprimer ces differences, de peur d'y jetter de la confusion: nous ne disons point comment cela se fait par les lignes; car nous supposons que nous parlons à des Lecteurs qui sçavent trouver une quatriéme proportionelle à trois lignes données, comme il est enseigné chez Euclide *liv.* 6. *prop.* 12.

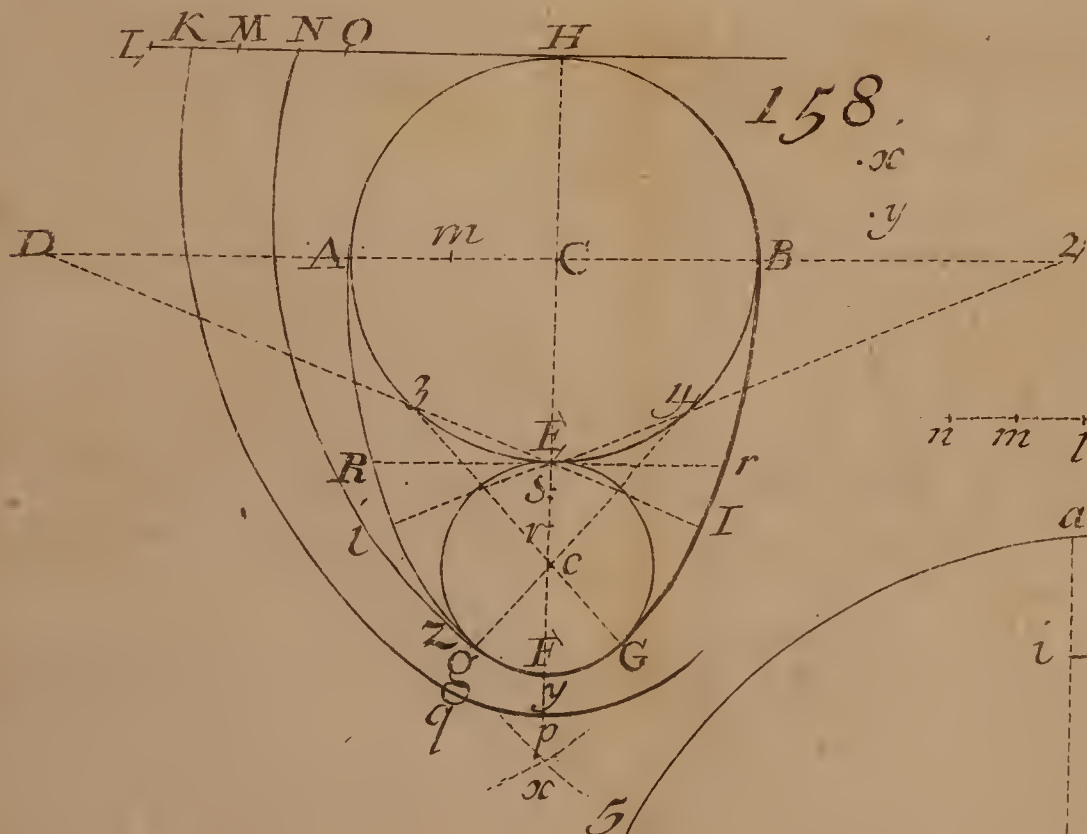

153.
D
I
i
E
A
S
Z
C
F
y
s
B
T

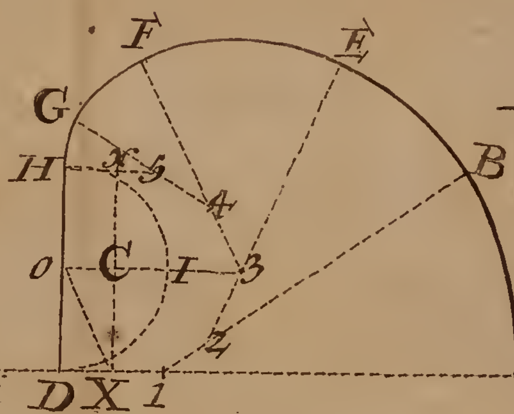

154.
D
a
b
d
T
g
E
h
i
G
F
B
c
C
A
P
R

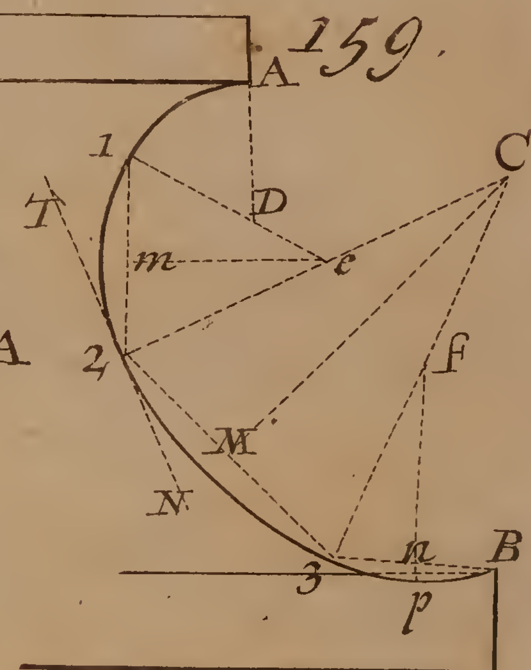

155.
d
T
G
c
B
A
C
m
o
b

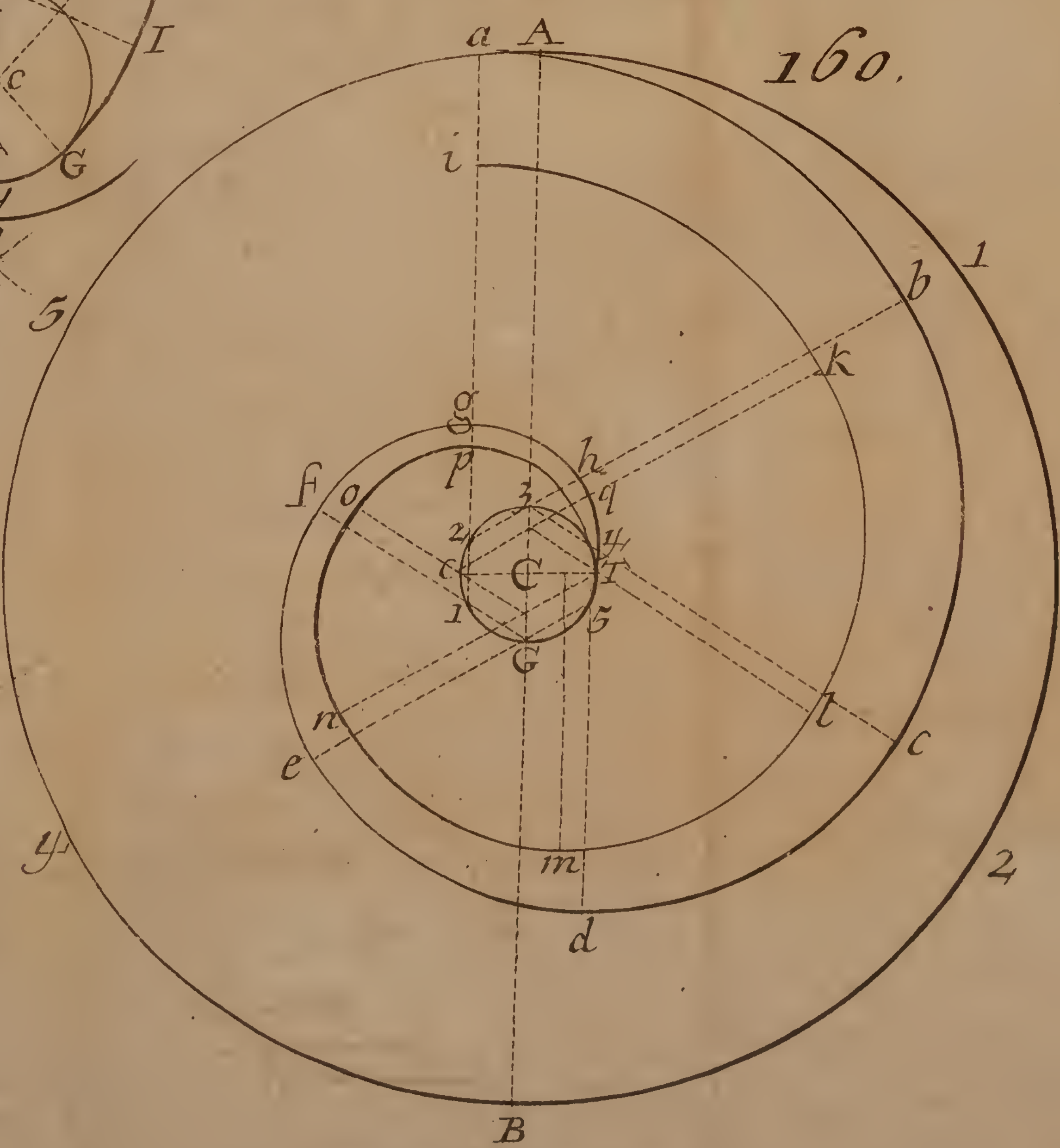

156.
T
G
d
e
c
B
A
m
C
O

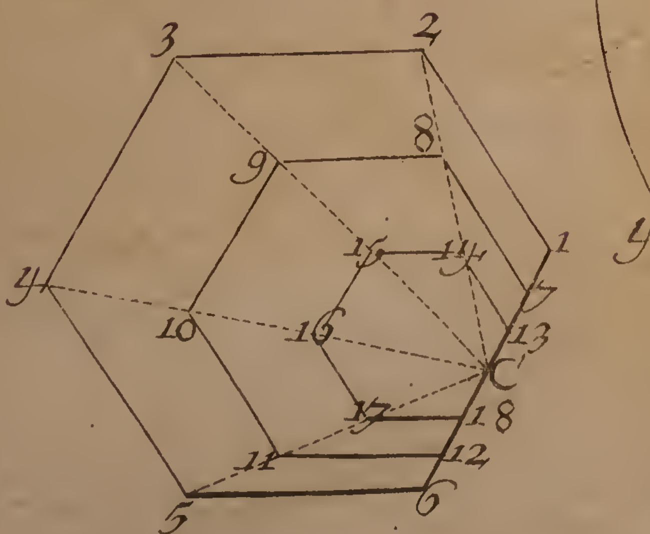

T
g
D
c
B
157.
A
C
O

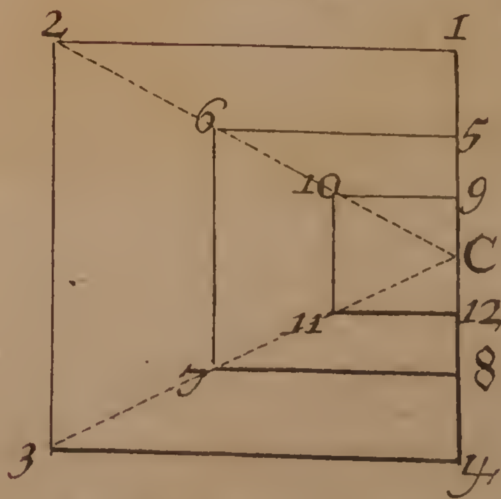

L
K
M
N
O
H
158.
D
A
m
C
B
R
r
E
S
I
c
F
G
y
p
x


F
E
G
H
B
C
I
3
4
2
n
m
l
k
i
D
X
1
A
P


A
159.
1
D
C
T
m
c
2
f
M
N
3
n
B
p


a
A
160.
i
1
b
k
g
h
f
o
p
q
C
T
G
n
l
c
e
m
d
2
B


161.
3
2
9
8
4
15
14
1
10
16
13
C
17
18
11
12
5
6


162.
2
1
6
5
10
9
C
12
11
7
8
3
4

REMARQUE.

On voit par la Figure 162. que la volute de Goldman que Daviler donne comme la plus convenable au Chapiteau Ionique, n'eſt qu'un cas de notre maniere génerale d'imiter la ſpirale par des arcs de cercles, en prenant pour le Polygone central le quarré, au lieu des autres Polygones qui ont plus de côtez, d'où réſulteroient cependant des volutes plus parfaites.

CHAPITRE IV.

De la diviſion des Sections Coniques par des Lignes droites perpendiculaires à leurs Arcs.

On ſçait que la perpendiculaire à un arc n'eſt autre choſe que celle qui fait des angles Droits, avec la tangente de cet arc au point d'attouchement; ainſi il faut conſiderer chaque point de diviſion, comme celui d'un attouchement, y ſuppoſant une tangente réelle ou poſſible, à laquelle il faut tirer une perpendiculaire par le point d'attouchement donné, ou par un autre point pris hors de la Courbe; ce qui s'exécute differemment pour chacune des ſections Coniques.

I.°

Pour le Cercle.

Probleme XXVI.

Par un Point donné, tirer une Perpendiculaire à un arc de Cercle, dont on ne connoît pas le Centre.

Il peut y avoir trois cas dans ce Problême: 1.° où le point donné eſt dans l'arc; 2.° ou hors de l'arc; 3.° ou à l'extremité de l'arc. Pl. 15.

Si le point donné eſt à la circonference en D [*Fig.* 163.] on prendra de part & d'autre deux longueurs égales D *e*, D *f*; & des points *e* & *f* comme centres, & d'une ouverture de compas priſe à volonté pour Rayon, on fera une interſection d'arcs en *g*, par où & par le point D, on tirera la ligne *g* D, qui eſt celle qu'on cherche. Fig. 163.

Secondement ſi le point donné eſt hors de l'arc DGB, comme en *d*: du point *d* pour centre & pour Rayon un intervale pris à volonté; on tracera l'arc *h i*, qui coupera le donné AGB aux points *h* & *i*, deſquels comme centres, & de la même ouverture de compas, ou de telle autre

qu'on voudra pour Rayon, pourvû qu'elle ſoit plus grande que la moitié de la diſtance des centres *b* & *i*, on fera une interſection d'arcs en *b*; ſi par les points *b* & *d*, on tire une ligne *bd*, la partie *d*G ſera celle que l'on cherche.

3.° Si le point donné eſt ſur l'extremité de l'arc donné AGB en B, & qu'on ne puiſſe pas le prolonger au delà de ce point; 1.° par la maniere ordinaire, ayant porté à volonté deux longueurs égales BK, KL pour faire avec d'autres ouvertures pour Rayons, à volonté l'interſection en P, du même Rayon BP, & du point K pour centre, on fera un arc en R, & de KP pour Rayon, & du centre B, on fera une interſection en R, la ligne RB ſera la demandée; autrement on portera trois longueurs égales priſes à volonté ſur cet arc comme en K, L, *m*, & par le premier cas ayant fait KP & LN perpendiculaires ſur l'arc AGB, & égales entr'elles; on tirera les lignes LP, KN qui ſe couperont au point O; enſuite ayant tiré BP, & fait B*q* = KO, par le point *q*, on menera KR = KN, ou BP; enfin par les points R & B, on tirera AB qui ſera la ligne que l'on cherche.

Démonstration.

Par les Elemens de Géometrie, il eſt évident que ſi l'on tire les cordes *ef* & *hi*, la perpendiculaire ſur le milieu eſt auſſi perpendiculaire aux arcs, dont elles ſont ſous-tendantes; or les deux operations ont été faites, comme ſi les cordes avoient été tirée de *e* en *f*, & de *h* en *i*, & qu'on voulut leur tirer des perpendiculaires, & les diviſer en deux; donc les lignes D*g* & *d*G ſont perpendiculaires à l'arc AGB; de ſorte que ſi l'on prolongeoit ces lignes, elles ſe rencontreroient au centre du cercle en C.

La raiſon de la conſtruction du troiſiéme cas n'eſt pas moins claire, car les triangles LKP, KBR ont été faits égaux; mais le côté KP eſt perpendiculaire à l'arc LKB (par la conſtruction;) donc BR le ſera auſſi au même arc, *ce qu'il falloit faire.*

Usage.

Ce Problême ſert à tracer les joins de tête de tous les ceintres circulaires des voutes, afin que les Arêtes des angles des Vouſſoirs qui les compoſent; ſoient d'égale reſiſtance; c'eſt ce que les Ouvriers appellent le *Trait quarré ſur la ligne courbe*, & *au bout de la ligne courbe*, lorſqu'il s'agit de faire le joint à une extremité, comme en BR.

Les Ouvriers ont coûtume de faire la même operation ſur les arcs qui ne ſont point circulaires, comme les ſurbaiſſez ou ſurhauſſez qui ſont des portions

portions d'Ellipſes ou d'autres courbes; cependant elle ne convient qu'au cercle, & eſt défectueuſe dans les autres courbes; l'erreur à la verité n'en eſt pas bien ſenſible, lorſque l'on ne ſe ſert que d'une petite longueur des Rayons d'interſection, & qu'on prend une fort petite corde, ou portion d'arc dans les grandes voutes, mais dans les petites; & lorſqu'on prend un grand arc de l'Ellipſe ailleurs qu'aux environs de ſes axes, elle peut être fort ſenſible: en un mot elle eſt contraire à la régularité, à la ſimetrie, & peut nuire à la ſolidité, comme nous l'avons expoſé.

Lemme.

La Perpendiculaire ſur le milieu de la Corde d'un arc de Section Conique autre que le Cercle, & qui n'eſt pas un des Axes, eſt oblique à cet arc.

Soit [*Fig.* 164.] l'arc ADPB portion d'une Ellipſe, d'une Parabole ou d'une Hyperbole, & le point D ou P, qui ne ſoit pas à l'extrêmité d'un des axes de la Courbe: ſi ayant fait *b* P = P *e*, des points *b* & *e* comme centres, on fait des interſections d'arcs en *g* & *h* avec des Rayons égaux, de longeur priſe à volonté, je dis que la ligne menée par ces deux points *g* & *h*, qui eſt perpendiculaire à la corde *b e*, ne la ſera point à ſon arc *b* P *e*. *Fig.* 164.

Demonstration.

Une ligne n'eſt perpendiculaire à un arc, que lorſqu'elle l'eſt à ſa tangente au point P où elle le rencontre; mais ſi P*t* perpendiculaire à P*h* eſt une tangente, la corde *be* qui lui eſt parallele, & coupée en deux également en *m* par la ligne P*h* ſera une Ordonnée, & cette ligne P*h* ſera un diametre; or il n'y a de diametres perpendiculaires aux Ordonnées que les axes, donc le point P eſt ſur un axe; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Secondement il eſt démontré qu'on ne peut mener qu'une tangente par un point P; cependant il eſt clair que par cette conſtruction, on pourroit en mener pluſieurs; car ſi au lieu des points *b* & *e* équidiſtans de P, & centres des interſections *g* & *h*, on en prend deux autres auſſi équidiſtans de P *e*, comme B & *r*, la corde *r*B ne ſera plus parallele à *b e*, & par conſéquent la perpendiculaire *x*P*y* ne ſe confondera point avec le premiere *gh*, mais elle la croiſera, & cependant encore au même point P, *r*P = BP, comme *b* P étoit égal à P E par la conſtruction, la raiſon en eſt fort ſenſible; car les arcs de l'Ellipſe n'étant pas d'une courbure égale comme ceux du cercle, les cordes égales ne ſouſtendent pas des arcs égaux, celle qui eſt plus près du grand axe, répond à un plus grand arc, que celle qui eſt près du petit axe, où la courbe ſe redreſſe & approche plus de ſa corde, donc par la methode des Ouvriers, on trouve pluſieurs

joins de tête differemment inclinez à l'arc, & cependant il n'y en a qu'un seul de bon, qui est la perpendiculaire à la tangente au point de division du joint, donc leur methode est mauvaise; *ce qu'il falloit démontrer.*

On auroit fait peu d'attention à la pratique des Ouvriers, si elle n'avoit été enseigné par les Auteurs qui ont écrit de la coupe des Pierres, lesquels ont dû en sentir l'irrégularité en ce qu'elle ne fait pas des angles égaux de part & d'autre du joint des Voussoirs; de sorte que l'arête de l'un est aiguë, & l'autre obtuse, ce que nous avons cru devoir faire remarquer, avant que d'établir la vraye maniere de tirer les joins sur les arcs de toute autre section conique que le cercle.

PROBEME XXVII.

Par un Point donné à la circonference d'une Section Conique, tirer une perpendiculaire à son Arc.

Il faut premierement connoître les Foyers de la section soit Ellipse, Parabole ou Hyperbole; & s'ils ne sont pas donnez, il faut les chercher par les Problêmes II. X. & XI.

Fig. 164. 165. 167. Par les Foyers F & *f* des trois Figures 164. 165. 167. on tirera au point donné D les lignes droites FD & *f*D, qu'on prolongera en M & L, *Fig.* 164. & seulement en L, *Fig.* 165. parce que la Parabole n'ayant qu'un Foyer, on tirera par le point D la ligne DM parallele à l'axe OFH, & pour l'Hyperbole, *Fig.* 167. il ne sera nécessaire de prolonger que FD en L, parce que la ligne *f*D du Foyer opposé, donnera l'angle *f*DL, dont on a besoin.

Du point D comme centre, & d'un intervale pris à volonté, on fera un arc LXM qu'on divisera en deux également en X, par où & par le point donné D, on tirera XD, qui sera la ligne qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

Soit tirée par le point D, *t*DT perpendiculaire à DX: il est démontré dans tous les traitez * des sections coniques, que les lignes droites menées des deux Foyers à un même point de la courbe, par lequel passe une tangente, font des angles égaux avec cette tangente *t*T; mais ces angles *f*DT & FD*t*, *Fig.* 164. sont égaux à leurs opposez au sommet *t*DL, TDM; si on leur ajoûte à chacun la moitié de l'angle LDM, les angles *t*DX & TDX, seront égaux entr'eux, donc ils seront droits; or [par la construction] cet angle LDM est divisé en deux également, donc la ligne XD qui le divise, sera perpendiculaire à la tangente *t*T, & par conséquent à l'arc, *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Appollonius l.* 3. *pr.* 48. & pour la Par. *l.* 1. *p.* 33.

La même démonſtration eſt claire dans la Figure 167. avec cette difference qu'il n'eſt pas néceſſaire de prolonger *f*D, mais ſeulement F D en L, parce que l'angle *f*D T eſt au dehors de l'Hyperbole, & qu'il n'y a que ſon égal T D F, dont un côté eſt dedans.

A l'égard de la Figure 165. pour la Parabole qui n'a qu'un ſeul Foyer F que l'on puiſſe déterminer; on peut ſuivant le ſiſtéme de la Géometrie de l'infini la conſiderer comme un Ellipſe infiniment alongée; alors ſon ſecond Foyer étant infiniment loin, la ligne N D M qui en ſeroit tirée au point D, ſeroit parallele à l'axe OT: il en reſulte en effet la même égalité des angles N D *t*, F D T, comme il eſt prouvé par d'autres moyens; ainſi la même conſtruction pour tirer une perpendiculaire à l'arc d'une ſection conique, ou plûtôt à la tangente au point d'attouchement, eſt la même pour toutes; exceptez pour le cercle où les deux Foyers ſont reünis à ſon centre.

AUTREMENT.

On peut démontrer cette propoſition ſi l'on veut admettre l'axiome que M. de Roberval établit pour l'invention des tangentes que *la direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, eſt la touchante de la ligne courbe en chaque poſition de ce point là*: or la direction des lignes tirées à un point de l'Hyperbole de chacun des Foyers tend à l'éloigner également, donc la ligne qui diviſe également l'angle de ces lignes eſt la touchante, & dans l'Ellipſe l'une de ces lignes tend autant à s'éloigner, que l'autre à s'approcher du Foyer, donc la ligne qui diviſe leur angle eſt la tangente.

USAGE.

On auroit pû intituler ce Problême pour en exprimer l'application à à la pratique, *maniere de tracer les joins de tête des ceintres faits d'arcs de ſections coniques*, & on en auroit indiqué tout d'un coup l'uſage pour la coupe des Pierres; mais comme nous n'avons pas encore expliqué ce que c'eſt que *joint*, il convenoit d'énoncer la propoſition en termes géneraux.

Je dirai en paſſant, que ce Problême eſt fondé ſur une verité qui a fourni de merveilleuſes inventions dans la Catoptrique pour refléchir la lumiere; parce que *l'angle d'incidence eſt égal à l'angle de refléxion*; c'eſt delà que j'en avois tiré la pratique que je donne pour les joins, avant que j'euſſe ſçû que M. Blondel l'avoit déja fait dans ſes Problêmes d'Architecture, mais il n'a pas pourvû au cas ſuivant.

PROBLEME XXVII.

Par un Point donné hors de la circonference d'une Section Conique, lui mener une Perpendiculaire.

Ce Problême n'est pas si simple que le précedent, & se resout differemment pour la Parabole & pour les deux autres sections coniques, l'Ellipse & l'Hyperbole; c'est un Problême *de Minimis.*

1.° *Pour la Parabole* [*Fig.* 165.]

Fig. 165. Soit le point donné P hors de la Parabole, on en abaissera une perpendiculaire PH sur l'axe OS prolongé vers T, s'il le faut; on fera HK égale à la moitié du parametre, c'est-à-dire, à 2FS; on divisera ensuite l'intervale KS en deux également au point *m*, où l'on fera *m*C perpendiculaire à l'axe OS, & égale au quart de HP: si du point C pour centre, & pour Rayon l'intervale CS; on décrit un arc de cercle, il coupera la Parabole ASB au point *x*, qui est celui que l'on cherche, par lequel & par le point donné P, tirant une ligne P*x*, elle sera perpendiculaire à la Courbe, ou plûtôt à la tangente T*t* au point *x*.

Nous ne pouvons pas donner la démonstration de cette construction dans toute son étenduë; parce qu'elle suppose des propositions qu'il seroit trop long de rapeller ici & de démontrer; nous indiquerons seulement sur quoi elle est fondée: du point *x* ayant mené la tangente *x*T jusqu'à l'axe OS prolongé; ce qui est facile à faire en portant la distance de l'Ordonnée K*x* au sommet de l'axe S, au-delà du sommet de S en T: on trouve par les proprietez de la Parabole & du cercle qu'elle coupe, que les triangles PE*x*, & *x*KT sont semblables, & leurs angles K*x*T & P*x*E égaux, ausquels ajoûtant l'angle commun T*x*E, on reconnoîtra que l'angle T*x*P est droit, *ce qu'il falloit faire.*

2.° *Pour l'Ellipse.*

Fig. 166. Soit [*Fig.* 166.] l'Ellipse ADB, & le point P donné hors de la circonference, par lequel il faut tirer une perpendiculaire à l'arc AD à un point inconnu *x*, qu'il faut trouver sur cet arc, lequel point soit celui d'attouchement d'une ligne *t*T, à laquelle P*x* soit perpendiculaire.

On commencera par chercher le parametre de l'axe AB, comme nous l'avons dit au Problême II, où en portant le demi axe CD en C*d* sur AB, on tirera AD, & par le point *d*, on lui menera une parallele *de*, qui donnera sur CD le point *e*, par lequel on tirera AF, qui sera coupée en F par une parallele BF meneé à CD par l'extrêmité B du diametre AB; la ligne BF sera le parametre, lequel sera porté de B en *f*, & de *f* en K

parallelement à DC prolongée, par le point K, on tirera l'indéfinie AG: ensuite on prendra la distance CH du centre C à la perpendiculaire PH abaissée sur le diametre AB du point P donné, & on la portera de A en *g* sur AB, on portera H*g* d'A en N sur l'axe BA prolongé en N, par où on menera MNS parallele à DC; par le point N, on menera NL parallele à PC tirée du point donné P au centre de l'Ellipse C, & terminée à la rencontre de PH prolongée en L, ce point L donnera la distance LH d'une ligne MQ, qu'il faut mener parallelement à l'axe AB, les deux lignes MS & MQ seront les Asymptotes d'un arc d'Hyperbole PX*y* qui coupera l'arc AD au point *x*, que l'on cherche pour tirer la ligne demandée P*x*.

On peut encore trouver la distance de la ligne MQ, en portant PH sur AC qui tombe ici en *g*, & tirer *g*G jusqu'à la rencontre menée par le point G parallelement au diametre AB de AG, la ligne MQ sera l'Asymptote.

Les Asymptotes étant données, il est aisé de trouver autant de points que l'on voudra de l'Hyperbole, qui doit donner le point *x* par son intersection avec l'Ellipse AD (par le Problême XII.) il n'y a qu'à tirer à volonté par le point P une ligne quelconque qui coupe les Asymptotes, par exemple, SPR en S & en R, si l'on porte PS en R*y*, le point *y* sera un de ceux de l'Hyperbole, par lequel on tirera d'autres lignes à volonté, comme Y*y*V, qui donneront par la même construction d'autres points de cette Courbe vers *x* & Z, en portant la distance *y*Y en V, *r* en deça & au delà de *x*, & par les points P*x*Z*r*, on tracera l'Hyperbole P*xry* qui coupera l'Ellipse AD au point *x*, par où & par le point P donné, si l'on tire la droite P*x* qui est une corde de l'Hyperbole, cette ligne sera celle que l'on cherche, laquelle sera perpendiculaire à l'Ellipse, ou plûtôt à sa tangente *t*T au point *x*.

3.° *Pour l'Hyperbole.*

Soit [*Fig.* 167.] l'axe donné RS, le centre C, la moitié du second axe CV, par le moyen duquel on trouvera CK moitié du parametre, comme on l'a dit au Problême XII. ou en faisant VK perpendiculaire sur VR: par le point K, on fera K*r* perpendiculaire à RS, & égale à CR, & on tirera la ligne R*r*: ensuite par le point donné P, ayant mené PE parallale à K*r*, on portera CE en R*e*, & on tirera *eh* parallele à K*r*; on portera aussi la distance *eh* de C en H, par où on menera HG parallele à K*r*, & par H la ligne HI parallele à CP, laquelle coupera PE au point I, par lequel on menera GIN parallele à RS; les deux lignes G*g*, GN, sont les Asymptotes d'une seconde Hyperbole, laquelle passant par le point donné P, doit aussi passer par le point *x* que l'on *Fig.* 167.

cherche ; la ligne droite menée de P par x satisfera à la proposition, en ce quelle sera perpendiculaire à l'arc de l'Hyperbole SB, ou plûtôt à sa tangente tT, au point x, *ce qu'il falloit faire.*

Introduction à la Démonstration.

La démonstration de ce Problême dépend d'une autre proposition ; qui est que si l'on prend sur un axe d'Ellipse ou d'Hyperbole un point plus éloigné d'une de ses extremitez que la longueur de son demi parametre, & que la distance du centre de cette Ellipse ou Hyperbole à une Ordonnée au même axe, soit en même raison avec la distance de cette Ordonnée au point donné hors de la Courbe, que l'axe à son parametre ; la ligne menée de ce point à celui de la courbe, où se termine l'Ordonnée est la plus petite de toutes celles qu'on y peut mener. Cela supposé, comme il est démontré au Livre VII. *prop. 6.* de sections coniques de M. de la Hire, soit prolongé Px en p, où cette ligne rencontre l'axe AB, & tirée dx parallele à PH, il ne s'agit que de démontrer que l'axe est au parametre, comme Cd est a dp [*Fig. 166.*]

Par le point x soit mené dxX parallele à PH, qui coupera PC en X, & par le point p, ou Px prolongée, rencontre l'axe AB, soit menée pz aussi parallele à PH : pour diminuer le nombre des signes, soit nommé l'axe AB (a) le parametre BF (b) ; par la construction $a:b::$ PL, LH :: CN : NH ; donc (par la 5.e du 6.e d'Eucl.) les triangles NHL, PHC sont semblables, lesquels sont encore semblables aux triangles Cpz, CdX, à cause des paralleles dX & pz ; donc Cd: Cp:: dX : pz ; & Cp : Cd :: pz : dX en divisant Cd : Cd — Cp = dp : : dX : dX — pz = qX, & en composant Cd + dp = Cd + zq : zq : : dX + qX : qX : : CH + HN : HN : : a : b ; donc Cd : pd : : a : b, donc px [par la proposition citée ci-dessus] est un *minimum*, par conséquent aussi Px, qui est par la même raison perpendiculaire à la tangente Tt, pP étant une ligne droite ; *ce qu'il falloit démontrer pour l'Ellipse.*

Nous omettons la démonstration pour l'Hyperbole, elle est fondée sur le même principe, & sera facile à déduire de la précedente, en faisant attention aux Asymptotes, & à leurs proprietez ; il faut seulement ajoûter, ou l'on retranche pour l'Ellipse. Le peu d'usage que nous avons à faire de cette Courbe, n'éxige pas que l'on s'y arrête plus long temps.

USAGE.

Ce Problême de mener une perpendiculaire à une courbe par un point donné au dehors, ne tombe guéres dans la pratique de l'Architecture pour la coupe des Pierres ; parce qu'on fait ordinairement les divisions de joins

par des points pris ſur les arcs des ceintres, comme il a été enſeigné au Probléme précedent; cependant comme il peut arriver dans une décoration de vouſſoirs à Croſſettes, ou pour tirer quelques Rayons ſur une Ellipſe, qu'on auroit beſoin de ce Problême: nous avons crû devoir le joindre au précedent pour la perfection de la Doctrine, dans laquelle on ne doit pas négliger ce qui n'eſt pas d'un fréquent uſage, parce que les Livres ſont plus utiles pour les cas extraordinaires, que pour ce qui ſe pratique tous les jours, dont on peut s'inſtruire facilement; d'ailleurs c'eſt un contentement à l'eſprit de ſçavoir ce qu'on auroit à faire, ſi le cas arrivoit.

Je dois avertir d'une petite difficulté qui peut ſe preſenter, & embaraſſer un Lecteur peu verſé dans ces matieres; c'eſt que la perpendiculaire tirée par le point donné P hors de l'Ellipſe ſur l'axe A B, peut tomber hors de cette Ellipſe ſur la prolongation de l'axe; alors l'Hyperbole ne peut rencontrer l'Ellipſe. Pour y remedier, au lieu d'abaiſſer la perpendiculaire ſur un axe, il faut l'abaiſſer ſur ſon conjugue, & faire la même operation.

De la diviſion des Spirales par des Perpendiculaires à leurs Arcs.

PROBLEME XXIX.

Par un Point donné au contour de la Spirale, tirer une perpendiculaire à ſon Arc.

PREMIEREMENT il eſt évident que lorſque les ſpirales ne ſont qu'une imitation des vrayes Courbes méchaniques par une compoſition d'arcs de cercles, comme ſont les *Volutes* des Architectes; il n'y a pas plus de difficulté à mener des perpendiculaires à leurs arcs par des points donnez, qu'au cercle; puiſque chacun d'eux a ſon centre different, auquel cette perpendiculaire prolongée doit aboutir.

SECONDEMENT s'il s'agit de la ſpirale d'ARCHIMEDE, ou des autres de VARIGNON, on ne peut donner la ſolution de ce Problême, qu'en ſupoſant la rectification de la circonference du cercle de revolution; car ARCHIMEDE a démontré que la ſouſtangente de ſa ſpirale à la fin de la premiere revolution étoit égale à la circonference du cercle circonſcrit; & comme nous ne pouvons faire la diviſion propoſée, que par une perpendiculaire à la tangente de la Courbe au point donné; ce Problême eſt un de ceux dont la ſolution Géometrique ſera auſſi long-temps à trouver que la Quadrature du cercle.

CEPENDANT ſupoſant le rapport du diametre du cercle à ſa circonferen-

re, comme 7. à 22. ou 100. à 314. ce qui eſt ſuffiſant pour la pratique des arcs; il ſera aiſé de trouver les tangentes à la ſpirale d'Archimede en tel point que l'on voudra marquer à ſon contour.

Soit [*Fig.* 168.] la ſpirale ADBPC, qui fait deux revolutions completes, la premiere de C en B, la ſeconde de B en A: ſi le point donné pour mener une perpendiculaire à cette Courbe eſt en B, à la fin de la premiere revolution; ayant tiré BC au centre C, on lui fera une perpendiculaire BG égale à la circonference du cercle qui auroit BC pour Rayon, ou à la moitié, comme dans cette Figure, à laquelle menant GT parallele & égale à BC ou à ſa moitié, ſi l'on n'a pris que la moitié de la circonference; du point T on tirera TB, qui ſera la tangente, à laquelle ſi l'on tire par le point B donné, la perpendiculaire BX, cette ligne ſera celle qu'on demande.

Si le point donné eſt en A, à la fin de la ſeconde revolution; on fera de même une perpendiculaire ſur CA, que l'on fera égale à la circonference du cercle qui a CA pour Rayon, ou a ſon tiers comme dans cette Figure, ſur laquelle faiſant *tg* parallele & égale au premier Rayon BC, ou à ſon tiers, la ligne *t*A ſera la tangente au point A, & la perpendiculaire A*x*, celle qu'on demande.

Nous prenons ici des parties aliquotes ſemblables, pour que la Figure n'occupe pas trop de place; ce qui ne change rien à la poſition des tangentes, parce qu'on ſçait que les triangles ſemblables, ont les angles oppoſez aux côtez homologues égaux.

Si le point donné eſt en P dans l'intervale de la premiere revolution, ayant tiré, comme ci-devant, PC & ſa perpendiculaire PH, on portera ſur PH la longueur de la circonference du cercle P*hi*, qui a CP pour Rayon, & faiſant HI parallele à PC & égale à BC Rayon de la revolution complete, on menera IPT, qui ſera tangente au point P, & la perpendiculaire P*x*, celle qu'on cherche.

Si le point donné étoit en *q*, entre la premiere & la ſeconde revolutio BE*q*A, on en agiroit encore de même, ne portant pour la perpendiculaire à la ſouſtangente que le premier Rayon BC.

La démonſtration de cette conſtruction qui eſt de M. Personier de Roberval eſt fondée ſur un principe des mouvemens compoſez qu'on peut voir dans la premiere collection des Memoires de l'Accademie des ſciences, & ſur les 19. & 20.e prop. des ſpirales d'Archimede.

Ou pour abreger, il faut multiplier l'arc de revolution (*x*) par ſon Rayon

Rayon (y), & le diviſer par le Rayon (a) du cercle de premiere revolution, ſuivant la formule de M. Varignon $\frac{xy}{a}$ pour trouver les ſoustangentes de cette ſpirale.

Presentement il faut voir comment on doit tirer les ſouſtangentes des autres ſpirales d'un degré plus élevé que celle d'Archimede, comme ſont les Paraboliques, Verticocentrales & les Hyperboliques Cocentrales, dont nous avons donné la conſtruction ci-devant.

Appellant (m) le degré de cette courbe Mr. Varignon trouve pour expreſſion génerale des ſouſtangentes de ces premieres $\frac{mxy}{a}$, c'eſt-à-dire, qu'il faut rectifier l'arc de revolution EN (*Fig.* 140. Planche 12.) compris depuis l'axe AX, juſqu'au point donné N, le multiplier par ſon Rayon CN, & par le degré (m) de la courbe Generatrice qui eſt ici 2. puis diviſer ce produit par le Rayon de la premiere revolution complete, & l'on aura la longueur Cx de la ſouſtangente Cx; ainſi ayant tiré du centre C la droite CN au point donné N, on lui menera par le point C la perpendiculaire Cx égale à la longueur trouvée par le quotient de cette diviſion, qui ſera priſe ſur la même échelle qui aura ſervi à meſurer le contour de l'arc de revolution pour le rectifier, & les deux Rayons de l'arc de revolution incomplete, & de la revolution complete. Plan. 12. *Fig.* 140.

Ou bien ſi l'on veut trouver la longueur de la ſouſtangente ſans calcul, on le peut de la maniere qui ſuit, avec la régle & le compas.

On portera ſur le Rayon CN prolongé le double de ſa longueur en Cn; & ſur CH perpendiculaire à ce Rayon, la longueur CH égale à l'arc de revolution rectifié, puis ayant fait Hg parallele & égale à Cn, on portera ſur la même Hg prolongée la longueur CD du Rayon de la premiere revolution complete, de g en G, laquelle revolution ſe compte depuis le centre C; enfin par les points G & n, on tirera la ligne Gnx qui rencontrera HC prolongée en x; la ligne menée du point x par le point donné N, ſera la tangente que l'on cherche.

La raiſon de cette operation eſt facile à concevoir, ſupoſant que l'expreſſion Algebrique $\frac{mxy}{a}$ pour les ſpirales Paraboliques Verticocentrales a été démontrée par M. Varignon, comme elle l'eſt en effet dans les Memoires de l'Academie des Sciences; car il eſt clair que je conſtruis cette équation qui eſt dans ce cas $\frac{2xy}{a}$, c'eſt pourquoi je porte le double du Rayon CN$=y$ en Cn pour avoir un Parrallelograme C$g=2xy$; enſuite pour le diviſer par a, c'eſt-à-dire, par le Rayon de la premiere revolu-

tion complete qui eſt CD, parce que la ſpirale fait deux revolutions & demi de C en A, je porte CD (a) de g en G, pour tirer Gnx qui ſeroit la Diagonale d'un rectangle fait de HG par Hx, ſuivant laquelle les complemens ſont égaux (par la 43.e du I. Livre d'EUCLIDE,) ainſi le rectangle Hn qui eſt un de ces complemens, ſera égal à celui qu'on peut ſuppoſer de l'autre côté de cette Diagonale, lequel ayant pour un de ſes côtez gG $=$ CD $= a$, aura par conſéquent l'autre égal à Cx qu'on cherche; puiſqu'en diviſant un rectangle par une de ſes Racines, le quotient donne l'autre.

On ſera peut-être ſurpris que j'applique à l'exemple que je donne d'une ſpirale Circulaire, l'expreſſion des ſouſtangentes, des Paraboliques Verticocentrales: il ne faut pas prendre ici le nom de Parabole dans la ſignification ſeule de celle d'APOLLONIUS, mais auſſi pour les autres de differents degrez, qui ſont tous deſignez par la lettre m, ainſi il faut remarquer que le quart de cercle dans cette ſituation eſt une eſpece de demi-Parabole; en effet ſuivant la Géometrie de l'infini, cette courbe n'eſt qu'un demi cercle infiniment alongé; puiſque dans le cercle, les quarrez des Ordonnées ſont entr'eux comme les rectangles des Abſciſſes, & dans la Parabole, dont le diametre ou plûtôt l'axe eſt infini, les abſciſſes ne different que d'une longueur finie, elles ſont cenſées égales, meſurées depuis le point de rencontre de l'Ordonnée à la partie qui s'alonge infiniment; d'où il ſuit que les quarrez des Ordonnées de la Parabole ſont comme leurs abſciſſes, donc l'expreſſion des ſouſtangentes convient au quart de cercle Verticocentral; puiſqu'elle convient de plus à d'autres Courbes, dont les abſciſſes ſont entr'elles, comme les puiſſances quelconques de leurs Ordonnées, ainſi que le démontre M. VARIGNON.

On a pû remarquer que j'ai pris le nombre *deux* pour la valeur de m, parce que la Parabole & le cercle ſont du ſecond degré, ſur quoi on pourroit me demander quelle eſt la Courbe parabolique du premier degré, puiſque celle-ci eſt du ſecond; à quoi je répondrai que c'eſt le triangle, s'il eſt permis de le mettre au rang des Sections coniques & des Courbes; car on peut lui trouver des abſciſſes & des ordonnées, comme je l'ay dit au I. Livre page 16. & ſous cette conſideration, on peut le regarder comme la Generatrice de la ſpirale d'ARCHIMEDE, dont les arcs de revolution ſont entr'eux comme leurs Rayons; c'eſt pourquoi l'expreſſion m s'évanoüit, de ſorte que celle des ſouſtangentes ſe réduit à $\frac{xy}{a}$ qui eſt plus ſimple que la précedente, dont nous avons donné la conſtruction $\frac{2xy}{a}$, où nous avons doublé la longueur de CN, qu'il ne faut pas doubler à la ſpirale d'ARCHIMEDE.

La même construction que nous avons donné pour trouver les soustangentes des Spirales paraboliques, Vertico-centrales, sert pour trouver celles des Hyperboliques Cocentrales, dont nous avons donné un exemple à la Figure 141. avec cette difference que l'expression Algebrique devenant negative, il faut operer en sens contraire, c'est-à-dire, prendre les soustangentes du côté opposé.

REMARQUE.

Il arrive assez ordinairement que les soustangentes deviennent si longues, qu'elles ne peuvent être contenuës dans la surface, sur laquelle on trace l'Epure, c'est-à-dire, le dessein de grandeur naturelle à l'ouvrage qu'on se propose; pour remedier à cet inconvenient, il faut ne prendre que le tiers ou le quart, ou toute autre partie des longueurs données, & mettre la soustangente sur le Rayon perpendiculairement, & à une distance proportionelle du centre C.

USAGE.

Le principal usage du Problême qui enseigne la maniere de mener des tangentes aux spirales est, comme nous l'avons dit, pour la coupe des joins des Volutes, Consoles, Colimaçons & autres ouvrages en spirale, qu'on peut faire de pierre de plusieurs pieces; mais il faut remarquer que le listel de la Volute étant composé de deux spirales differentes, l'une qui forme l'arête exterieure, l'autre l'interieure, la perpendiculaire à la tangente de l'une des deux, ne l'est pas à l'autre; de sorte que si le joint est en bonne coupe sur une arête, il sera en fausse coupe sur l'autre; mais comme ce mal est sans remede, à moins que de faire le joint courbe; il convient pour la plus grande régularité de tracer entre les spirales de ces deux arêtes une moyenne par les divisions de la moitié de la largeur du l'istel, ou de celle du Limon, s'il s'agit du Colimaçon, & mener les perpendiculaires aux tangentes sur les points de division pris sur cette spirale moyenne; ainsi la fausse coupe se divisera partie sur l'arête exterieure, partie sur l'arête interieure.

Le second usage de ce Problême est pour faire un *Oeil* circulaire au milieu de la spirale qui puisse se racorder avec elle sans aucun jarret à la jonction de ces deux Courbes; car ayant déterminé sur la spirale un point, où l'on veut qu'elle se joigne à *l'œil* circulaire, il faut mener par ce point une tangente & une perpendiculaire à cette tangente par le même point, sur laquelle on prendra le Rayon du cercle qui doit former *l'œil*, & par ce moyen les deux courbes se joindront par une transition insensible sans aucun jarret.

D'ou il ſuit que le centre de *l'œil* ne tombera pas ſur le centre de la ſpirale, parce qu'il n'y a que le cercle dont la perpendiculaire à la tangente paſſe par le centre; cette proprieté ne lui étant pas commune avec la ſpirale.

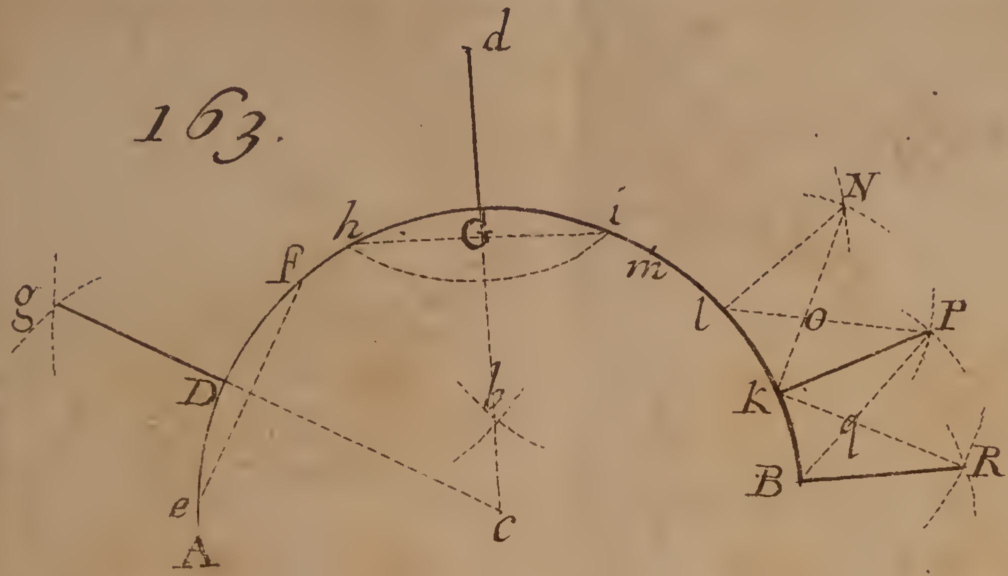
Cette perfection de jonction des deux Courbes ſe trouve obſervée dans la Volute de Goldman, qui n'eſt pas pour cela une ſpirale Géometrique, quoiqu'en diſe Daviler, mais une compoſition d'arcs de cercles, dont la ſuite des Rayons n'eſt pas en raiſon exactement uniforme, comme je le dirai en ſon lieu; ainſi la cathete d'une volute en ſpirale Geometrique ou Mechanique paſſant par le centre de *l'œil*, ne doit pas paſſer par celui de la ſpirale, ou ſi l'on veut qu'elle paſſe par le centre de la ſpirale, elle ne paſſera pas par celui de *l'œil*; c'eſt à l'Architecte à choiſir l'un des deux, l'éloignement de ces deux centres peut être plus ou moins grand, ſuivant la grandeur ou la petiteſſe de *l'œil* de la volute, & la diſtance du point d'attouchement de la ſpirale (où ſe fait la jonction) de ſon centre, ſi le Rayon de l'œil eſt plus petit que cette diſtance, ſon centre tombera au dedans, s'il eſt plus grand, au dehors.

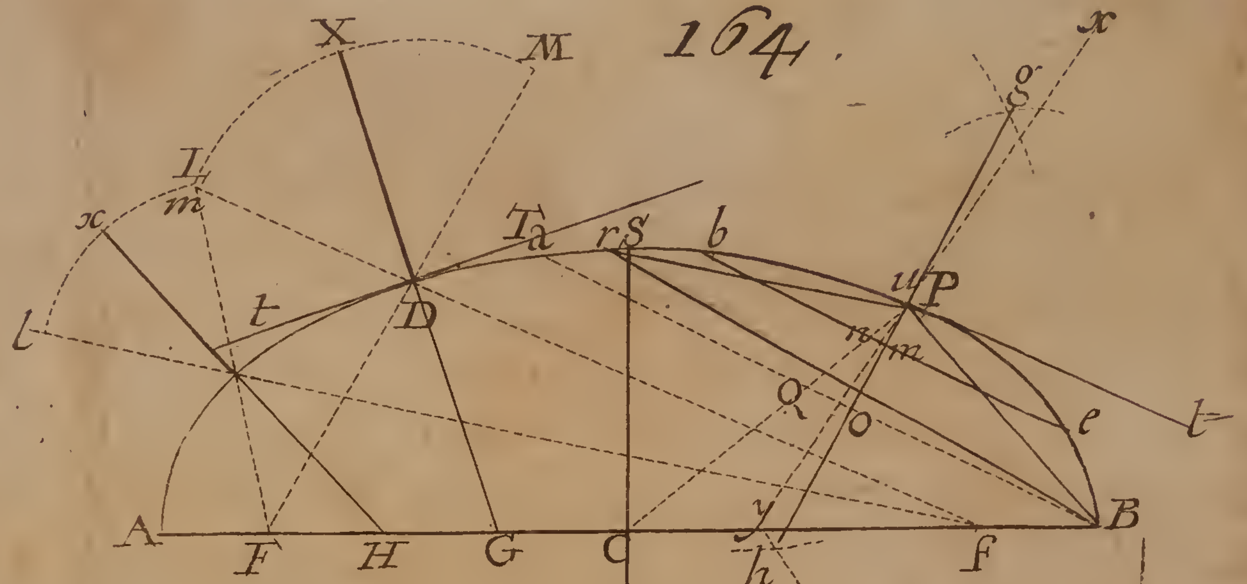
Des diviſions de quelqu'autres Courbes uſuelles par des Perpendiculaires à leurs Arcs.

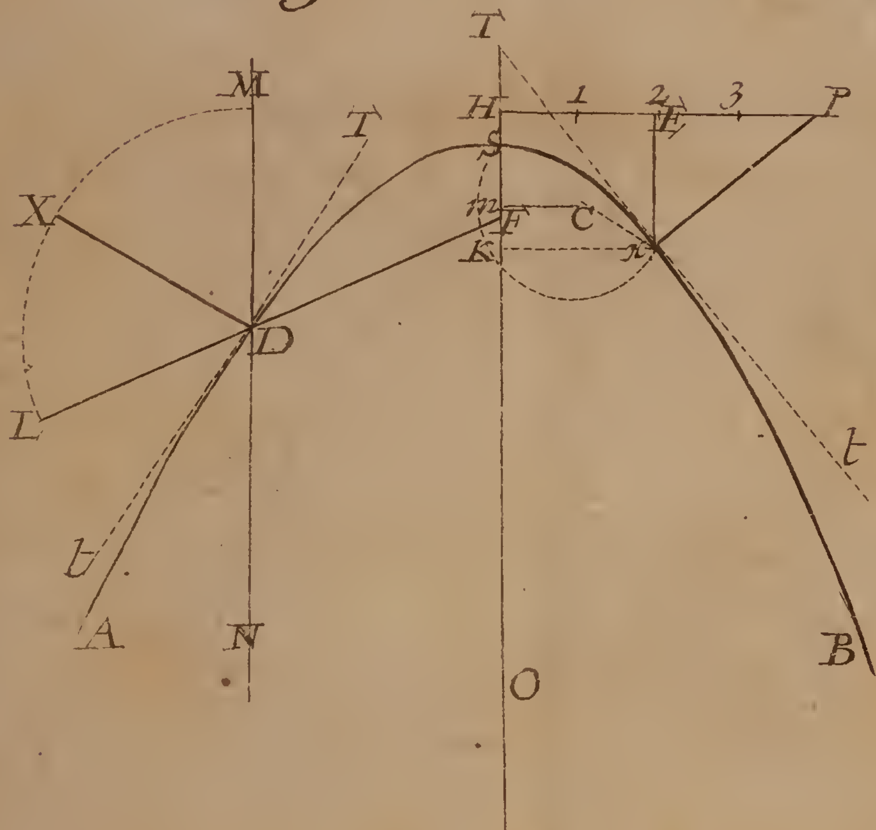
Outre les Courbes des ſections coniques & les ſpirales; il s'en trouve encore d'autres à diviſer par des perpendiculaires à leurs arcs, dans quelques *Traits* de la coupe des Pierres; mais ſi rarement qu'il n'eſt pas fort néceſſaire de s'arrêter à en chercher les tangentes.

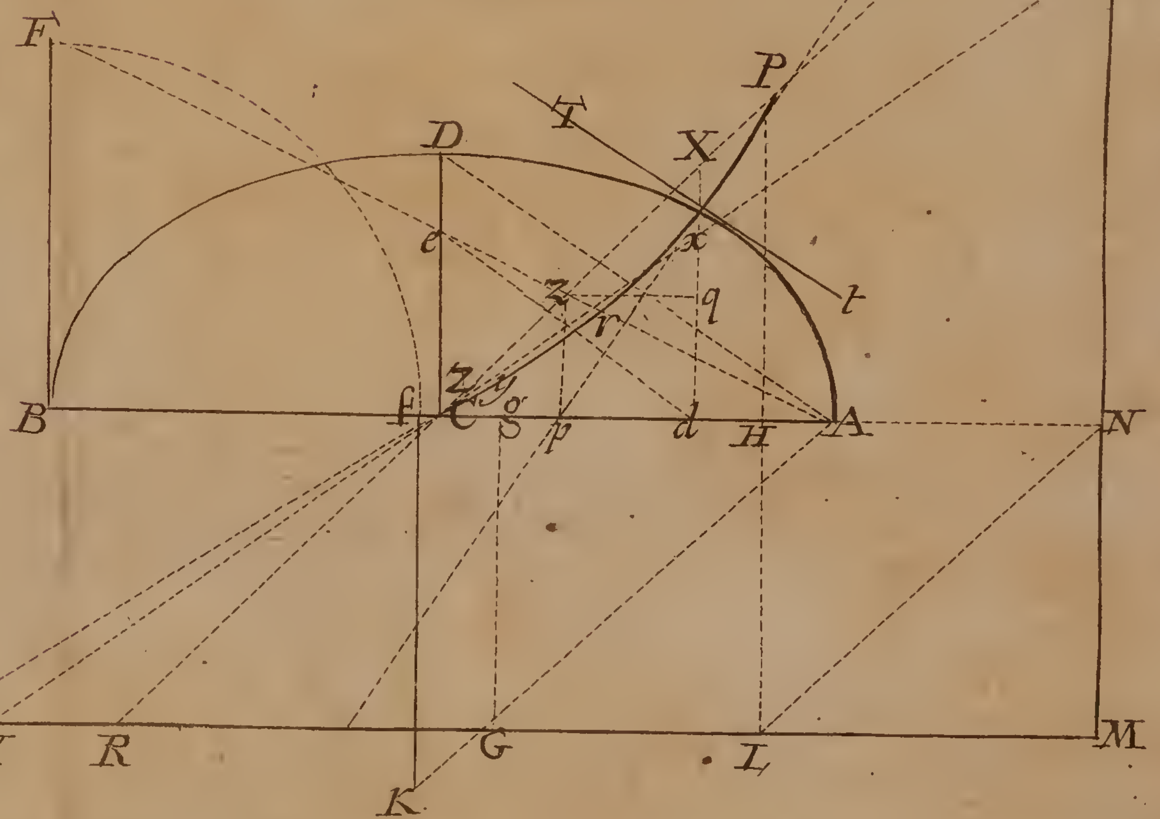
La premiere eſt celle d'une eſpece de Cicloide, qui eſt la courbe dévelopente de la circonference de la face de la *Trompe érigée ſur une ligne droite*, ſuivant le Trait du P. Deran; ſur laquelle il faut tirer les joins de tête, ce qu'il fait en operant ſur cette Courbe, comme ſur un arc de cercle, en prenant de part & d'autre des ouvertures de compas égales, & faiſant des deux diſtances, comme centres des arcs de cercle qui ſe coupent, & donnent à peu près cette perpendiculaire, & ſuffiſamment pour qu'on n'en puiſſe appercevoir l'irregularité, ſi l'on prend de petites diſtances du point donné à diviſer; nous donnerons un autre trait de la même Trompe, où l'on n'a pas beſoin de cette operation.

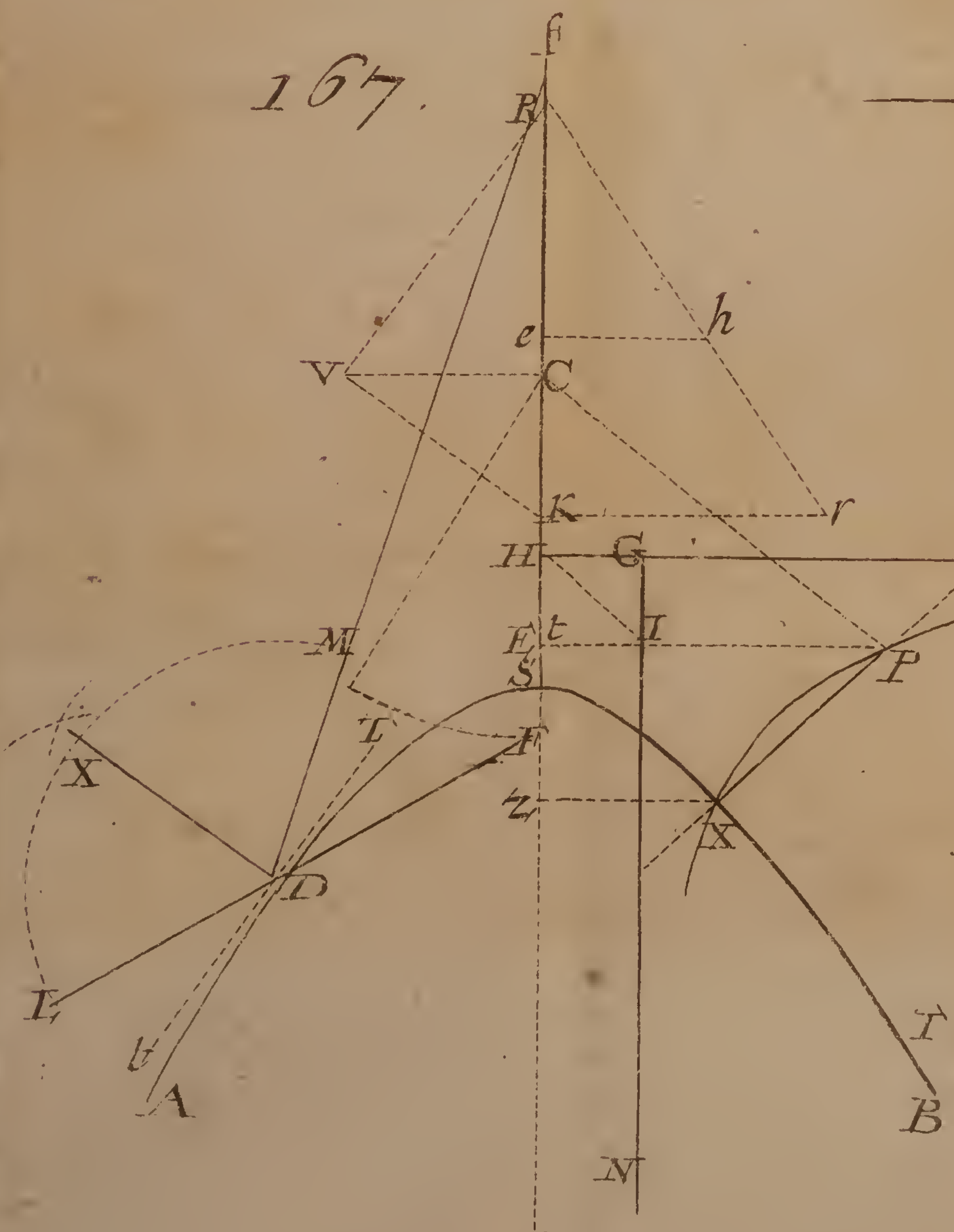
La ſeconde eſt cette Courbe du quatriéme ordre, dont nous avons parlé, qui eſt la ſection d'un Anneau, ou d'une Helice: dans celle-ci on n'a pas beſoin de faire des joins de tête réguliers, parce qu'elle n'eſt pas

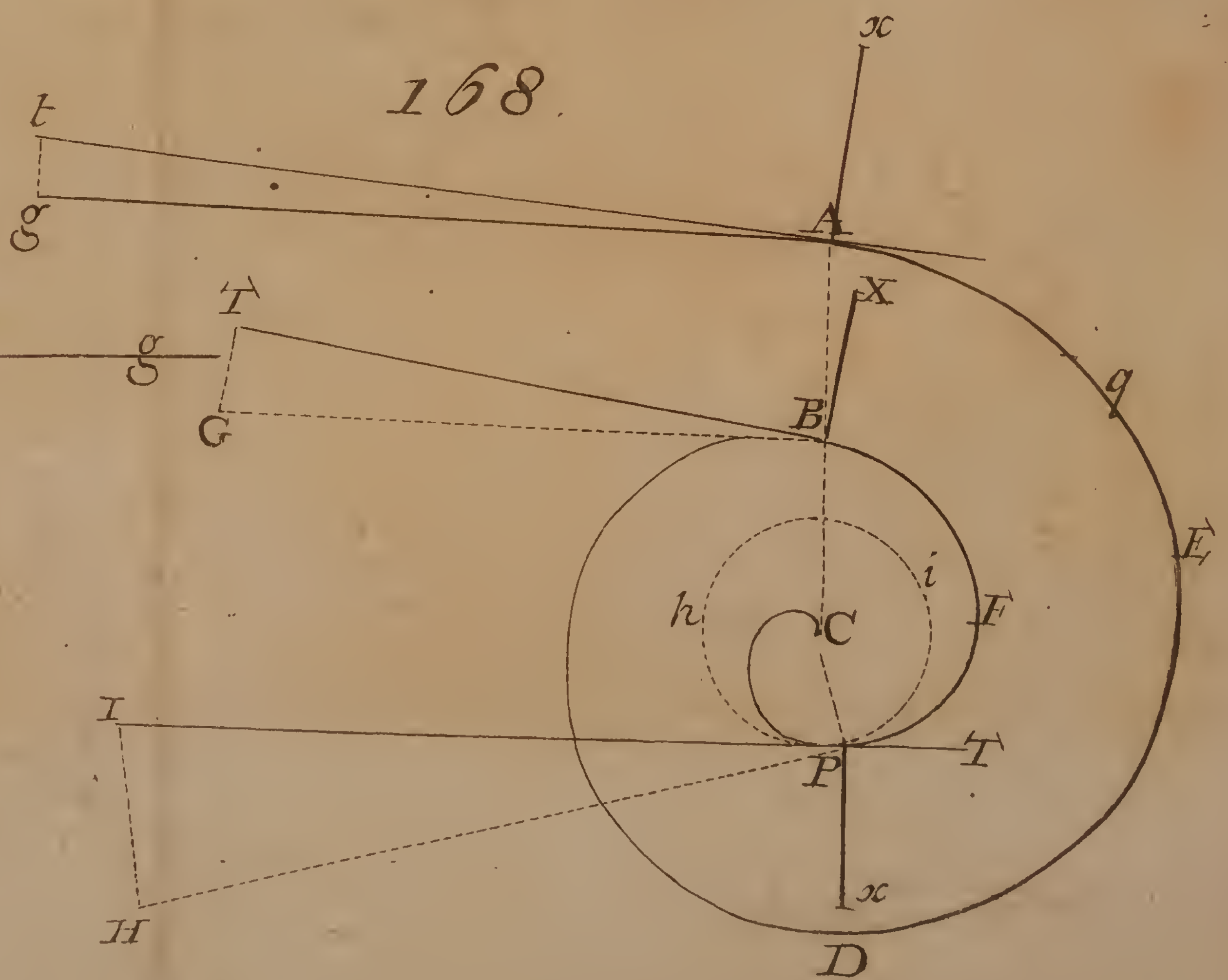

163.


164.


165.


166.


167.


168.

employée pour une face aparente, & quand elle le seroit, l'inclinaison des joins se trouveroit déterminée par celle de l'arc droit de la voute qui n'est qu'un demi cercle ou une demi-Ellipse.

La troisiéme seroit la chainette qu'on pourroit employer pour mettre l'équilibre entre les Voussoirs égaux ; mais outre qu'au lieu de cette Courbe, on pourroit se servir de la Parabole, qui en est très peu differente ; c'est que l'une & l'autre ne conviennent guére aux ceintres, si l'on a quelque égard à l'agrément de leur contour, & à celui de leur naissance à l'imposte, lorsque les piedroits sont à plomb : cependant les Curieux pourront se satisfaire sur la maniere de trouver des tangentes à la chainette, en cherchant cette solution dans les Actes de Leipsic de l'année 1691. *page* 275. ils y trouveront celle qui a été donnée par le célebre M. Bernoulli Professeur des Mathematiques à Basle, un des plus grands Hommes de notre tems : si par un hazard extraordinaire il se presentoit d'autres Courbes à diviser, on pourra s'en tirer en operant, comme sur un arc de cercle, & corrigeant à la vûë ce qui pourroit paroître défectueux.





SECONDE PARTIE
Du Second Livre.

CHAPITRE V.

De la description des Sections des Corps qui ne doivent, ou ne peuvent être décrites que sur des Surfaces Concaves ou Convexes.



LES Sections dont nous avons parlé dans la premiere Partie de ce Livre ont été considerées, comme devant être décrites sur des surfaces planes, quoiqu'elles soient originaires des surfaces courbes : il s'agit à present de les tracer sur les surfaces qui leur sont naturelles, de même que celles qui ne peuvent être décrites sur des plans, ausquels elles ne peuvent s'adapter. Cependant, parce que les points des contours de ces dernieres ne peuvent se trouver que par le secours des lignes droites qu'on ne peut chercher sur des surfaces courbes, en ce qu'elles ne sont pas à la surface du solide, mais au dedans, comme sont les Rayons, les Ordonnées & les abscisses; il a fallu avoir recours à une representation imparfaite & défigurée faite sur une surface plane par des paralleles abaissées sur cette surface de plusieurs points de la Courbe : ce qu'on a appellé *la projection*, du mot latin *projicere*, qui veut dire jetter, comme si tenant un corps en l'air, on jettoit ou laissoit tomber de chacun de ses points une goûte d'ancre sur un plancher, la suite de ces goûtes liées par une ligne continuë, donneroit une Figure qui seroit la projection de ce corps.

De la Projection.

LE mot de Projection a plusieurs significations, il peut s'appliquer à l'action de jetter, mais nous la resserons ici à la description d'un corps formée sur un plan par des perpendiculaires à ce plan, ou si l'on veut l'étendre encore d'avantage, par des paralleles menées des angles de ce

corps ou de plusieurs points de son contour sur ce plan en quelque situation qu'il soit à son égard.

Il suffit cependant à l'usage que nous en devons faire, de considerer les lignes Verticales & les Horisontales ; parce que c'est à ces deux genres de situations constantes, & que l'on peut toujours déterminer, qu'on doit rapporter les lignes inclinées à l'Horison: selon cette restriction nous pouvons dire, pour nous accommoder aux termes de l'Art, que la projection d'un corps est la trace de plusieurs *a-plombs* abaissez de leurs angles ou de leurs contours pour en faire *le plan* ou Ichnographie, ou de plusieurs lignes de niveau tirées de même de ses angles, ou de son contour sur une surface *a-plomb*, pour en faire les *Profils* ou les *Elevations*.

COROLLAIRE GENERAL.

D'où il suit que la Projection faite sur un Plan Vertical ou Horisontal, raccourcit la representation de toutes les Lignes & Surfaces qui ne sont pas paralleles au Plan sur lequel on la fait.

Pla. 16. Fig. 169.

Car soit [*Fig.* 169.] la ligne AB, dont on fait la projection sur le plan *gh*: il est évident que si cette ligne étoit dans la situation aB parallele à ce plan, les perpendiculaires aD, BF abaissées de ses extremitez seroient aussi paralleles & égales, & par conséquent que la representation DF seroit égale à aB; mais que si l'on transporte le point a en A sans mouvoir le point B, on racourcira la representation de cette ligne de la distance qu'il y aura de la perpendiculaire aD, à AE qui est égale au sinus verse aS de l'angle aBA de l'inclinaison de la ligne AB abaissée à son extremité A au dessous de la ligne Horisontale aB, si la projection se fait par des Verticales; donc la representation EF sera plus petite que la ligne AB.

On peut démontrer cette verité d'une maniere plus simple en menant AC parallele à EF, parce qu'alors on reconnoîtra que la projection d'une ligne qui n'est pas parallele au plan de description, est toûjours égale au côté d'un triangle rectangle, dont la ligne objective est l'hypotenuse; d'où nous tirons la proposition suivante, qui est fondamentale pour tracer les desseins qu'on appelle les *Epures* pour la coupe des Pierres.

THEOREME.

Les Projections des Lignes courbes qui sont dans un Plan perpendiculaire à un ou plusieurs autres Plans de description, sont des Lignes droites, dont les divisions faites par des paralleles menées par plusieurs Points de ces Courbes, sont toûjours en même proportion avec les Abscisses co-ordonnées.

Premierement il est clair que la projection d'une ligne courbe qui est *Fig.* 170.

dans un plan perpendiculaire à celui de deſcription eſt une ligne droite; car puiſque toutes les lignes menées des points de la Courbe ſur le plan de deſcription, ſont dans le même plan; on ne doit plus conſiderer que la ſection des deux plans, laquelle ſuivant la Geometrie Elementaire eſt néceſſairement une ligne droite : ainſi la projection de l'Ellipſe ABDE [*Fig.* 170.] eſt la ligne *ad* dans le plan *gh*, & la ligne *be* dans le plan *gk*, l'une *ad* eſt Horiſontale ſur le plan Horiſontal, & l'autre *be* Verticale ſur le plan Vertical; & les points c^1, & C^2 de ces deux lignes ſont la repreſentation de trois points raſſemblez en un, ſçavoir, *c* qui repreſente les points B, C, E & C^2 les points A, C, D, de ſorte que *ca* & *cd* ſont les repreſentations d'un quart ou d'une moitié d'Ellipſe; ce qui eſt viſible, & à quoi il faut s'accoûtumer pour concevoir tout ce que nous dirons dans la ſuite ſur des Figures, où nous n'exprimeront ſouvent les lignes courbes, que par des droites.

Quant à la ſeconde partie de ce Théoreme touchant le rapport des diviſions faites par des paralleles menées de pluſieurs points des Courbes; nous n'étendrons la démonſtration qu'aux ſections Coniques, qui ſont preſque les ſeules dont nous avons à faire, particulierement du cercle & de l'Ellipſe.

Fig. 171. Soit une ligne *k*L ou *be* [*Fig.* 171.] coupée par des paralleles *at*, Q*s*, P*r*, le rectangle de *a*T×T*d*: *k*T×TL : : Q*c*×*cq*: *kc*×*cl*, il en eſt de même des rectangles faits par les parties de la ligne *be* coupées par les Paralleles *at*, Q*s*, P*r*; donc les points T*cz*, ſections de lignes tirées des points *a*QP ſur la ligne *k*L donnent des diviſions ſur cette ligne qui ſont en même raport entr'elles, que celles que les mêmes points *a*QP donnent ſur la ligne *be*, quoique differemment ſitué à l'égard de l'arc *a*P de l'Ellipſe, au dedans de la Courbe.

Il ne ſera pas difficile de faire voir que le même raport ſubſiſtera à l'égard des lignes qui ſont hors de la Courbe, par exemple de *g*H, car ſi l'on mene par le point *g* une ligne *gf* parallele à *be*, il eſt évident que les diviſions *rs* & *st* ſont égales à *zn* & *nm*, mais à cauſe de paralleles *at*, Q*s*, P*r*, les triangles *gt*M, *gs*N, *gr*O ſont ſemblables; donc *rs*=*zn*: *st*=*nm* : : ON: NM : : *zc*: *c*T, donc la projection des points PQ*a*, ou *pqd*, faite par des lignes paralleles entr'elles, donne toûjours des diviſions qui ſont en même raport entr'elles, ſur les plans differemment ſituez à leur égard, ſoit au dedans, ſoit au dehors de la Courbe, & quelque angle que les lignes de projection faſſent avec ces plans; *ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire

Corollaire I.

D'ou il ſuit que la projection faite ſur des plans perpendiculaires aux paralleles de projection, n'eſt pas une repreſentation plus réguliere des objets, que celle qui eſt faite par des lignes obliques, & que cette maniere de repreſenter les corps eſt Géometrique ; puiſqu'elle conſerve toûjours un certain rapport des parties des Courbes projettées.

Corollaire II.

De-la il ſuit que ſi l'on fait la projection d'un cercle par des lignes paralleles, perpendiculaires ou obliques au plan de deſcription ; les diviſions correſpondantes des deux côtez de la ligne de projection qui paſſe par ſon centre, ſeront égales entr'elles, à cauſe de l'uniformité de cette Courbe : il en ſera de même à l'égard de l'Ellipſe, lorſque la projection ſe fera par des lignes perpendiculaires au plan de deſcription.

Ce que nous diſons du cercle & de l'Ellipſe eſt encore vrai à l'égard de la Parabole & de l'Hyperbole, lorſque les lignes de projection ſont paralleles à leurs axes.

On peut étendre ce Théoreme à d'autres courbes qu'aux Sections coniques, comme aux ſpirales, & aux Ovales faites par la ſection des corps Annulaires, dont nous avons parlé : en un mot la projection conſerve toûjours une certaine régularité de rapport, qui eſt le ſeul moyen d'adapter à une ligne droite quelques proprietez d'une ligne courbe, & d'appliquer ſur un plan les ſurfaces concaves ou convexes, ſans confuſion de leurs parties, quoiqu'elle transforme quelquefois une courbe en une autre.

THEOREME.

La Projection d'un Cercle qui n'eſt pas parallele à ſon plan de deſcription eſt une Ellipſe, & au contraire celle de l'Ellipſe peut être un Cercle ; & celle des Ellipſes, Paraboles ou Hyperboles, eſt une Courbe d'une même eſpece plus ou moins alongée.

Soit [*Fig.* 172.] le quart de cercle AEFC dans le plan AEHC, ſur lequel on fait la projection de ce même quart de cercle ſuppoſé élevé ſur ce plan en D, de l'intervale de l'arc DE, meſure de ſon angle d'inclinaiſon DAE, le Rayon AC demeurant immobile ſur le plan. Des points D & G pris à volonté à la circonference du quart de cercle, ayant abaiſſé ſur le même plan les perpendiculaires D*d*, G*g* qu'il faut ſuppoſer telles, quoiqu'elles ne le ſoient pas dans la Figure, à cauſe de la perſpective ; ſi par les points *d* & *g* on tire les droites A*d*E, B*g*F perpendiculaires *Fig.* 172.

au Rayon AC, on aura deux triangles ſemblables A*d*D, B*g*G rectangles en *d* & *g*, par la conſtruction, & dont les angles en A & B ſont égaux, puiſqu'ils ſont celui de l'inclinaiſon des deux plans des quarts de cercle DAC & EAC, donc A*d*: AD:: B*g*: BG; mais AD=AE & BG=BF; donc AE: A*d*:: BF: B*g*, c'eſt-à-dire, que les Ordonnées de la courbe ſont entr'elles comme celles du cercle; ce qui n'appartient
L. I. art. 41. qu'à l'Ellipſe,* *& qu'il falloit démontrer.*

On auroit pû démontrer la même choſe tout d'un coup en conſiderant le cercle à la ſurface d'un Cylindre ſcalene, dont la ſection perpendiculaire à l'axe eſt une Ellipſe; car les lignes de projection étant multipliées à l'infini, & paſſant à la circonference d'un cercle formeroient la ſurface d'un Cylindre.

Par ce moyen on démontre tout d'un coup la ſeconde partie de ce Théoreme, qui dit que la projection d'une Ellipſe eſt ſouvent un cercle, & ordinairement une Ellipſe plus ou moins alongée; car l'Ellipſe conſiderée à la ſurface du Cylindre Droit ſe reduit à un cercle à ſa baſe, & ſi le Cylindre eſt coupé plus ou moins obliquement, ſoit qu'il ſoit droit ou ſcalene, la ſection eſt un Ellipſe plus alongée ou plus racourcie.

La même démonſtration ſert pour la troiſiéme partie, qui dit que la projection des Paraboles & Hyperboles ſont des courbes de même eſpece, comme il a été dit au Théoreme III. qui ne different de celle qu'on veut repreſenter par la projection, qu'en ce qu'elles ſont plus ou moins alongées ou racourcies, ſuivant le plus ou moins d'obliquité de la ſection; car les lignes de projection multipliées à l'infini forment un corps cylindrique qui a pour baſe une Parabole ou une Hyperbole, c'eſt l'inverſe du Théoreme III.

Corollaire.

D'ou il ſuit que plus les lignes de projection font les angles aigus, avec le plan de la Figure qu'on veut projecter, plus la Figure ſe reſſerre; de ſorte que ſi ces lignes font un angle infiniment aigu, elles tombent dans le plan de la Figure, & la reduiſent à une ligne droite, comme nous l'avons dit ci-devant.

Usage.

L'application de cette propoſition ſe preſente tous les jours à la pratique de la coupe des Pierres & des autres ouvrages d'Architecture; car la projection, c'eſt-à-dire, en termes de l'art le *Plan* d'une porte, ſoit en plein ceintre, ſoit ſurhauſſée, ſoit ſurbaiſſée, dans un mur en Talud,

comme ſont ordinairement ceux des revêtemens des Fortifications, eſt une Ellipſe fort reſſerrée, ſuivant le plus ou le moins d'inclinaiſon du Talud, & celui d'un joint de lit d'une Niche ſpherique en Coquille eſt de même une Ellipſe qui ſe reſſerre vers la Clef, où elle devient une ligne droite, & s'ouvre vers les Impoſtes, où elle devient un arc de cercle.

Ces deux propoſitions ſont encore néceſſaires pour l'intelligence des Figures ſuivantes, & des Traits en géneral, où l'on repreſente ſouvent les cercles & les Ellipſes par des lignes droites, qui en ſont la projection, ou par des Ellipſes extrêmement reſſerrées.

De la deſcription du Cercle ſur les Surfaces concaves ou convexes de la Sphère, du Cône & du Cylindre.

Probleme XXX.

Par deux ou trois Points donnez ſur la ſurface d'une Sphère, décrire un Cercle.

On doit conſiderer la ſurface de la ſphère comme compoſée de deux Figures, l'une concave, l'autre convexe; cette difference n'eſt pas un objet pour la Théorie, où l'on n'a pas égard à l'impénetrabilité des corps; mais bien pour la pratique qui ne peut operer ſur l'une comme ſur l'autre.

Premierement s'il s'agit de décrire un cercle Majeur dans la ſurface concave; il ſuffit qu'on ait deux points donnez, pourvû qu'on connoiſſe le diametre de la ſphère, & qu'ils ne ſoient pas diametralement oppoſez; car il eſt clair par la géneration de la ſphère (*Art.* 1.) que le diametre d'un cercle devient l'axe de la ſphère, lorſqu'on le fait mouvoir autour de ce diametre; par conſéquent qu'il eſt commun à tous les cercles qui paſſent par l'axe de la ſphère.

Si les deux points donnez ſont moins éloignez que de 180. degrez, on ne peut y faire paſſer qu'un cercle Majeur, mais une infinité de cercles Mineurs de differentes grandeurs; d'où il réſulte que, pour ceux-ci, ce n'eſt pas aſſez de deux points donnez, il en faut trois, pour en déterminer la poſition & la grandeur; parce qu'il en faut chercher le diametre comme il ſuit.

Soient les trois points donnez ABE [*Fig.* 173.] dans la ſurface concave de la ſphère; on en meſurera les diſtances pour en faire à part, ſur *Fig.* 173.

une muraille ou autre ſurface plane un triangle A B E, puis par les points B & E, on tirera aux lignes A E, A B des perpendiculaires B *d*, E *d* qui ſe rencontreront au point *d*, ſi par ce point *d* & l'oppoſé A, on tire une ligne A *d*, elle ſera le diametre qu'on cherche.

Corollaire.

De cette méthode on tire celle de trouver le diametre d'une ſphère;
Fig. 175. car ſi avec un cordeau de longueur arbitraire, & d'un point P pris à volonté pour Pole, on décrit un cercle ſur la ſurface concave, en ayant trouvé le diametre par la pratique précedente, on fera un triangle Iſoſcele de la longueur du diametre A E pour baſe, & des deux longueurs du cordeau A P, E P pour côtez, leſquels on fera aux points A & E, deux perpendiculaires qui ſe rencontreront au point D: la ligne P D ſera le diametre de la ſphère qu'on cherche; cela ſuppoſé pour décrire un cercle Majeur par les deux points donnez A & B, [*Fig.* 173.] il faut tracer
Fig. 174. à part ſur une ſurface plane un quart de cercle, [*Fig.* 174.] ou ce qui eſt la même choſe un triangle Rectangle Iſoſcele, dont les jambes a *c*, *p c* ſoient égales au Rayon de la ſphère, l'Hypotenuſe *a p* ſera la corde d'un arc de 90. degrez qui ſervira à trouver le Pole du cercle propoſé.

Fig. 173. Des points A & B comme centres, & la corde *a p* pour Rayon, on fera une interſection de deux arcs de cercles qui ſe couperont en P, où ſera le Pole, duquel on décrira le cercle Majeur E A B F, qui eſt répreſenté ici en Perſpective, c'eſt-à-dire, qu'on y fixera le cordeau, une perche ou un ſimbleau, pour tracer le cercle dans la ſurface concave de la ſphère à peu près comme on ſe ſert du centre ſur une ſurface plane.

J'ay dit dans la ſurface concave, parce qu'il eſt viſible qu'on ne peut pas operer de même ſur la Convexe, ſur laquelle au lieu de ſe ſervir de la corde *a*B pour Rayon des interſections qui donnent le Pole; il faut ſe ſervir de l'arc *a*L*p*; c'eſt pourquoi il faut un inſtrument pour y ſuppléer, ou un compas à pointes courbées, ſi la ſphère eſt petite comme ſont dans l'Artillerie les Boulets & les Bombes; mais ſi la ſphère eſt grande comme une voute, au lieu d'un cordeau, il faut ſe ſervir d'un aſſemblage de trois pieces de bois *p*H, H*g*, *g a* aſſemblées à angle droit, dont la grande H*g* ſoit égale à la corde *p a*, & les deux autres à la fleche *f*L; & pour les entretenir en cet état, il faut les lier par des liens ou écharpes I K, *i k*, qui les empêchent de s'ouvrir ou de ſe fermer.

Pour trouver le Pole d'un cercle mineur, dont on a trois points don-
Fig. 175. nez [*Fig.* 175.] on décrira ſur une ſurface plane par le moyen du triangle A B E le cercle A E *d*, puis ayant diviſé l'arc B E en deux également en *m*, on tirera le diametre *m t* perpendiculairement à B E, ſur le milieu

c, duquel on menera la perpendiculaire X*cx*, puis du point *m* ou *t*, pour centre, & de l'intervale du demi diametre de la ſphère pour Rayon, on décrira des arcs de cercle qui couperont la perpendiculaire X*x* aux points *x* & X, où ſeront les Poles du cercle mineur ABE*d* que l'on cherche; ainſi les diſtances X*m*, ou *x t* ſeront les Rayons des interſections des arcs de cercle qu'on fera des points B & E, comme centres pour avoir le point d'un des Poles, comme nous l'avons dit ſur la Figure 173.

Ou bien méchaniquement & avec une exactitude ſuffiſante pour la pratique, on enfilera trois cordeaux égaux dans un Anneau *Fig.* 173. en S pour la ſurface convexe, & en P pour la concave, qui ſeront d'une longueur proportionnée à peu près à celle qu'on juge à vûë d'œil, & un peu plus longue; on les noüra enſemble par un bout, & on attachera les autres aux points donnez, puis faiſant couler l'Anneau, en raprochant de la ſurface de la ſphère les trois cordeaux également tendus, on parviendra exactement au Pole, où on attachera un des cordeaux pour tracer le cercle demandé ſur la ſurface de la ſphère. Cette méthode a cela de commode qu'elle peut ſervir ſur la ſurface convexe, en éloignant l'Anneau au deſſus du Pole autant qu'on le voudra, pour éviter le frottement du cordeau qui ſert de ſimbleau, lequel doit être tangent à la ſphère, pour n'être point plié ſur la ſurface convexe, où ce pli, ou plûtôt cette courbure cauſeroit des ondulations par le frottement.

Mais ſi on avoit un cercle Majeur à décrire comme les ſocles ou les côtez d'une couverture de Dome, tels qu'on en voit à celui des Invalides; on ne pourroit aſſez élever le point S pour éviter le frottement, c'eſt pourquoi il faut ſe ſervir du niveau ou du plomb; ſi les Cherches doivent être de niveau comme les ſocles, ou à plomb comme les côtes, ou ſi de tels ornemens étoient inclinez, comme des entrelas de cercles, il faudroit avoir, au Pole, une perche perpendiculaire à la ſurface convexe par la pratique dont nous parlons, qui ſerviroit à aligner le cordeau, afin qu'en le courbant, il ne ſe detournât point de ſa direction; parce que pour peu qu'il ſe courbe à droite ou à gauche, il ſe racourcira & donnera de faux points du cercle propoſé.

DEMONSTRATION.

Premierement il eſt clair qu'ayant trouvé la corde de 90. degrez de la circonference de la ſphère, & l'ayant appliquée aux deux points donnez, la rencontre de deux de ces cordes égales eſt le Pole qui eſt toûjours éloigné de 90. degrez d'un grand cercle, par la 16.e propoſition des Sphériques de Theodose. *Fig.* 174.

Secondement pour trouver le diametre d'un cercle, dont on a trois points donnez, nous avons élevé des perpendiculaires ſur AB & AE pour avoir

la poſition de ce diametre ; parce que (par la 31.e Prop. d'Eucl. l. 3.) l'angle droit eſt toûjours dans le demi cercle, & puiſque les lignes B*d* & E*d* ſont bien poſées, leur rencontre ſe terminera au point de la circonference du cercle diametralement oppoſé au point A : la même conſtruction eſt encore plus intelligible dans le Corollaire pour trouver le diametre de la ſphère.

Troiſiémement il eſt démontré dans la 13.e propoſition des Sphèriques de Theodose, que ſi dans la ſphère un cercle en coupe un autre en deux également & perpendiculairement, les Poles de celui qui eſt coupé, ſont dans la circonference de celui qui le coupe, & à diſtances égales; or il eſt viſible que le cercle Mineur ABE*d* eſt coupé en deux également par ſon diametre *mt*, lequel eſt la corde d'un cercle Majeur, dont le diametre X*x* eſt élevé perpendiculairement ſur cette corde ; par conſéquent les points X & *x* ſont les Poles du cercle ABE*d*, & les lignes X*m*, X*t*, *xm* & *xt*, les diſtances ſont de ces Poles au cercle; car quoique les deux cercles Majeur & Mineur ſoient dans cette Figure ſur un même plan, il faut les concevoir à angle droit l'un à l'autre; de ſorte que ſuppoſant le Mineur dans le plan du papier, le Majeur ſeroit élevé en l'air perpendiculairement en tournant ſur la corde *mt*, qui doit être immobile.

USAGE.

Ce Problême eſt néceſſaire aux Peintres, aux Sculpteurs en Stuc ou en Platre, & aux Marbriers qui ont des ornemens Circulaires à tracer dans la ſurface concave d'une voute Sphèrique, ou ſur la ſurface convexe, comme par exemple des Socles, des côtes d'arcs doubleaux, des bordures de bas relief, ou des ouvertures feintes, ou des entrelas Circulaires.

A l'égard des ouvertures vrayes ou feintes faites après coup dans une voute Sphèrique; je dirai en paſſant que Viviani *a trouvé le moyen de percer une voute Hemiſphèrique en quatre endroits pour des Fenêtres, en ſorte que le reſte de la voute ſoit géometriquement quarrable.*

Quoique cette propoſition n'ait aucun rapport à notre ſujet qui n'a pour but que la diviſion des ſurfaces & non pas leur étenduë; je crois qu'on ne ſera pas fâché de cette petite digreſſion : la conſtruction de ce Problême conſiſte à diviſer la baſe de l'Hémiſphère par deux diametres à angles droits, ſur leſquels ont fait quatre petits demi-cercles pour baſes de quatre moitiez de Cylindres droits, qui percent l'Hémiſphère ; le reſtant des quatre ouvertures qu'ils font, eſt quarrable, c'eſt-à-dire, qu'on en peut trouver la ſurface géometriquement; on a vû par nos Principes au Théoreme VII. que la Courbe que font chacun de ces demi-Cylindres étoit une Ellipſimbre; il ne s'agiroit plus que de quarrer l'eſpace enfermé

dans ces Ellipsimbres pour avoir la surface totale de l'Hémisphère. Mais quoique la Géometrie ne soit pas parvenuë à ce degré de perfection, elle nous fournit pour la pratique des moyens suffisamment exacts.

PROBLEME XXXI.

Par un Point donné sur la Surface d'un Cylindre, tracer un Cercle.

Si le Cylindre est droit, & que la base soit donnée, il n'y a point de difficulté; il n'y a qu'à suivre le contour de la base à distance égale prise toûjours parallelement à l'axe, soit avec une Régle ou un cordeau ou en petit, avec cet instrument de Menusier qu'on appelle *Trusquin*; mais si l'on n'a pas la base, ou parce qu'elle est oblique ou rompuë, ou embarrassée par quelque corps qui la couvre, comme si l'on vouloit tracer un ornement circulaire, tel qu'une base ou une astragale à un Pilier Gotique en place; il faut commencer par mener plusieurs paralleles à l'axe, & tracer le cercle, s'il est question d'un Cylindre Scalene, comme une Ellipse sur un Cylindre droit, ainsi que nous le dirons ci-après; nous parlerons seulement ici du Cylindre droit.

Premiere maniere de tracer des paralleles à l'axe du Cylindre, *la Base étant donnée.*

Soit une base droite ou oblique ABDE ayant aplani cette base, on y menera deux lignes gG, fF paralleles entr'elles, qu'on divisera en deux également en M & m, par où si l'on tire la ligne BE, son milieu C sera l'extremité de l'axe du Cylindre: on en fera autant sur la base opposée pour trouver l'autre extremité du même axe; ensuite ayant posé une Régle HI à volonté sur cette base, pourvû qu'elle passe par le pied C de l'axe, on tracera la ligne AD: posant aussi une autre Régle KL sur la base opposée, on la fera tourner sur l'extremité de l'axe, jusqu'à ce que regardant l'une par l'autre, leur direction soit parallele; en sorte que celle du côté où l'on regarde couvre si bien l'autre, que les deux lignes superieures ou inferieures de ces Régles se confondent en une, ce qu'une personne seule peut faire en arrêtant une des Régles dans sa position, & tenant l'autre pour la tourner, comme il convient; pour faire en sorte que le Rayon visuel rase les deux Régles, de maniere qu'elles ne paroissent point se croiser, ce qu'on appelle *bornoyer*; parce que l'on ferme ordinairement un œil, & que nous avons exprimé par des lignes qui partent d'un œil *œ* à la Figure 177. en cette situation si on trace des diametres sur les bases, la ligne menée à la surface du Cylindre par l'extremité de ces diametres ainsi correspondans, est une parallele à l'axe du Cylindre. *Fig.* 177.

Lorsque les bases sont embarrassées comme à un Pilier en place, qui

eſt engagé par le haut & par le bas, on eſt obligé d'avoir recours à des manieres méchaniques pour tracer des paralleles à l'axe.

La premiere & la plus ſimple, eſt celle de ſe ſervir du plomb pour les Cylindres poſez bien verticalement comme des Piliers ronds, & s'ils ſont inclinez, c'eſt d'appliquer de *Champ* une Régle fort large O P, & dont les côtez oppoſez ſont bien paralleles, le long du Pilier, & la tourner de maniere qu'en regardant par deſſus cette Régle, elle ne croiſe point la ligne tangente du Pilier; en ſorte que les Rayons viſuels *æ*O, *æ*P raſent l'un & l'autre, la ſurface du Pilier; la ligne tracée ſur la même ſurface cylindrique au long du côté de la Régle qui appuye ſur le Cylindre, eſt une parallele à l'axe.

Fig. 176. La ſeconde maniere qui eſt encore méchanique, eſt de tracer avec un compas d'un point C pour centre, & d'une ouverture priſe à volonté une ligne courbe *d*E*e*, ſur la ſurface du Cylindre, comme l'on décrit un cercle ſur une ſurface plane; enſuite d'une ouverture de compas un peu plus grande que la premiere, mais moindre que la longueur de l'arc de Cylindre, dont elle eſt la corde developé, c'eſt-à-dire rectifié, on décrira ſur du Carton un demi cercle, ou ſeulement un ſecteur de cercle qui en approche, dont on poſera le centre en C, & l'ayant appliqué & plié ſur la ſurface du Cylindre, on y en tracera le contour qui coupera celui de la Courbe précedente en deux points X & *x*, par leſquels ſi l'on tire une ligne droite, on aura la parallele à l'axe qu'on cherche; à laquelle il ſera facile d'en tirer d'autres par des points donnez, s'il le faut. On peut faire la même choſe avec un cordeau, mais moins exactement; cela ſuppoſé comme une preparation néceſſaire pour tracer les cercles & les Ellipſes à la ſurface du Cylindre.

Fig. 176. Si le Cylindre eſt Droit, il ne s'agit que de faire des ſections perpendiculaires aux lignes paralleles à l'axe: ainſi on prendra à volonté les points *x* & X pour centres, & de tel intervale qu'on voudra pour Rayon, on fera des interſections d'arc en H & en K, & plus loin en *h* & en *k*, ou plus près en *l* & *i*, & l'on appliquera ſur ces points *k*K, *li*, H*h* une Régle pliante, avec laquelle on tracera le cercle autour du Cylindre, s'il eſt droit; car s'il eſt ſcalene, la ſection perpendiculaire à l'axe ſera une Ellipſe, auquel cas, pour décrire un cercle par le point donné, il faut mener par ce point un contour parallele à la baſe, ou faiſant une angle ſous contraire.

Pour tracer des lignes paralleles à l'axe dans la ſurface concave d'une
Fig. 180. portion de Cylindre, comme dans une voute [*Fig.* 180.] au lieu de prendre deux paralleles des deux côtez du centre, on les prendra toutes deux du même côté, comme *af*, *be*; on les diviſera chacune par le milieu en

M & *m*,

M & *m*, & on menera par ces milieux la ligne *d*C qui ſera un diametre; mais parce que le Cylindre n'eſt pas complet, ce diametre ne ſera terminé que d'un côté en *d*, & ne l'étant pas au delà de C, on ne pourra en avoir le milieu C, qu'en répetant la même operation par deux autres lignes *ib*, *kg* qui donneront un ſecond diametre E*c* qui coupera le premier en C, centre de la baſe, où paſſera l'axe du Cylindre. On en fera autant à la baſe oppoſée, & l'on aura l'autre extremité de cet axe, auquel il ne ſera pas difficile de mener des paralleles, en tendant un cordeau d'un bout de l'axe à l'autre, & bornoyant par cette ligne deux points dans la ſurface concave; de ſorte que cet axe ſoit dans le même plan, & que le cordeau les couvre à l'œil qui doit être un peu éloigné du cordeau, du côté oppoſé aux points que l'on veut marquer ſur la ſurface concave, pour y tracer une parallele à l'axe du Cylindre.

Demonstration.

La premiere maniere de tracer une parallele à l'axe du Cylindre eſt fondée ſur ce que les Ordonnées à un diametre ſont coupées en deux également par ce diametre; lequel étant auſſi diviſé en deux également, donne le centre de la baſe du Cylindre, ſoit qu'elle ſoit Circulaire ou Elliptique; or quelle qu'elle ſoit, l'axe paſſe par ſon centre, & les deux Régles HI, KL que l'on dirige par le Rayon viſuel dans le même plan *Fig.* 177. paſſant par l'axe, donnent auſſi les côtez du Parallelograme par l'axe, dont les côtez oppoſez ſont paralleles; donc D*d* eſt une ligne parallele à l'axe, *ce qu'il falloit faire.*

La ſeconde maniere de tracer une parallele à l'axe du Cylindre par le moyen d'une Régle d'une certaine largeur, quoique méchanique, eſt exacte dans ſon principe; car puiſqu'elle eſt dirigée par les Rayons viſuels dans un plan tangent au Cylindre, ce plan ne le touchera que ſuivant une ligne parallele à l'axe, & le plan de la Régle étant de largeur égale d'un bout à l'autre, fera un Parallelograme, dont un côté ſera ſur le plan tangent, & l'autre ſur le Cylindre, toûjours également éloigné de la ligne d'attouchement; donc il lui ſera parallele, & par conſéquent à l'axe.

La troiſiéme maniere, quoique méchanique eſt auſſi exacte dans ſon principe; on trace ſur le Cylindre deux Courbes à double courbure *d*E*e*, *Fig.* 176. *m*MB de differente nature, qui ne peuvent ſe rencontrer qu'en quatre points, ſçavoir deux de chaque côté en X*x* d'une ſection par l'axe AFG, celle de ces courbes qui eſt tracée avec le compas, a tous ſes diametres paſſans par le centre C, courbes de courbures inégales, à la reſerve de *de* qui eſt droit, & de contour inégalement long, qui ont cependant des

foustendantes toûjours égales, lesquelles sont les lignes droites, qu'on imagine passer par les deux points du compas; & au contraire celle qui est tracée avec un cercle plié, a tous ses diametres de contour également long, & toutes les foustendantes inégales. Chacune de ces courbes a un diametre droit qui leur est commun sur le côté AB, & un circulaire qui lui est perpendiculaire, sçavoir CE dans la premiere, & CM pour la seconde; tous les autres sont Elliptiques, dont la courbure se redresse à mesure qu'ils approchent de AB; de sorte qu'étant tous inégaux de chaque côté, ils ne peuvent aboutir au même point, que lorsqu'ils approchent également de ce diametre droit, qui est le côté du Cylindre, comme en X & *x*, donc la ligne X*x* est parallele au côté, & par conséquent à l'axe, *ce qu'il falloit faire.*

Quant à la maniere de tracer le cercle sur la surface du Cylindre, il est clair que l'on suppose que le Cylindre soit droit; parce que les points K*i*, *g*H étant chacun également éloignez des points *x*X, sont dans un même plan perpendiculaire au côté *x*X du Cylindre, par conséquent à son axe, auquel ce côté est essentiellement parallele.

D'ou il résulte une section parallele à la base, c'est-à-dire, un cercle.

Mais aussi il est clair que si le Cylindre étoit scalene, cette section perpendiculaire au côté seroit une Ellipse qui ne seroit point parallele à la base; ainsi pour décrire un cercle à la surface d'un Cylindre scalene, il faut en avoir la base, tirer des paralleles à l'axe sur la surface, c'est-à-dire plusieurs côtez, & porter sur chacun de ces côtez la même distance du point donné au contour de la base, pour avoir autant de points que l'on a de côtez: mais alors on ne peut plus se servir de la Régle pliante posée de plat pour tracer le cercle, parce que la direction de son pli se tourne perpendiculairement au côté du Cylindre, au lieu que celle du contour du cercle le coupe obliquement d'un angle égal à celui que l'axe fait avec le plan de la base: mais on peut s'en servir en la posant de *Cant*, c'est-à-dire, sur son épaisseur appliquée sur ces points trouvez; parce que l'Ellipse est une courbe plane, & qu'une Régle d'une largeur beaucoup plus grande que son épaisseur étant pliée, se dirige facilement sur un plan; il n'en seroit pas de même s'il s'agissoit d'une courbe à double courbure, il faudroit alors que l'épaisseur fût égale à la largeur, afin qu'elle ne fit pas plus de resistance à se plier d'un côté que de l'autre.

Enfin la derniere operation pour tirer des paralleles à l'axe dans une surface concave de portion de Cylindre, est la même que la premiere redoublée; parce que le centre de la section étant dans chaque diametre, il sera dans le point de concours des deux, où ils se croisent.

USAGE.

Ce Problême eſt un des fondamentaux de la conſtruction des voutes Cylindriques, parce qu'il ſert à trouver l'Arc-droit des Berceaux circulaires ou Elliptiques, ou pour le ceintre entier, ou pour une petite portion, telle qu'eſt un Vouſſoir, pour y poſer la *Cerche*, c'eſt-à-dire, le modele de la Courbe, lequel doit être preſenté perpendiculairement à une ligne parallele à l'axe; car pour peu que cette ligne lui fût inclinée, le modele de la Courbe circulaire ou Elliptique marqueroit une concavité ou une convexité; laquelle étant continuée, ſuivant la direction d'une ligne qui croiſeroit la direction de l'axe, donneroit une ſurface differente de celle qu'on ſe propoſe, comme on peut l'appercevoir par la difference de la ſection du plan qui paſſeroit par cette Courbe.

Ce Problême peut encore ſervir à tracer ſur une doele de Berceau des ornemens de Peinture ou de Stuc, comme des Arcs-doubleaux.

La maniere de faire des paralleles à l'axe, peut être employée au même uſage, par exemple à diriger une corniche dans un Berceau Rampant, dont la régularité de l'impoſte ſeroit douteuſe; ce qu'on a ſouvent lieu d'examiner à cauſe du peu d'exactitude des Ouvriers dans les voutes, même les plus ſimples.

Enfin ce Problême eſt néceſſaire pour la conſtruction de ceux qui ſuivent.

Probleme XXXII.

Par un Point donné à la Surface d'un Cône, faire paſſer un Cercle.

Premier cas, Lorſque le Cône eſt droit, & que le ſommet eſt donné; il ne s'agit que de fixer un cordeau ou une Régle au ſommet, & de ce point comme Pole décrire un cercle, en tournant ſur la ſurface concave ou convexe, cela eſt très ſimple.

2.° Mais ſi le ſommet n'eſt pas donné comme dans un Cône tronqué, il faut tirer ſur la ſurface du Cône deux lignes droites, c'eſt-à-dire, deux côtez, leſquels étant prolongez, ſe rencontreront au ſommet du Cône.

Pour tirer ces côtez, il ſuffit d'appliquer une Régle bien droite ſur la ſurface du Cône, en ſorte qu'elle ne laiſſe point de jour entr'elle & cette ſurface: ſi cependant le Cône tronqué étoit d'une grande circonference, on pourroit s'y tromper; parce que la ſurface étant d'une convexité peu ſenſible vers la baſe ſur-tout, on pourroit biaiſer la Régle ſans s'en appercevoir; c'eſt pourquoi ſi l'on veut operer exactement, il faut tirer des paralleles ſur les plans des baſes oppoſées, que nous ſuppoſons premierement paralleles entr'elles, & faire pour cette eſpece de

Cône tronqué la même operation que nous avons faite à la Figure 177. pour trouver le côté du Cylindre; alors on sera sûr que la rencontre des côtez du Cône trouvez par ce moyen, en donnera exactement le sommet, si l'on veut s'en servir, mais on peut s'en passer; car ayant trouvé deux côtez du triangle par l'axe du Cône qui divise les deux bases en deux parties égales; on subdivisera chacune de ces parties en un même nombre de parties égales, & l'on tirera des lignes droites des unes aux autres, à la base superieure & inferieure, comme l'on voit à la Figure 186. & la distance du point donné à la surface du Cône prise de l'une des bases, & portée sur chacune de ces lignes ou côtez du Cône donnera des points, par lesquels on menera à la main une ligne courbe, qui sera le cercle demandé.

Il faut remarquer ici qu'on ne peut pas se servir pour le tracer d'une Régle pliante posée de plat, parce que la surface de la largeur s'appliquant perpendiculairement au côté du Cône, la direction de son pli donneroit une Courbe qui s'écarteroit des points marquez, pouvant être une Ellipse, une Parabole ou une Hyperbole, suivant l'ouverture de l'angle du sommet du triangle par l'axe; ce qui est clair, mais on peut s'en servir en la posant de *cant* ou de champ; on se sert encore de la Régle d'une autre maniere, on bornoye par son côté deux ou trois points, suivant lesquels on la tient appuyée d'un côté, & en l'air par l'autre, puis fermant un œil, on suit avec le crayon l'alignement de cette Régle, sans changer l'œil de place.

Si les bases opposées du Cône tronqué ne sont pas paralleles, il est clair que l'une étant circulaire, l'autre sera Elliptique, & que c'est de la circulaire qu'il faut prendre les mesures de la distance du point donné.

Mais supposant que la base circulaire est seule plane, & que la partie tronquée n'est pas aplanie, on peut encore tracer les côtez sur la surface du Cône en prenant des points à son contour équidistans d'un 3.e, au milieu des deux, & de ces points comme centres, faire des intersections d'arcs, comme si on elevoit une perpendiculaire sur une surface plane, & sur les côtez ainsi trouvez, tracer le cercle par le point demandé, comme nous venons de le dire.

Troisiéme cas, Lorsque le Cône est scalene, quand même son sommet seroit donné, on ne peut plus s'en servir comme d'un Pole pour tracer le cercle par le point donné, ni de la distance du point donné à la surface mesurée sur un côté jusqu'à la circonference de la base; parce que le contour du cercle parallele à la base, est inégalement distant de celui de la base, quoique les plans de l'un & de l'autre soient supposez paralleles, & par conséquent équidistans.

Il faut alors [*Fig.* 179.] abaiſſer une perpendiculaire S P du ſommet S du Cône ſcalene donné A S B ſur le plan de ſa baſe A B prolongé ; ce qui eſt une operation familiere à ceux qui ſçavent bien faire des Cadrans pour trouver le pied du ſtile, & qui eſt un Problême du XI. Livre d'Euclide, Prop. XI. Ceux qui ne ſont pas Geometres, le font par le moyen d'un Equerre qu'ils poſent d'un côté ſur le plan, & appuyent l'autre au ſommet S, & en la tournant ſur le côté S P marquent le point P, par lequel ſi l'on tire une ligne par le centre C, on aura le triangle rectangle A P S, & par conſéquent l'obliquangle A B S, qui eſt la plus oblique de toutes les ſections par l'axe du Cône, c'eſt-à-dire, qui en marque le plus long côté A S, & le plus petit B S. *Fig.* 179.

Ayant décrit ce triangle ſur une ſurface plane, & le demi cercle A 2 B moitié de la baſe du Cône, on le diviſera en autant de parties qu'on voudra avoir de points du cercle demandé, comme ici en quatre, aux points 1, 2, 3, d'où l'on tirera des perpendiculaires ſur le diametre A B, qui le couperont aux points E C G, deſquels on tirera des lignes au ſommet S ; puis par le point donné D ou *d*, s'il eſt dans ce triangle A S B, on tirera une ligne D *d* parallele à A B, & s'il n'y eſt pas, nous verrons par la ſuite de l'operation ce qu'il faut faire pour tirer cette parallele.

Du point E pour centre & pour Rayon E S, on fera un arc S *h* qui coupera A B prolongée en *h*, d'où l'on tirera au point 1. la ligne 1 *h* qui ſera le côté du Cône paſſant par le point 1. on trouvera de même les côtez 2K, & 3L qui aboutiront en *bkl*, à differens points donnez ſur A B prolongée par la tranſpoſition des lignes C S & G S.

Ensuite du point E pour centre & pour Rayon E *e*, où E S coupe D *d*, on fera un arc *ef*, qui donnera ſur A B le point *f* ; la ligne *fx* menée parallelement à E 1. donnera ſur le côté 1 *h* le point *x* que l'on cherche, qui eſt un de ceux de la circonference du cercle demandé, pris ſur le côté 1 *h*, dont la projection eſt E S dans le triangle par l'axe A S B ; le Rayon C *m* donnera un point auprès de G, d'où tirant G *y* parallele à C 2, on aura le point *y*, ainſi des autres.

Si le point donné D n'eſt pas ſur les côtez du triangle par l'axe A S B, mais qu'il ſoit par exemple en *g* ; ayant tiré par le ſommet du Cône le côté S *g*, il coupera la baſe au point 3. d'où ayant trouvé le côté 3 *l*, on portera ſur ce côté la diſtance donnée 3 *z* égale à 3 *g* pris ſur la ſurface du Cône ; puis de *z* tirant *zb* perpendiculaire ſur A B prolongé, la diſtance G *b* donnera ſur G S le point *g* par où doit paſſer la parallele D *d*, pour trouver les points de la circonference du cercle demandé, comme nous venons de le dire.

Il n'eſt pas néceſſaire de parler ici du cercle de la ſection ſous-contraire, parce qu'il eſt aiſé d'y ſupléer, en faiſant attention qu'au lieu d'operer ſur la ligne D*d* parallele à la ligne AB, il faut tracer une autre ligne NB, ou ſur une de ſes paralleles qui faſſe avec SA un angle égal à l'angle SBA.

Demonstration.

Il eſt clair par la nature du Cône que l'on ne peut trouver de lignes droite à la ſurface, que celles qui ſont menées du ſommet à la circonference de ſa baſe, que toutes ces lignes ſont égales dans le Cône Droit, & inégales dans le Scalene; que lorſqu'elles ſont égales, qui en a une, les a toutes; mais que lorſqu'elles ſont inégales, on ne peut les trouver par la projection ſur le triangle par l'axe ASB, comme on a trouvé ci-devant les côtez du Cylindre ſur le Parallelograme par l'axe, parce que les lignes ES, CS, GS, ſont les côtez d'un triangle rectangle, dont le côté du Cône qui leur répond, eſt l'hypotenuſe: or il eſt clair qu'en tranſportant, par exemple, ES en E*b*, le côté E 1 reſtant immobile à angle droit ſur AB, la ligne 1*b* repreſente exactement le côté du Cône, & 1*x* la diſtance de la baſe à une ſection parallele faite par un plan perpendiculaire au triangle par l'axe ASB, & parallele à la baſe.

Que les angles SE1, SC2, SG3 ſoient droits, c'eſt une ſuite de la conſtruction; parce que le plan du triangle par l'axe ASB paſſe par la ligne SP qui a été faite perpendiculaire au plan de la baſe AB; c'eſt-à-dire, du demi cercle A2B; par conſéquent toutes les lignes E1, C2, G3 perpendiculaires à la commune ſection AP de ces deux plans ſont perpendiculaires à toutes celles qui ſont tirées dans le plan ASP, comme SE, SC, SG, &c.

Nous avons ſuppoſé dans ce Problême que le Cône étoit Droit, ou incliné ſur une baſe circulaire; mais ſi l'on n'avoit qu'une baſe Elliptique, & qu'on voulût tracer un cercle ſur le Cône, il faudroit chercher l'angle de l'inclinaiſon d'un plan coupant celui de la baſe, dont la ſection fût un cercle, pour avoir le Profil du triangle par l'axe du Cône Elliptique. Comme cette propoſition n'a été donnée par aucun des Auteurs des Traitez des Sections coniques que je connoiſſe, & que j'y ai trouvé de grandes difficultez; j'ai eu recours au Celebre M. Bernoulli un des premiers Mathematiciens de notre Siecle, qui a bien voulu m'en donner la ſolution; il eſt convenu que ce Problême étoit du nombre de ceux qui, „ quand on ne s'y prend pas bien, engagent dans un calcul penible, & „ conduiſent à des équations de quatre dimentions, & que la ſolution „ étoit une choſe nouvelle.

Ce grand Homme qui a le bonheur d'avoir un Fils qui marche à grand

pas sur ses traces dans les hautes Sciences, comme il a paru depuis peu par la piece de sa façon, qui a remporté le prix de l'Academie des Sciences de Paris, lui ayant parlé de ma Question; le digne Fils la résolu d'une autre maniere, dont il a bien voulu me faire part. On la verra à la suite de celle de M. son Pere, que je mets ici mot à mot, persuadé que ce qui vient des grands Hommes doit être conservé sans alteration; dans cette idée j'aurois copié en entier la Lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire, s'il n'y avoit répandu des expressions si obligantes sur mon Ouvrage, que je ne pourrois les répeter sans pecher contre la modestie: il n'en falloit pas moins pour me faire suprimer les marques de sa politesse, & celles de la bienveüillance, dont il m'honore, à laquelle je suis extrêmement sensible.

PROBLEME XXXIII.

Etant donné un Cône ASB, Droit sur une Base Elliptique ADB, dont AB est le petit Axe, dont le Plan doit être conçû perpendiculaire au Plan du triangle Isoscele ASB; on demande la position d'un Plan incliné sur l'Ellipse, dont la section dans le Cône soit un Cercle. *Figur.* † *près de* 182

1.° J'APELLERAI le *grand côté* du Cône Elliptique la droite SD, (ou S*d*) tirée du sommet S à l'extremité D du grand demi axe de l'Ellipse, dont le plan doit être consideré comme perpendiculaire au plan du triangle Isoscele ASB.

DEFINITIONS.

2.° *Le petit côté* du Cône sera SA tirée du sommet S à l'extremité A du petit axe de l'Ellipse.

Soient nommées

LA hauteur ou l'axe du Cône SC	$= a$
LE petit demi axe de l'Ellipse CA ou CB	$= b$
LE grand demi axe de l'Ellipse CD	$= c$

LE grand côté du Cône SD $= \sqrt{cc + aa} = n$, la difference du quarré de CD, & du quarré de CA, c'est-à-dire, $cc - bb = hh$, & partant $\sqrt{cc - bb} = h$, pour faire une ligne droite égale à h on a $\sqrt{cc - bb}$, il n'y a qu'à décrire un demi cercle sur CD, & y inscrire la corde Ca égale à CA, tirant ensuite l'autre corde Da, on aura D$a = \sqrt{cc - bb} = h$: ou bien dans l'angle droit ACD, tirez une hypotenuse AF égale à CD, on aura CF $= \sqrt{cc - bb} = h$: notez que le point F sera un des Foyers de l'Ellipse.

Solution, le plan de l'Ellipse ADB étant perpendiculaire au plan du triangle ASB, je cherche la position d'une ligne droite yY dans le trian-

gle Isoscele ASB, laquelle passe par le centre C de l'Ellipse, & sur laquelle si on dresse un plan aussi perpendiculaire au plan ASB, je veux que ce plan dressé fasse dans le Cône par sa section un cercle, dont le diametre sera yY, & CD une Ordonnée commune à l'Ellipse & au cercle; parce que le plan de l'Ellipse & le plan du cercle se coupent dans la droite CD: il faudra donc par la proprieté du cercle que CD soit la moyenne proportionelle entre les deux segmens du diametre Cy & CY, & partant que le rectangle $Cy \times CY$ de ces deux segmens soit égal au quarré de l'Ordonnée CD, & c'est ce qu'il faut exécuter.

Ayant prolongé Yy jusqu'à SE perpendiculaire à SC, soit $SE = x$: on aura à cause des triangles semblables SyE, & AyC, SE: AC :: Ey : yC, & componendo $SE + AC : AC :: Ey + yC$ ou $EC : yC$, c'est-à-dire, $x + b : b :: \sqrt{xx + aa} : yC = \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x+b}$. Pareillement à cause des triangles semblables SYE, BYC, on aura SE: BC :: EY : CY, & dividendo $SE - BC : BC :: EY - CY$ ou $EC : CY$, c'est-à-dire, $x - b : b :: \sqrt{xx+aa} : CY = \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x-b}$; or le rectangle $yC \times CY$ devant être égal au quarré de CD, j'aurai d'abord cette égalité $\frac{b\sqrt{xx+aa}}{x+b} \times \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x-b}$ ou $\frac{bbxx + bbaa}{xx - bb} = cc$, d'où on trouve par la réduction $xx = \frac{bcc + bbaa}{cc - bb} = \frac{bbmm}{bb}$ par conséquent $x = \frac{bm}{b}$; *ce qu'il falloit trouver.*

Construction Geometrique.

Faites cette analogie *comme b ou* $\sqrt{CD^2 - AC^2}$ *ou CF est à b ou AC, ainsi m ou SD est à une quatriéme*; je dis que si vous prenez SE égale à cette quatriéme, & que vous tiriez par le centre C la droite EY, la partie yY interceptée entre les deux petits côtez SA & SB prolongée, fera la position & la grandeur du diametre cherché; sur lequel si on dresse un plan perpendiculaire au triangle ASB, la section de ce plan fera dans le Cône un cercle, dont aussi tous les autres plans paralleles à celui-ci feront par leurs sections tout autant d'autres cercles.

Scolie.

Que si vous aimez mieux trouver trigonometriquement l'angle de l'inclinaison de la section, sçavoir l'angle ACy qui est égal à l'angle E, vous n'avez qu'à faire cette analogie, comme ES est à SC, ainsi le sinus total est à la tangente de l'angle cherché ACy.

Corol-

COROLLAIRE.

On en trouve maintenant tout ce que l'on veut, par exemple, Cx, ou la diſtance du centre de l'Ellipſe au centre du cercle ; car $yY = yC + CY = \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x+b} + \frac{b\sqrt{xx+aa}}{x-b}$ = [en ſubſtituant la valeur de x] $\frac{cn}{m+b} + \frac{cn}{m-b} = \frac{2mcn}{mm-bb}$ = [en ſubſtituant la valeur de $mm-bb$ qui eſt $= aa+bb = nn$] $\frac{2mcn}{nn} = \frac{2mc}{n}$, donc la moitié $\frac{mc}{n} = Yx$ ou yx, & en retranchant Cy, où $\frac{cn}{m+b}$ il reſte $Cx = \frac{mc}{n} - \frac{cn}{m+b} = \frac{mmc - nnc + bmc}{mn - bn}$ = [en ſubſtituant pour $mm-nn$ ſa valeur $cc-bb$ ou bb] $\frac{bbc+bmc}{mn+bn} = \frac{bc}{n}$: ainſi Cx ſera la quatriéme proportionelle de n, b & c, c'eſt-à-dire, de $SA\sqrt{CD^2 - AC^2}$ & CD, ou de SA, CF & CD.

Ce que vous trouvez, (c'eſt toûjours M. Bernoulli qui parle en réponſe) que *le quarré de la moitié du diametre yY qu'on cherche, eſt égal au quarré de la moitié du grand axe CD, de la baſe plus au quarré de Cx* ; n'eſt autre choſe qu'une application d'une propoſition du II. Livre d'Euclide, qui eſt qu'une ligne droite comme yY étant coupée également en x, & inégalement en C, le quarré de la moitié yx eſt égal au rectangle des ſegmens inégaux $yC \times CY$ plus au quarré de l'interceptée Cx ; car comme j'ai remarqué ci-deſſus le rectangle $yC \times CY$ doit être égal au quarré de CD ; donc on aura auſſi Yx^2 ou $yx^2 = CD^2 + cx^2$, comme vous avez trouvé ; ceci eſt encore confirmé par ce que je viens de démontrer en dernier lieu, où j'ai trouvé $Yx = \frac{mc}{n}$, $Cx = \frac{bc}{n}$ & $CD = c$; il faut donc faire voir qu'effectivement $\frac{mmcc}{nn}$ ſera $= cc + \frac{bbcc}{nn} = \frac{nncc + bbcc}{nn}$; or il eſt clair que $mm - nn$ étant égal $cc - bb = bb$, on aura $nn + bb = mm$ donc $\frac{nncc + bbcc}{nn}$ devient $= \frac{mmcc}{nn}$; ainſi on a $Yx^2 = \frac{mmcc}{nn}$ & auſſi $CD^2 + Cx^2 = \frac{mmcc}{nn}$ par conſéquent $Yx^2 = CD^2 + Cx^2$.

Vous dites, Monſieur, que vous ne connoiſſez pas CX, parce que l'angle ASX vous eſt inconnu : voilà CX trouvé, puiſqu'il eſt égal $\frac{bc}{n}$ indépendamment de l'angle ASX, ſi pourtant par curioſité on veut trouver cet angle, je m'y prendrai en telle maniere.

Dans le triangle ACy, on a trouvé l'angle ACy, l'angle CAy eſt donné,

le côté A C eſt auſſi donné: de ces trois choſes données, on trouve CyA, & le côté Ay, donc dans le triangle xyS, on aura l'angle xyS, & les deux côtez xy & yS, ce qui ſert à trouver l'angle xyS que l'on cherche.

Quant au côté Ay on le trouve immediatement par la premiere ſi-le militu de des deux triangles SyE, CyA en faiſant comme S E + A C eſt à A C, ainſi Sy + yA ou S A eſt à Ay, c'eſt-à-dire, $x + b : b :: n \frac{nb}{x+b} =$ Ay, & mettant pour x ſa valeur $\frac{bm}{b}$ on aura $\frac{nb}{x+b}$ ou A$y = \frac{bn}{m+b}$ faiſant donc comme $m + b$ ou SD + Cd eſt à b ou Cd, ainſi n ou SA eſt à une quatriéme : cette quatriéme ſera celle à laquelle il faut prendre Ay égale, & tirant enſuite par le centre de l'Ellipſe C la droite yCY, cette droite ſera encore le diametre du cercle cherché; ce que j'ai voulu remarquer par occaſion.

En ſuppoſant au lieu d'un Cône droit, un Cône ſcalene ou oblique ſur une baſe Elliptique; on reſoudra le Probléme par la même méthode, & avec la même facilité.

Autre Solution du même Problême par M. Jean BERNOULLI le Fils.

Suppose' que le point y ſoit le point cherché dans la ligne A S, par lequel le plan dont eſt queſtion doit paſſer.

Ayant tiré de ce point la ligne yH perpendiculaire à la baſe A B du triangle A S B, & la ligne yK parallele à la même baſe qui joigne les deux côtez S A & S B de ce triangle, je nommerai

SA = S B (le petit côté du Cône) $= d$
SD [le grand côté du Cône $= e$
CD] le demi grand axe de l'Ellipſe $= a$
A C = C B le demi petit axe $= b$
FC [la diſtance du Foyer F au centre C de l'Ellipſe] $= f$
Ay] la diſtance de l'extremité A du petit axe au point cherché $y = x$

Ces Dénominations étant faites j'aurai

SC [l'axe du Cône] $= \sqrt{dd - bb}$ & SA [d] : SC ($\sqrt{dd - bb}$) :: Ay (x) : IC, ainſi IC = yH $= x\sqrt{dd - bb}$ pareillement SA [d] : AC [b] :: Sy [$d - x$] : yI on aura yI = IK = HC $= \frac{bd - bx}{d}$; or $\overline{yC}^2 = \overline{yH}^2 + \overline{HC}^2$, donc yC $\sqrt{xx - \frac{2bbx}{d} + bb}$. Pour trouver CY, je fais cette analogie yK = 2yI : CB :: yY : Cy, & *dividendo* yK — CB $\left(b - \frac{2bx}{d}\right)$: CB [b] :: yY — CY = yC $\left(\sqrt{xx - \frac{2bbx}{d} + bb}\right)$: CY, on trouvera CY $= \frac{d\sqrt{xx - \frac{2bbx}{d} + bb}}{d - 2x}$

Maintenant puiſque le cercle cherché & la baſe du Cône ſe coupent dans la ligne C D, celle-ci ſera une corde du cercle; la ligne *y* Y en ſera une auſſi, & même elle en ſera un diametre ayant pour appliquée le demi grand axe CD, par conſéquent le rectangle des ſegmens de ce diametre où *y* C× C Y ſera égal à $\overline{CD}^2$, c'eſt-à-dire $\frac{dxx - 2bbx + bbd}{d - 2x} = aa$, & en retranchant *bb* de part & d'autre $\frac{d\,x\,x^{x}}{d - z} = aa - bb =$ [par la proprieté de l'Ellipſe] $\overline{CF}^2 = ff$, donc $xx = -\frac{2ffx}{d} + ff$ & $x = -\frac{ff}{d} + \frac{f}{d} V \overline{ff + dd}$ ou [en ſubſtituant pour $V \overline{ff + dd}$ ſa valeur e] $x = \frac{fe - ff}{d}$

faiſant donc comme *d* ou S A eſt à *f* ou F C, ainſi *e* — *f*, ou S D — F C, eſt à une quatriéme, cette quatriéme ſera la cherchée.

Les Corollaires qu'on pourroit tirer de cette ſolution, ſont les mêmes que ceux de la précedente.

Pour réduire ces deux ſolutions à la pratique de la Régle & du compas, qui eſt la plus commode pour les Artiſtes, on operera ainſi à la premiere.

Du centre C & CD moitié du grand axe pour Rayon, on fera l'arc D *d* qui rencontrera B A prolongé en *d*: ſi l'on tire *d*S, cette ligne repreſentera le grand côté du Cône.

Par le Foyer F & le point A, extremité du petit axe ayant tiré l'indéfinie F A *e*, on portera ſur cette ligne la longueur du grand côté du Cône S *d*, de F en *e* par où on menera *eg* parallele à A B, qui coupera C S en *g*: par le ſommet S on menera la ligne SE parallele & égale à *eg*; & enfin par les points E & C on tirera E Y qui coupera les côtez S A & S B prolongé en *y* & Y, la partie *y* Y ſera le diametre du cercle que l'on cherche; laquelle étant diviſée en deux également en *x*, le point *x* en ſera le centre.

Si de ce même point *x* par S on tire *x* S, cette ligne ſera l'axe du Cône.

Pour la ſeconde ſolution ayant tiré une ligne A *e* faiſant un angle quelconque avec A S, on portera la longueur C F, diſtance du centre au Foyer de l'ellipſe, de A en *o* ſur A *e*, & de *d* en *n* ſur *d*S, puis faiſant S V égal à S *n* ſur *o* S, on tirera par les points V & C ligne V Y, qui coupera A S en *y*, où eſt le point cherché; ainſi la ligne *y* Y ſera le diametre du cercle demandé, qu'on tracera ſur la ſurface du Cône El-

liptique; de la même maniere que l'Ellipſe ſur le Cône droit circulaire, dont nous parlerons après celle de décrire l'Ellipſe ſur le Cylindre.

USAGE.

Cette propoſition ſert pour les *Traits* des voutes coniques appellées Trompes, tant droites que biaiſes, c'eſt-à-dire, dont les baſes [qui ſont leurs faces] ſont perpendiculaires ou obliques à leurs axes; parce que les joins de Doele & les faces des Trompillons ſont toûjours des cercles ou portions de cercles paralleles à cette baſe: d'ailleurs quand même les faces ne ſeroient pas planes, comme ſont celles des Trompes ſur le coin qui ſont angulaires, les convexes & concaves des Tours rondes & creuſes, & les Ondées comme celle d'Anet; il faut toûjours pour la facilité de l'execution ſuppoſer une baſe circulaire du Cône droit ou oblique, de laquelle comme d'un terme, on porte les alongemens au dehors, ou les reculemens en dedans des parties excedentes ou défaillantes des concavitez ou des convexitez des faces.

De la deſcription de l'Ellipſe ſur les Surfaces concaves ou convexes du Cylindre & du Cône.

Probleme XXXIV.

Le grand Axe d'une Ellipſe avec un point à la Surface du Cylindre, dont la diſtance à un des Axes eſt connuë, y tracer l'Ellipſe.

On peut trouver les points néceſſaires pour décrire une Ellipſe ſur la ſurface du Cylindre de deux manieres, ou ſur des cercles paralleles à la baſe, ou ſur des lignes droites paralleles à l'axe; comme la premiere eſt la plus longue, & plus compoſée dans l'operation, parce qu'outre pluſieurs cercles qu'il faut décrire ſur des ſurfaces courbes, il faut encore au moins une parallele à l'axe du Cylindre, nous lui preferons la ſeconde.

Fig. 176. Si le point donné eſt à une des extremitez du grand axe, par exem-
Fig. 178. ple en L, on fera ſur une ſurface plane à part [*Fig.* 178.] un angle *lga* égal à celui de l'axe du Cylindre ſur la baſe, droit, ſi le Cylindre eſt droit & aigu ou obtus, s'il eſt ſcalene, ſur un des côtez de cet angle comme a*g*, on portera le diametre du Cylindre, puis du point *g* comme centre, & de la longueur de l'axe de l'Ellipſe pour Rayon, on tracera un arc de cercle qui coupera le côté *a l* en *l*, la ligne *g l* ſera la poſition de l'axe de l'Ellipſe dans le Parallelograme par l'axe du Cylindre;

puis on décrira ſur *ag* comme diametre le demi cercle *anopg* qu'on diviſera en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points de l'Ellipſe comme ici en quatre aux points *nop*, par leſquels on menera des perpendiculaires ſur ag qu'on prolongera juſqu'au diametre *gl*; les lignes compriſes entre les diametres ag & *gl*, ſeront les diſtances du contour du cercle de la baſe à l'Ellipſe demandée; on tranſportera ſur le contour de la baſe du Cylindre *Fig.* 176. les diviſions *a*, *n*, *o*, *p*, *g* de la Figure 178. & par ces points on tirera des paralleles à l'axe, ſur leſquelles on portera les diſtances QR, CS, *qu* de la Figure 178. & l'on aura ſur la ſurface du Cylindre les points L N O P G, par leſquels on tracera à la main l'Ellipſe demandée.

Si le point donné eſt ailleurs qu'aux extremitez du grand axe, la même conſtruction ſubſiſtera, mais elle demande une preparation pour la poſition du cercle qui doit repreſenter la baſe du Cylindre: on décrira ſur le grand axe *gl* de l'Ellipſe une demi-Ellipſe, ou ſeulement le quart d'Ellipſe où le point donné P ſe trouve, dont on connoît, par la ſuppoſition, l'arc P*g*; puis ayant mené ſur la ſurface du Cylindre par ce point une ligne *r*P1 parallele à l'axe, on y portera la diſtance *qu* iſſuë de l'Ordonnée P*u*, & par le point P1 on tracera un cercle ſur la ſurface du Cylindre, qui repreſentera celui ne la baſe, & on continuera comme au cas précedent.

Demonstration.

Le grand axe de l'Ellipſe doit toûjours être dans le plan du Parrallelograme par l'axe du Cylindre, parce qu'il partage l'Ellipſe en deux parties égales, comme ce Parallelograme partage le Cylindre; or le triangle *lag* repreſente une partie du plan de ce Parallelograme, & le plan de l'Ellipſe eſt auſſi perpendiculaire à celui de la ſection par l'axe du Cylindre, donc les diſtances des points du contour de la baſe à ceux de l'Ellipſe priſe ſur des paralleles à l'axe, ſont égales à celles des points coreſpondans des diametres de l'un & de l'autre, comme ſont *uq*, *c*S, QR, puiſqu'on peut ſuppoſer à chaque point *p*, *o*, *n* une ſection perpendiculaire au plan *gal*, ſuivant les lignes *pq*, O*c*, RQ qui ſeront auſſi des Parallelogrames, où les Ordonnées de l'Ellipſe *u*P & SO, RN ſeront des côtez paralleles, parce que les deux plans de la baſe & de l'Ellipſe ſont perpendiculaires au troiſiéme *gal*, par conſéquent (par la 9.e du XI. Liv. d'Eucl.) les lignes *pq* & *u*P ſeront égales entr'elles, de même que les diſtances *qu* & P*p*, non dans cette Figure 178. mais à la ſurface du Cylindre *Fig.* 176. ainſi des autres *c*S & *o*O, QPL & *ln*N, quoiqu'elles ne le ſoient pas dans la Figure, où ces deux plans ne peuvent

être reprefentez dans leur vraie fituation l'un à l'égard de l'autre, parce qu'ils doivent être en l'air perpendiculairement au plan *g a l*; donc l'operation eft exacte.

USAGE.

Ce Problême eft d'un très fréquent ufage dans la coupe des Pierres; car la plus grande partie des voutes font des Berceaux fouvent biais par tête, ou parce qu'ils ne font pas Horifontaux, comme les defcentes, ou parce que le mur de face eft en Talud, ou parce que leur direction eft oblique à ce mur par la contrainte des lieux; dans tous ces cas, on fuppofe une fection perpendiculaire au Berceau que l'on appelle *l'arc Droit*, d'où on avance fur des paralleles à l'axe du Berceau les diftances qui excedent l'arc Droit pour former une face Elliptique; ce que l'on verra plufieurs fois au IV. Livre.

PROBLEME XXXV.

Un Point étant donné à la furface du Cône, qui foit à l'extremité du grand Axe de l'Ellipfe donné, où d'une Ordonnée connuë, tracer l'Ellipfe fur la furface courbe du Cône.

Lorsqu'on a le grand axe d'une Ellipfe, on a toûjours fa pofition dans le Cylindre, en quelques points qu'on place fes deux extremitez, elle fera toûjours égale; il n'en eft pas de même dans le Cône, fi le point de pofition n'eft pas déterminé, l'Ellipfe que l'on peut trouver avec un grand axe donné peut varier, en ce que fon petit axe peut être plus ou moins grand, & felon qu'il fera incliné à la bafe, l'Ellipfe fera plus ou moins differente du cercle de cette bafe; de forte qu'à moins qu'on n'ait le point de pofition de l'extremité du grand axe, il faut encore connoître le petit, ou une Ordonnée, auquel cas on trouvera la fituation du grand axe de l'Ellipfe dans le triangle par l'axe du Cône.

Fig. 181. On commencera [*Fig.* 181.] par chercher le parametre de l'axe donné EL & de l'Ordonnée connuë, comme nous l'avons dit au Problême
* *Pa.* 160. XIV. * ce qui eft facile; on infcrira enfuite le triangle par l'axe du Cône *b*S*a* dans un cercle S*a b*, puis on cherchera une quatriéme proportionelle à l'axe donné, à fon parametre & au côté S*a*, qui donnera fur S*a*, la longueur *a*P; par le point P on menera PD parallele à *b a*, qui coupera le cercle au point D, par où & par le point S on tirera l'indéfinie SDF, fur laquelle portant la longueur de l'axe donné de S en KF; on menera par le point K la ligne KL parallele à S*b*, & par le point L la ligne LE parallele à SK; cette ligne EL fera l'axe donné dans la pofition, où il doit être pour que l'Ellipfe foit telle qu'on la demande

à la surface du Cône, dont bSa est la section du triangle par l'axe, auquel le plan coupant le Cône doit être perpendiculaire, cette preparation étant faite.

Soit [*Fig.* 183.] le triangle par l'axe du Cône BSA, l'axe de l'Ellipse EL & l'axe du Cône SC, du point C milieu de la base BA on décrira le demi cercle BMA, & des points E & L extremitez de l'axe de l'Ellipse ayant abaissé des lignes Ee, Ll perpendiculaires à BA, ou paralleles à l'axe SC; on divisera l'intervale el en deux également en c, & on décrira de ce point comme centre, & pour Rayon ce le demi cercle $crstl$, qui sera la projection de la moitié de l'Ellipse proposée. *Fig.* 183.

On prendra ensuite sur le côté BE autant de parties égales que l'on voudra avoir de points à la circonference de l'Ellipse, par lesquelles on menera des paralleles à BA, comme 4f, 3i, 2d, 1b, oL jusqu'à la rencontre de l'axe EL, & par les points fi, db on abaissera des perpendiculaires à la base BA prolongées jusqu'au cercle esl, comme bu, dt, is, fr qui couperont sa circonference aux points r, s, t, u, par lesquels & par le centre C on tirera les lignes Cr4^b, Cs 3^b, Ct 2^b, Cu 1^b, qui donneront sur la base du Cône les points 4^b, 3^b, 2^b, 1^b, par lesquels & par le sommet S on tirera des lignes droites sur la surface qu'on n'a pas marqué dans la Figure 183. mais bien dans la Figure 185. qui auroit dû être de grandeur égale à l'autre, si la place l'avoit permis; ces lignes serviront à trouver les points de la circonference de l'Ellipse, en portant les divisions correspondantes à leur origine, par exemple B4 sur 4S en 4r, B3 sur 3S en 3s, B2 sur 2S en 2t, B1 sur 1S en 1u, & l'on aura ainsi des points à la surface du Cône, par lesquels menant une ligne courbe à la main, on aura l'Ellipse proposée.

Demonstration.

Premierement pour la position de l'axe EL, il faut démontrer qu'il doit être à son parametre comme aS, aP.

Si l'on suppose un plan qui coupe le Cône parallelement à la base, comme en mn, le cercle qu'il fera par cette section aura une Ordonnée GI commune avec l'Ellipse EIL, à l'intersection des deux plans du cercle & de l'Ellipse; donc $\overline{GI}^2 = nG \times Gm$ & $LG \times GE : \overline{GI}^2 ::$ EL est à son parametre; or à cause des paralleles LE & SF, qui font les triangles semblables LGn, SFa, on aura LG : Gn :: SF : Fa, & EG : Gm :: SF : Fb, donc $\overline{SF}^2 : Fa \times Fb ::$ EL à son parametre; or à cause du cercle SDab, FD×DS = Fa×Fb, donc l'axe EL est à son parametre :: $\overline{SF}^2 : FD \times FS :: aS : SP$, *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 181.

Secondement pour rendre raiſon de la maniere dont on a trouvé les points à la circonference de l'Ellipſe.

Fig. 183. Il eſt clair par ce que nous avons dit de la projection au Theoreme que celle de l'Ellipſe E L eſt un cercle, ou ſa moitié un demi cercle *esl*, & que ſi l'on ſuppoſe des plans perpendiculaires à celui du triangle par l'axe B S A, & paralleles à cet axe S C du Cône, leurs interſections avec le plan de l'Ellipſe ſe fera ſuivant les Ordonnées qui ſont égales dans l'Ellipſe, & dans le cercle qui eſt ſa projection, puiſqu'elles ſont communes aux deux ſections, dont les points *r*, *s*, *t*, *u* ſont dans leur poſition Horiſontale, à l'égard du point C qui repreſente l'axe.

Il ne reſte plus qu'à déterminer leur hauteur au deſſus de la baſe B A du Cône, laquelle doit être trouvée ſur des lignes à la ſurface qui paſſent par les points *r*, *s*, *t*, *u*, & par le ſommet S, leſquelles ſont repreſentées par la projection C*r*4^b, C*s*3^b, C*t*2^b, C*u*1^b, & parce qu'on ne peut pas avoir ces hauteurs verticalement, mais ſur la ſurface inclinée du cône; il faut concevoir pluſieurs plans paralleles à la baſe, & paſſants par les points *foidb*, dont les ſections ſeront des cercles qui couperont les lignes tirées par les points de la baſe 4^b, M 3^b, 2^b, 1^b, en des points qui ſeront à la circonference de l'Ellipſe, puiſqu'ils coupent tous l'Ellipſe en deux points, & que les lignes 4^{b}S, 3^{b}S, 2^{b}S, 1^{b}S, la coupent auſſi aux points des Ordonnées marquées, donc chaque interſection des cercles & des lignes coreſpondantes, qui tirent, de même que les cercles, leurs origines des points *f o i d b*, ſera un des points de l'Ellipſe, *ce qu'il falloit trouver.*

Si le Cône eſt Droit, les diviſions E 4, 3 4, 4 2 ſont égales ſur tous les côtez tirez de la baſe du cône à ſon ſommet S; ainſi l'on peut ſans tracer les cercles porter ces intervales ſur chaque côté du cône tiré des points coreſpondans 4^b M 3^b, 2^b, 1^b, de la baſe au ſommet; puiſque les cercles paralleles les coupent tous en parties égales.

Si le Cône eſt ſcalene les diviſions ne ſeront plus égales, mais ſeulement proportionelles, & alors on ne peut ſe diſpenſer de tracer les cercles pour avoir les points de leur interſection avec les differens côtez plus ou moins inclinez, ſuivant l'obliquité du cône.

USAGE.

Ce Probléme eſt une introduction à la conſtruction des Trompes coniques en talud, ou en ſurplomb, ou biaiſes, dont les faces ſont Elliptiques.

Probleme

PROBLEME XXXVI.

Un Point étant donné à la surface d'un Cône pour sommet d'une Parabole, décrire cette Courbe sur la Surface concave ou convexe.

Soit [*Fig.* 184.] le triangle ASB, la section du Cône donné, par son axe SC, & par le point donné P tracé sur une surface plane ; on menera par ce point P une ligne P*a* parallele au côté SB, qui coupera la base du triangle en *a*. Du point C, milieu de cette base pour centre & pour Rayon CA, on décrira un demi cercle B*y*A qui representera la moitié de la base du Cône ; ensuite ayant divisé la ligne P*a* qui represente l'axe de la Parabole demandée, en autant de partie ségales ou inégales qu'on voudra avoir de points à sa circonference, comme aussi aux points *q*, *r*, *s*, on menera par ces points des paralleles à AB, qui couperont l'axe du Cône SC aux points *o*, 1ᶜ, 2ᶜ *s*, & le côté SA aux points P*t u*V, desquels on abaissera sur BA des perpendiculaires qui la couperont aux points PT *u*V ; & des points *qrs*, d'autres perpendiculaires ou paralleles à l'axe prolongées au dessous de BA. Enfin du point C comme centre & pour Rayons les longueurs CT, C*u*, CV, on décrira des arcs de cercles concentriques TQ, *u*R, CV qui couperont les paralleles à l'axe SCS aux points Q, R, S, la ligne courbe menée par ces points PQRSa dans le demi cercle de la base du Cône B*y*A sera la projection de la Parabole demandée, par le moyen de laquelle on la tracera sur la surface concave ou convexe du Cône, comme on va le dire. *Fig.* 184.

Soit [*Fig.* 182.] le Cône *b*S*a* égal à celui de la Figure 184. ce qu'on n'a pû observer dans cette Planche faute de place, mais que l'on peut supposer ; on menera du sommet S, par le point P donné à la surface, une ligne droite SA, sur laquelle ayant porté les distances S*t*, S*u*, Sv, SA de la Figure 184. aux points 1, 2, 3, 4, on tracera par chacun de ces points un cercle par le Problême XXXII. sur lequel on portera de part & d'autre de la ligne SA l'arc de la projection qui est correspondant à cette division, par exemple, l'arc TQ qui est le premier au dessous du sommet P de 1 en Q, l'arc *u*R de 2 en R, & enfin l'arc VS de la Fig. 184. en 3 S de la Fig. 182. & par les points PQRS*x*, ainsi trouvez d'un côté, & les équidistans de l'autre côté de la droite SA, on tracera à la main ou avec une Régle pliante, mince & large posée de cant la Parabole demandée, j'ai dit avec une Régle mince & large, parce que cette courbe, quoique décrite sur une surface convexe ou concave est plane dans son contours. *Fig.* 182.

Demonstration.

La raison de cette construction est facile à trouver pour peu qu'on fasse attention à la Figure 184. car premierement on coupe le Cône en plusieurs tranches paralleles à la base, qui font autant de sections circulaires de Rayons inégaux, qui sont transportez sur celui de la base CA par les perpendiculaires P*p*, *t*T, *uu*, VV; de sorte que le centre C qui represente en un seul point de projection tout l'axe SC, represente aussi tous les centres de ces sections répandus sur cet axe *o* 1 *c*, 2 *c* *s* & toutes les paralleles à l'axe *q* 1 Q, *r* 2 R, *s* C S, *a* a representent des sections verticales des plans, qui coupent ces cercles perpendiculairement au triangle par l'axe BSA, & par les points d'intersection, où les diametres des cercles coupent l'axe de la Parabole; par conséquent ils donnent les cordes de ces arcs circulaires par l'intersection des deux plans perpendiculaires entr'eux, & du troisiéme P*a* qui forme la Parabole par sa section dans le Cône, où se terminent les arcs des sections circulaires.

Les longueurs des cordes des demi-arcs TQ, *u*R, VS, A a étant ainsi trouvées, il est clair qu'elles ont été bien transportées sur le cône à la Figure 182. & dans leurs justes places; & par conséquent que les points à la circonference de la Parabole ont été trouvez sur la surface concave ou convexe du Cône, *ce qu'il failloit faire.*

Il est aussi clair par ce que nous avons dit ci-devant de la projection des sections coniques, & par le Theoreme III. du I. Livre, que la courbe PQR a tracée dans le plan de la base B*y*A, est encore une Parabole, quoique differente de celle de la section proposée P*a*.

Nous avons dit au Probléme X. à quoi sert la description de la Parabole.

Probleme XXXVII.

Le premier axe d'une Hyperbole, & un Point qui soit une de ses extremitez étant donné à la surface du Cône, tracer cette courbe sur la Surface concave ou convexe.

Fig. 184. Soit [*Fig.* 184.] le triangle BSA la section par l'axe du Cône, & par le point donné H on prolongera indéfiniment le côté AS vers K, puis du point H pour centre & pour Rayon la longueur du premier axe donné HK, on fera un arc qui coupera AS prolongé en K, si de ce point K par H on mene une ligne droite KY, on aura la position de l'axe de l'Hyperbole dans le Cône; laquelle étant donné il n'y a qu'à faire sa projection de la même maniere qu'on a fait celle de la Parabole, ce que

la Figure fait ſuffiſamment voir, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'en répeter la conſtruction: on obſervera ſeulement, 1.° qu'elle eſt beaucoup abregée, lorſque l'axe KH eſt parallele à l'axe du Cône SC; parce que la projection *hy* eſt une ligne droite, qui termine tout d'un coup tous les arcs 1E, 2D, 3I. 2.° Que ſi l'axe HY panche vers S, la projection du contour aura ſa concavité tournée vers B, & au contraire ſi cet axe panche en dehors.

Nous avons dit au Problême XII. à quoi ſert la deſcription de l'Hyperbole.

Corollaire General ſur la Projection des Sections Coniques.

Il ſuit de la méthode dont nous venons de faire uſage pour décrire les ſections coniques ſur le Cône, qu'on peut auſſi très commodément l'employer pour *décrire ſur un plan toute ſorte de Section conique, le triangle par l'axe du Cône, & un axe de la ſection étant donné dans ce triangle.*

Car ſi au lieu de prendre les arcs de la projection des tranches paralleles, qui donnent des cercles concentriques, terminez par la projection du plan qui forme la ſection; on prend les cordes de ces arcs rangées ſucceſſivement ſur un axe à angle droit, ce ſeront autant d'Ordonnées, par l'extremité deſquelles on fera paſſer la courbe que l'on cherche.

Premier Exemple pour l'Ellipſe.

Soit le triangle par l'axe du Cône BSA [*Fig.* 183.] dans lequel l'axe EL de l'Ellipſe eſt donné; ayant diviſé cet axe en autant de points que l'on voudra *bdif*, on abaiſſera par ces points & par les extremitez EL des perpendiculaires à la baſe BA, au delà de laquelle on les prolongera en *rstu*; enſuite ſur *el* comme diametre, ſi l'on fait un demi cercle *erstul*, il coupera toutes ces paralleles aux points *rstu*, qui déterminent la longueur des Ordonnées qui conviennent à l'Ellipſe aux points *bdif*; ainſi ayant elevé des perpendiculaires à cet axe ſur ces diviſions, on portera les longueurs des Ordonnées au cercle qui eſt la projection de l'Ellipſe ſur ces perpendiculaires, ſçavoir R*r* ſur *fg*, D*s* ſur *ih*, F*t* ſur *di*, G*u* ſur *b*K, & l'on aura les points E*ghikl*, par leſquels on tracera la demi-Ellipſe à la main, ou avec une Régle pliante. *Fig.* 183.

Second Exemple pour la Parabole.

Fig. 184. Soit le triangle par l'axe du Cône BSA [*Fig.* 184.] & l'axe de la Parabole P*a* donné dans ce triangle; ayant divisé cet axe par plusieurs plans paralleles à la base BA, & passans par les points pris à volonté *qrs*, on fera la projection des cercles qu'ils font dans le Cône, & la projection de la Parabole aRQP, comme nous l'avons dit ci-devant, par les paralleles *a*a, *s*S, R*r*, Q*q*, P*p*, on fera des perpendiculaires sur P*a* aux points *qrs*, ou pour éviter la confusion des lignes sur une parallele P 2 A, & l'on portera sur ces perpendiculaires les sinus des arcs QT, R*u*, SV, sçavoir *a*a, S3, R2, Q1, lesquels seront rangez successivement aux points correspondans de l'axe de la Parabole, comme 1Q en *q*Q², 3R en *r*R², 3S en *s*S², & C*a* en A*a*², & l'on aura les points Q², R², S², *a*², par lesquels on tracera la Parabole à la main ou avec une Régle pliante.

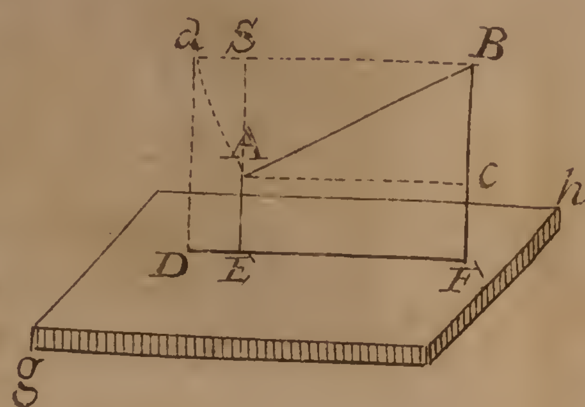
Troisiéme Exemple pour l'Hyperbole.

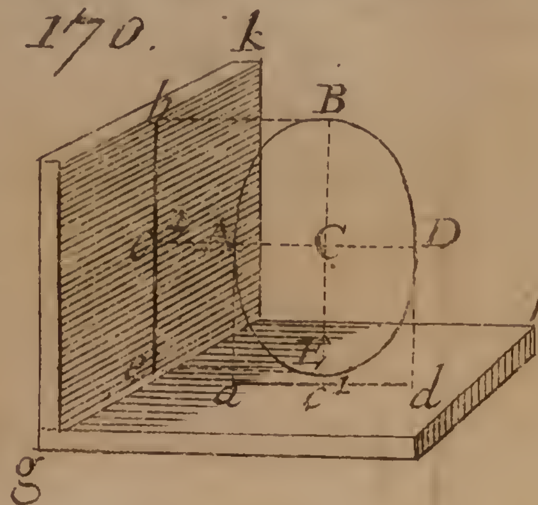
Soit *Fig.* 184. le triangle par l'axe du Cône BSA, & l'axe de l'Hyperbole donné HY, dans ce triangle; ayant divisé cet axe en autant de parties qu'on voudra par des plans qui coupent le Cône parallelement à sa base, en *fgi*, & ayant fait la projection des arcs de cercle qui passent par les points *edi*, par le moyen des paralleles à l'axe SC; on tirera autant de perpendiculaires à l'axe HY donné ou à quelque autre égal, & également divisé comme *b*B, sur lesquelles on portera les sinus de demi-arcs de la projection, 1E, 2D, 3I, B*y* correspondans à chaque division; c'est-à-dire, les perpendiculaires sur B*b* tirées des points FGIB qu'on transportera en F, *f*², G, *g*², I, *i*², B, *y*², & par les points *b*, *f*², *g*², *i*², ²*y*, on tracera à la main une courbe qui sera l'Hyperbole que l'on cherche.

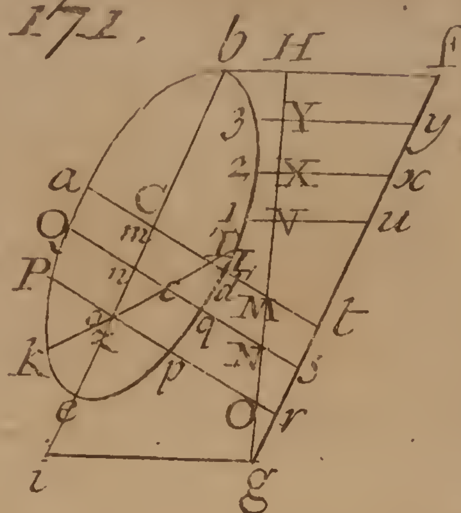
La démonstration de ces pratiques est la même que celle que nous avons donnée de la description de ces courbes, sur des surfaces concaves ou convexes; en effet il n'y a rien de changé, excepté qu'au lieu de prendre les arcs de la projection pour les porter de part & d'autre d'un côté du Cône, sur des cercles paralleles à la base, ici l'on prend les demi-cordes de ces mêmes arcs sur des lignes paralleles à cette base sur un plan.

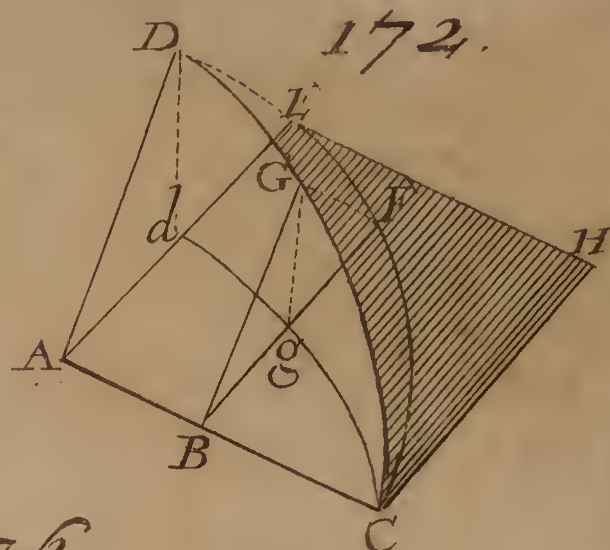
Remarque sur cet Usage.

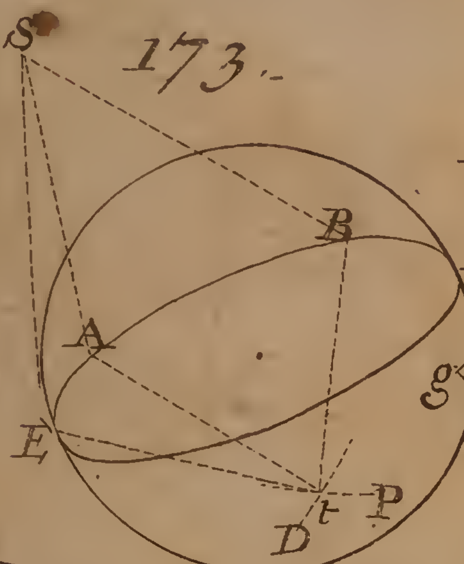
On peut toûjours se servir de la méthode de la projection dans l'Architecture pour la coupe des Pierres; parce que les Cônes sont or-

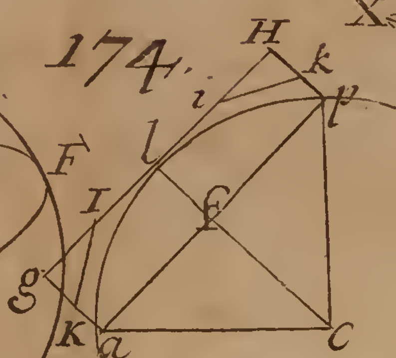

169.

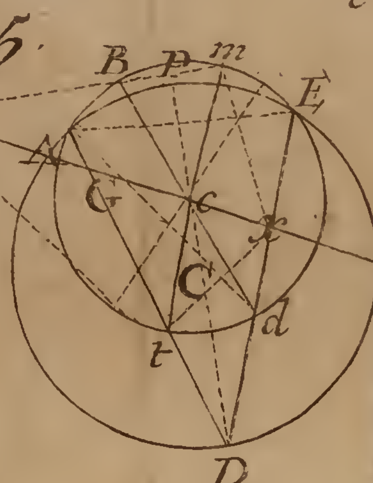

170.

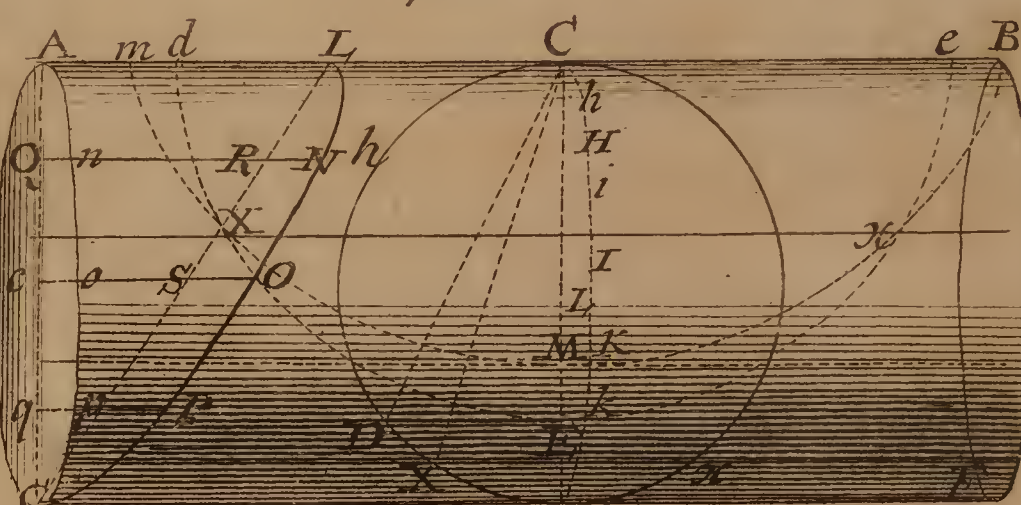

171.

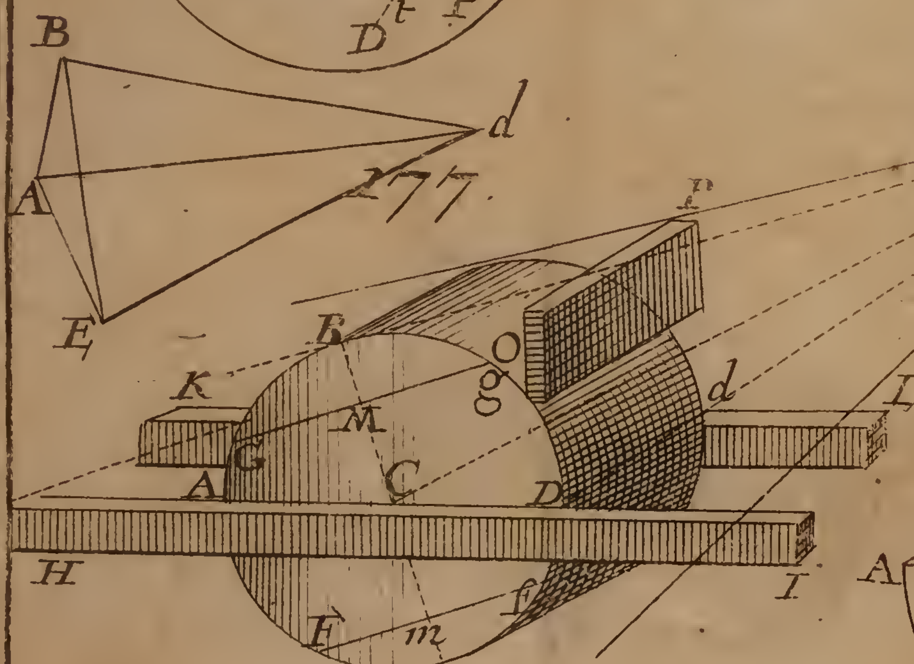

172.

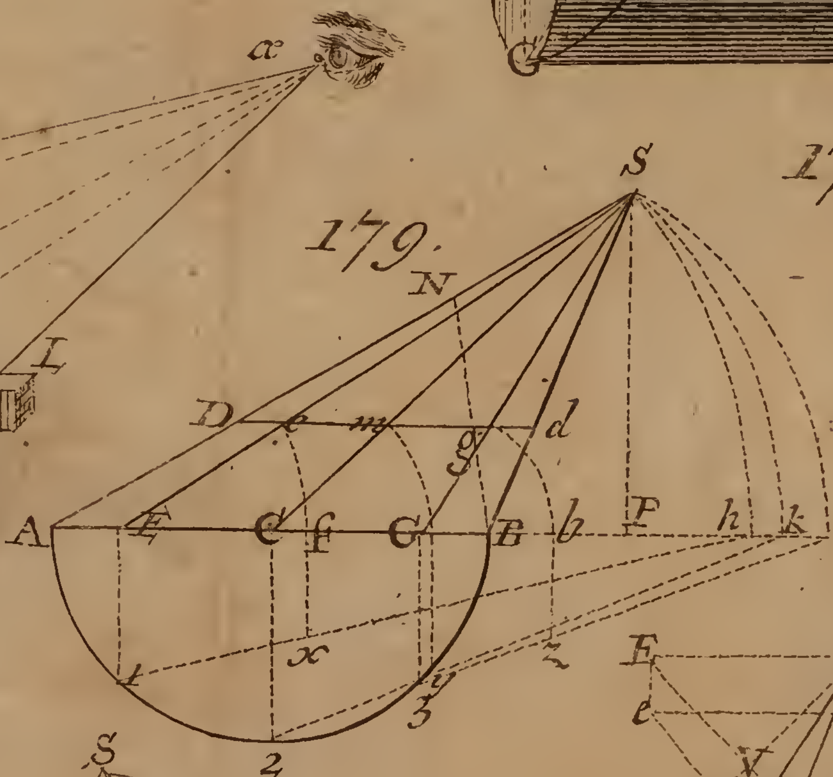

173.

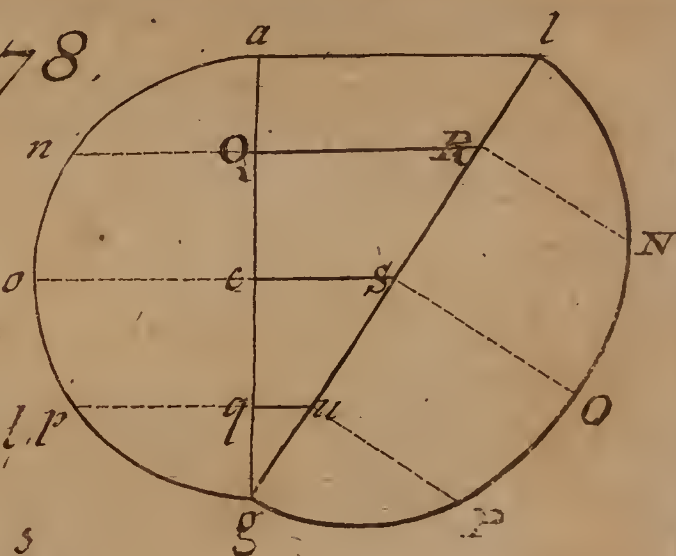

174.

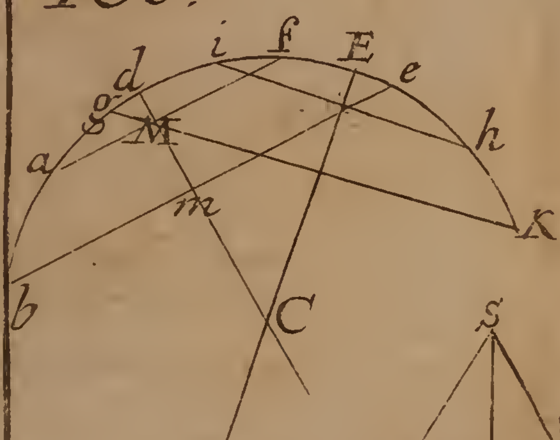

175.

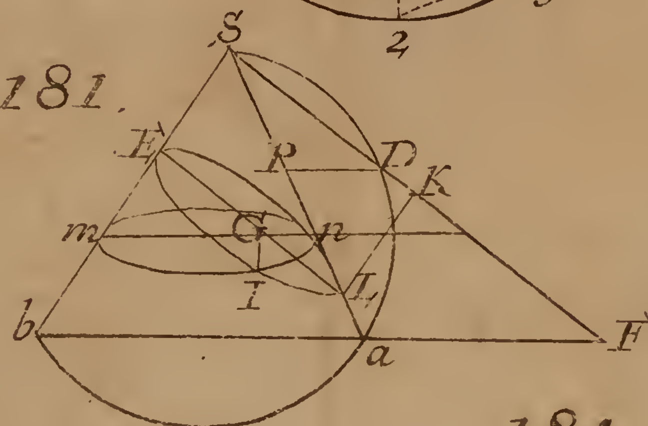

176.

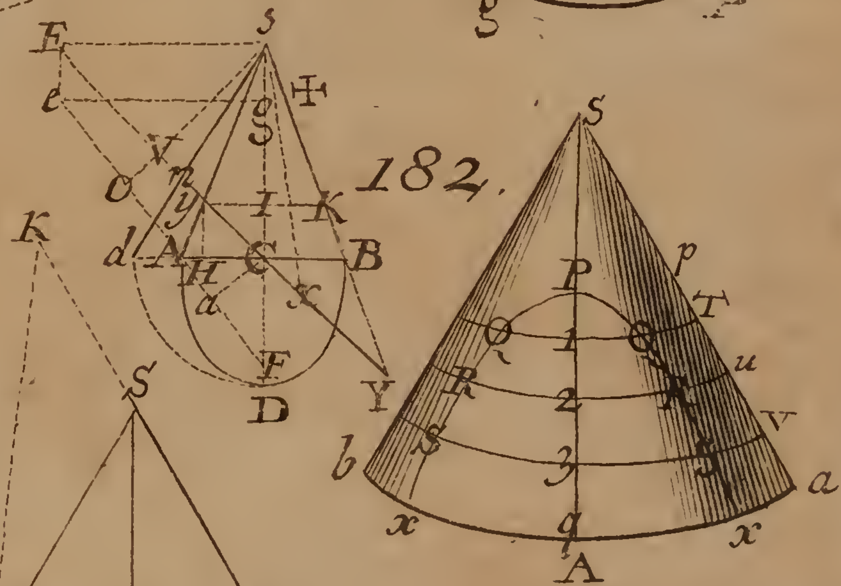

177.

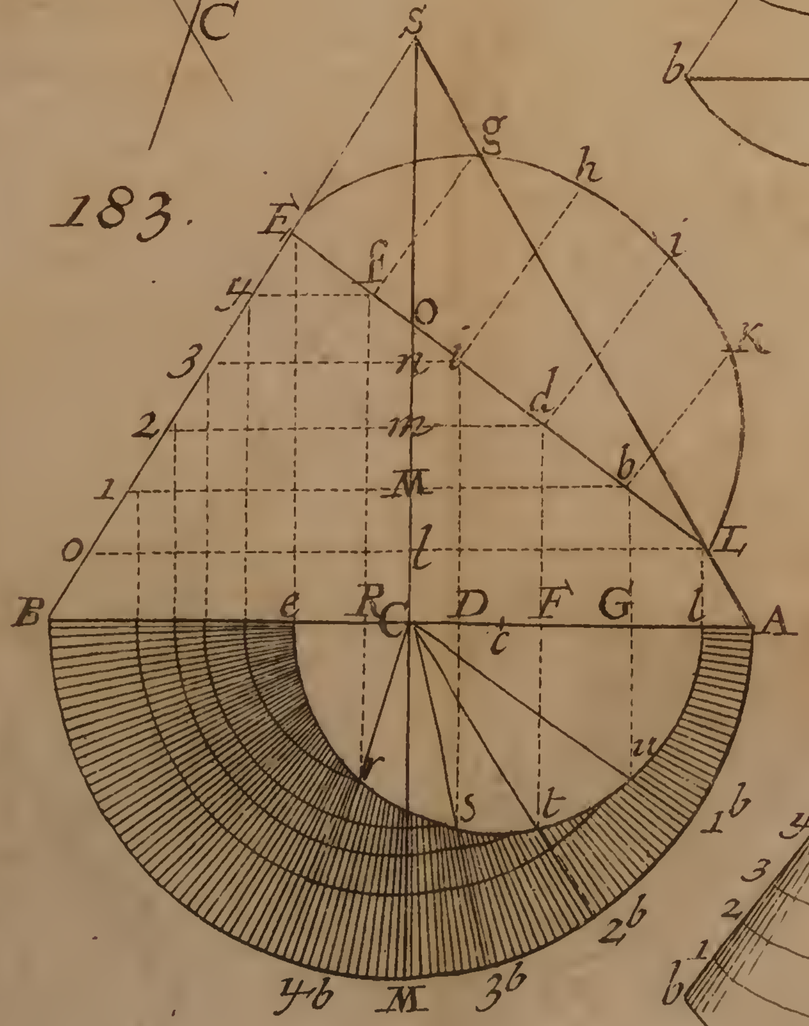

179.

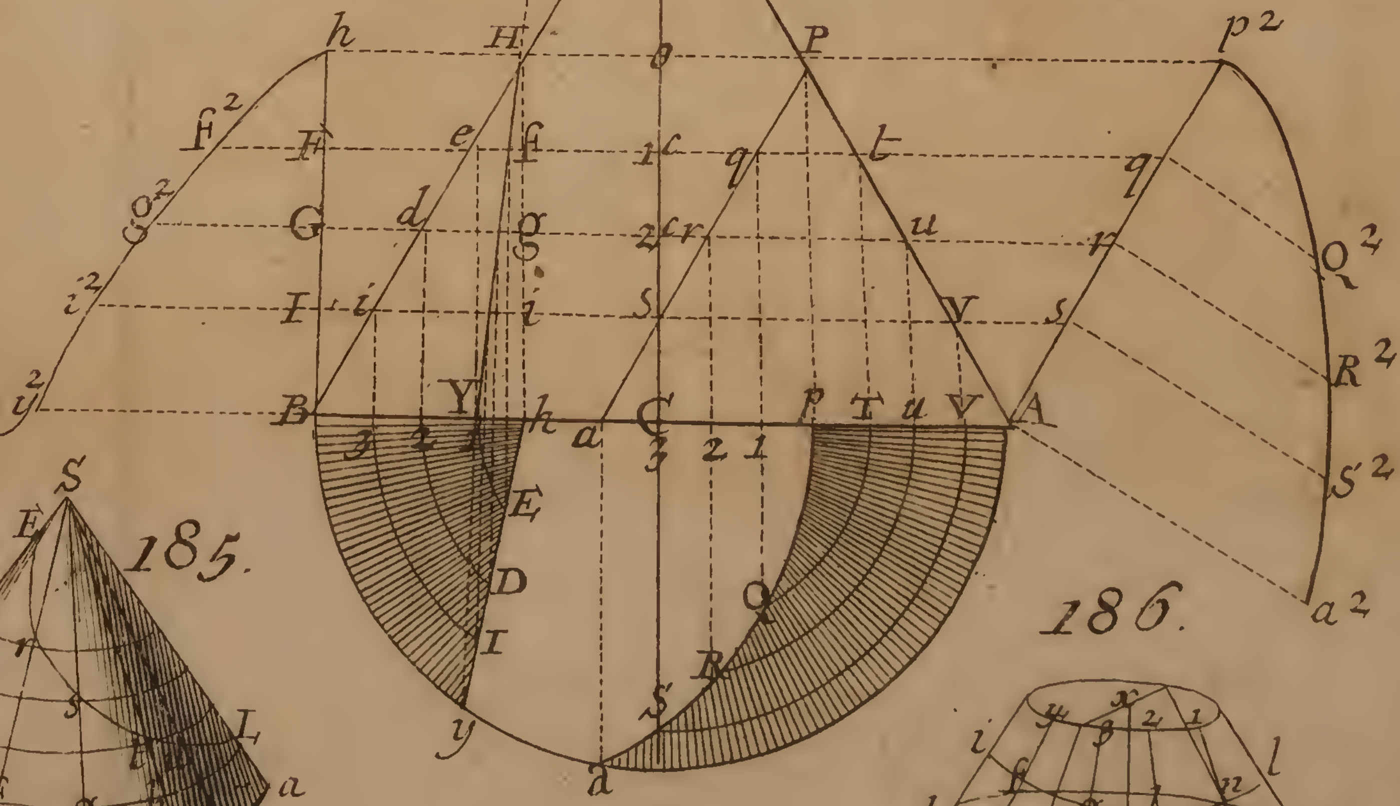

178.

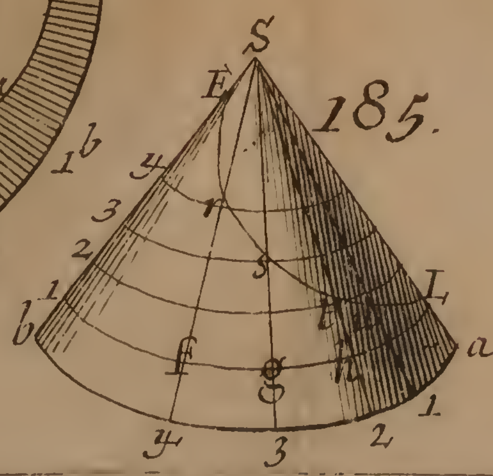

180.

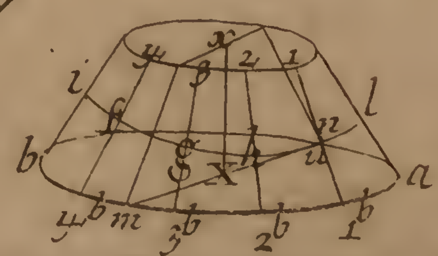

181.


182.


183.


184.


185.


186.

dinairement donnez, de même que les axes des ſections dans ces Cônes, & parce qu'on eſt toûjours obligé de faire des *Plans* & des Profils, on a auſſi la projection des diviſions de ces Cônes par les tranches qui ſont ordinairement les rangs des Pierres; il ne s'agit que d'y reconnoître les cordes qui ſont les Ordonnées & abſciſſes, leſquelles ſont toûjours égales ſur le côté du Cône, & ſur l'axe de la Parabole, & dans les autres ſections où elles ſont inégales ſur le côté du Cône, & ſur l'axe, elles ſont toûjours en même raiſon avec celles de l'axe, parce que l'un & l'autre ſont diviſez par des paralleles à la baſe du Cône; comme cette pratique de projection eſt d'une très grande importance pour former ce deſſein, que les Architectes appellent *l'Epure*, nous l'expliquerons plus au long au Livre ſuivant.

Si l'on a bien compris la maniere de tracer les ſections coniques par ce moyen, il ne ſera pas difficile de concevoir qu'il eſt applicable à toutes les autres Courbes, qui peuvent ſe former ſur des corps Réguliers, & même Irréguliers, comme on va l'expliquer ci-après.





TROISIE'ME PARTIE
Du Second Livre.

CHAPITRE VII.
Des Sections qui ne peuvent être décrites que sur des Surfaces courbes, & par le moyen de la Projection sur des Surfaces planes.

PROBLEME GENERAL.

Trouver tant de Points que l'on voudra du contour des Courbes faites à la Surface des Sphères, Cônes & Cylindres qui se pénetrent mutuellement.

LORSQU'IL s'agit de décrire des courbes qui sont dans une surface plane, on trouve les points de leur contour par le rapport des Ordonnées aux abscisses de leurs axes, ou de leurs Co-ordonnées; mais pour celles qui ne sont pas dans un plan, ce rapport ne suffit pas, parce que leurs axes ou diametres, n'étant pas des lignes droites, les abscisses ne sont pas droites; ce sont des courbes ausquelles il faut mener d'autres Ordonnées à une ligne droite, qui est comme leur soustendante, pour en trouver la courbure par differentes distances de la corde à l'arc; de sorte que le rapport de deux lignes connuës ne peut suffire, puisque de quelque façon qu'un plan coupe la Sphère, le Cône ou le Cylindre, il ne produira qu'une section conique ou un Parallelograme; & si l'on suppose un second plan perpendiculaire ou incliné à ce premier, leur commune section sera bien une droite, dans laquelle il doit se trouver un point de la section solide; mais cette ligne n'en détermine pas la position, il faut avoir recours à un troisiéme plan qui coupe les deux premiers dans certaines circonstances, pour déterminer ce point sur la ligne où l'on sçait qu'il doit être; tels sont les points du contour de ces courbes à double courbure, que j'appelle ici des sections *solides*, parce qu'elles proviennent de la section d'un solide coupé ou pénetré par un autre solide, & non pas par un plan, comme les sections coniques.

DANS le nombre des trois plans qu'il faut supposer pour trouver les

points de ces courbes, il y en a toûjours un donné, qui fait une ſection conique, dont l'axe eſt la ſouſtendante de la courbe à double courbure, que nous pouvons appeller *Imbriquée*, parce qu'elle eſt faite en contour de tuile creuſe, ou qui eſt tangent à un des ſommets de cette courbe, pour les diſtinguer des autres courbes à double courbure, qui ont plus d'une inflexion.

Le ſecond plan doit être parallele au premier, pour y trouver les Ordonnées à l'axe courbe de la ſection ſolide, & les comparer à celles de la ſection conique, qui leur correſpondent.

Enfin le troiſiéme plan doit couper les deux précedens par les Ordonnées de la ſection conique & de la ſolide *Imbriquée*, pour en trouver les diſtances, ou par des perpendiculaires, ou par des lignes inclinées d'une inclinaiſon connuë.

Si l'on entend bien ce principe, on verra que tous les Problêmes propoſez à réſoudre, n'en ſont qu'une application, ſuivant la difference des cas.

On reconnoîtra auſſi que cette méthode toute ſimple qu'elle eſt, eſt très Geometrique, & la clef de tous les Traits des Enfourchemens des voutes, qui ſont preſque toute la difficulté de l'Art de la coupe des Pierres.

Il ne s'agit donc, 1.° que de couper les ſolides qui ſe pénetrent par des plans paralleles entr'eux, comme par tranches, qui font toûjours des ſections ſemblables dans chaque corps, mais differentes de l'un à l'autre.

Secondement, de reconnoître dans chacune de ſes tranches la partie commune aux deux corps; car ſi l'on trace ſur un plan les deux ſections differentes, dans leur diſtance reſpective, on verra qu'elles ſe coupent en deux points de leur contour, qui ſont communs aux deux ſurfaces de ces corps.

Troiſiémement, de ſuivre, je vieux dire lier par des traits les points communs aux deux ſurfaces, paſſant de l'un à l'autre ſur les ſurfaces courbes mêmes, pour avoir la courbe naturelle, ou ſur une ſurface plane, pour en avoir l'imitation produite par la projection, comme nous l'avons expliqué ci-devant.

Or puiſque ſuivant la Geometrie de l'infini, on peut conſiderer les ſolides comme compoſez d'une infinité de tranches paralleles infiniment minces, dans leſquelles les Ordonnées & les abſciſſes des ſections planes,

augmentent ou diminuent dans un rapport connu ; on peut déterminer une infinité de points au contours des Courbes à double courbure, qui ne ſont pas applicables ſur une ſurface plane, ou les aplatir, pour ainſi dire, en les réduiſant par la projection à des courbes planes, ſans y faire d'autre changement, que d'en ſuprimer la troiſiéme dimention ; ce qui eſt néceſſaire pour y parvenir par gradation, comme l'on fera dans tous les Problêmes ſuivans.

On peut rendre la méthode de trouver pluſieurs points des courbes à double courbure plus ou moins aiſée, ſuivant la ſituation que l'on donne aux plans qui coupent les corps en tranches paralleles ; lorſque les axes des Cônes & des Cylindres qui ſe pénetrent, ſont paralleles entr'eux, la ſituation la plus commode des tranches, eſt d'être perpendiculaires à ces axes, perce qu'alors les points communs ne ſont que les interſections de differens cercles : ſi les axes de ces corps ſe coupent à angle Droit, la ſituation des tranches doit être parallele à l'un des deux pour avoir un cercle, & un Parallelograme ou une Hyperbole & un cercle, ou obliquement pour avoir deux Ellipſes qui ſe coupent ; tout cela deviendra plus ſenſible par les exemples des Problêmes ſuivans.

Du Cicloïmbre.

PROBLEME XXXVIII.

Tracer un Cicloïmbre ſur deux Cylindres inégaux, qui ſe pénetrent à angle Droit.

Pla. 17. Fig. 187. SOIT [*Fig.* 187.] le Cylindre O L a *b* pénetré par un plus petit T*t*, *u*V, c'eſt-à-dire, d'un plus petit diametre, dont l'axe *x*X tombe perpendiculairement ſur celui du grand C*c* : il faut tracer la courbe qui ſe fait à l'interſection des deux ſurfaces ſur l'un ou l'autre de ces deux Cylindres. Pour y parvenir, il faut commencer par faire la préparation ſuivante.

Ayant fait à part ſur un plan un quart de cercle C A B, dont le Rayon C A ſoit égal à celui du gros Cylindre ; ſur le Rayon C B prolongé, & du point B pour centre, on décrira un autre quart de cercle D E B, dont le Rayon D B ſera égal à celui du petit Cylindre, & parallele à A C : on diviſera l'arc D E en autant de parties égales qu'on voudra, par exemple, en 4. aux points 1, 2, 3, par leſquels on menera hors du quart de cercle D E, des paralleles à A C, & d'autres paralleles à C E comme 1 *i*, 2 *h*, 3 *g*, D *d*, juſqu'à la rencontre de l'arc A *d* B en *d*, *g*, *h*, *i*, par où on menera d'autres paralleles à A C indéfinies. Sur D B prolongée, on prendra *o b* pour une partie du côté du gros Cylindre, & plus grande que le diametre du petit, on la diviſera en deux également au point *m*, duquel on portera

portera de part & d'autre les diſtances DI, DH, DG, DF en mt, $m1$, $m2$, $m3$, & par tous ces points m, 3, 2, 1, t, on tirera des perpendiculaires à ob, ſur chacune deſquelles on portera ſucceſſivement & dans l'ordre des diviſions correſpondantes de part & d'autre du point m, les diviſions du Rayon CB, ou leurs égales, qui ſont les diſtances de la tangente DB à l'arc AdB, ſçavoir Dd en mF, 6g en 3q, 5h en 2r, 4i en 1s, & de même de l'autre côté de m tirant vers le point u, & l'on aura la projection d'une moitié de la courbe ſolide, qui ſe fait par l'interſection des ſurfaces des deux cylindres, laquelle projection n'eſt pas abſolument néceſſaire, mais très utile pour ſe conduire dans la deſcription de la courbe ſur les ſurfaces convexes ou concaves des cylindres, comme on le verra au IV. Livre.

Cette préparation étant faite, ſi l'on veut décrire le Cicloïmbre, 1.° *ſur le grand Cylindre.*

Ayant tracé une parallele à ſon axe, comme ob, on portera les diſtances $m3$, $m2$, $m1$, mt d'un côté d'un point m pris à volonté, & autant de l'autre vers u, & par les points m, 3, 2, 1, t, &c. on tracera autant de cercles paralleles entr'eux, & perpendiculaires au côté ob, ſur leſquels on portera, ſuivant l'ordre des diviſions correſpondantes de l'arc A B de part & d'autre du point m, les arcs de cercle, Bd ſur le cercle repreſenté ici par la ligne droite mF, Bg ſur l'arc 3q, Bh ſur 2r & Bi ſur 1s; ce que l'on voit plus diſtinctement dans la Figure 188. où ces arcs ſont deſſinez en perſpective avec des lettres ſemblables à celles de la Figure 187. ſur l'arc AdB repreſenté par l'arc aKB, Bg par bG, Bh par bH & Bi par l'arc bI; ce qui donnera ſur les arcs de cercles paralleles, tracez ſur le gros cylindre, les points K, G, H, I, t, par leſquels on tracera à la main une courbe qui ſera le cicloïmbre propoſé; on en fera de même pour les autres quarts de cette courbe qui ſont tous égaux entr'eux, & au quart qui en paroît dans la Figure 1[illegible]

Ou il faut remarquer que la courbe tFu, qu'on a tracée dans la Figure 187. eſt celle de l'axe courbe du Cicloïmbre, repreſenté dans la Figure 188. par la ligne courbe tY, qui paſſe par le milieu des cordes de tous les arcs retranchez du gros cylindre.

Secondement, ſi l'on veut tracer le cicloïmbre *ſur le petit Cylindre*, on décrira ſur la ſurface un cercle, dont la projection [*Fig.* 187.] eſt la ligne droite tmu, & ayant diviſé ſa circonference en parties égales à celles de l'arc DE, du quart de cercle DEB; on menera par les points de cette diviſion autant de paralleles à ſon axe, leſquelles ſeront perpendiculaires au cercle, ſi le cylindre eſt Droit, comme nous le ſuppoſons, & ſur chacune de ces paralleles repreſentées [*Fig.* 188.] par les lignes kK, gG,

*b*H, 1 *i*, T *t*, on portera les longueurs D *d*, 6 *g*, 5 *h*, 4 *i*, de la Figure 187. ſuivant leur ordre, & depuis le cercle tracé *tmu*, qui eſt leur terme commun, leſquelles longueurs raportées quatre fois de ſuite, donneront les points par où paſſe le Cicloïmbre ſur le petit cylindre, par leſquels on tracera la courbe à la main, *ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

LA raiſon de cette operation ſe déduit facilement de notre Problême general; car ſi l'on ſuppoſe le grand cylindre coupé par pluſieurs tranches paralleles entr'elles, & perpendiculaires à ſon axe, ces tranches ſeront toutes renfermées entre deux cercles; mais le même plan qui coupe chaque tranche du grand, étant auſſi ſuppoſé couper le petit cylindre parallelement à ſon axe, fera des tranches compriſes entre deux Parallelogrames inégaux, dont l'un ſera plus large que l'autre; de ſorte qu'on a une ſuite de cercles égaux coupez par des Parallelogrames inégaux, dont les rapports des côtez ſont exprimez par les lignes tangentes B D, B 6, B 5, B 4, par leſquelles les autres côtez qui traverſent ceux-ci à angle Droit, ſont exprimez par les lignes D *d*, 6 *g*, 5 *h*, 4 *i*, dont les plus éloignez du point B, qui eſt ſur l'axe du petit cylindre, ſont coupez plus loin de la tangente D B par l'arc A *d* B, ſuivant l'ordre des ſinus verſes des arcs B *d*, B *g*, B *h*, B *i*, comme nous l'avons dit au Theoreme XVIII. *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

CE Problême eſt la baſe de la pratique des Traits de la coupe des Pierres, où il s'agit de trouver les arêtes des enfourchemens des Berceaux inégaux qui ſe croiſent à angle Droit, dont nous avons fait un petit détail à l'application du Theoreme cité.

ON peut même y comprendre ceux qui ſe croiſent obliquement, dont la difference du Trait n'eſt qu'une modification de cette pratique, comme on le va voir au Problême ſuivant.

PROBLEME XXXIX.

Tracer une Ellipſimbre formée par la ſection d'une Sphère pénetrée par un Cylindre, dont l'Axe ne paſſe pas par le centre de la Sphère.

Fig. 189. SOIT [*Fig.* 189.] une ſphère ou une portion de ſphère A R B *t*, dont le centre eſt C, pénetrée par un cylindre D E F G, qui entre dans la ſphère de tout ſon contour; on la diviſera ſuivant le Problême general par tranches paralleles entr'elles, & perpendiculaires à l'axe du cylindre, par des lignes droites 1 *r*, 2 *s*, 3 *t*, qui repreſenteront les plans coupans

ces deux corps, lesquels feront toûjours pour sections deux cercles, dont on aura les Rayons sur ces lignes; si on les considere comme les intersections d'un plan passant par l'axe du cylindre, & de ces plans qui lui sont perpendiculaires; on prendra donc le Rayon du cylindre DX, & des points *f*, *e*, *d*, intersections de l'axe X*x* du cylindre, & des perpendiculaires à cet axe 1*f*, 2*e*, 3*d* prises à volonté, & en aussi grands nombres que l'on voudra avoir de points pour centres, on décrira des arcs ou des demi-cercles 1, 4, *o*; 2, 5, *p*; 3, 6, *q*, & des points X, *h*, *g*, *i* pour centres pris au milieu des cordes de la sphère R*r*, S*s*, T*t*, on décrira d'autres demi-cercles, qui couperont les précedens aux points 4, 5, 6, par lesquels on abaissera des perpendiculaires sur les lignes 1*r*, 2*s*, 3*t*, qui les couperont aux points *n*, *m*, *l*, lesquels donneront la projection des points de la Courbe à double courbure, que j'appelle Ellipsimbre, par lesquels on tracera la ligne A, *l*, *m*, *n*, B, qui sera son axe courbe.

Cette préparation étant faite, 1.° si l'on veut tracer l'Ellipsimbre sur le cylindre; après avoir tracé une parallele à son axe, par exemple AD, on portera sur cette ligne les intervales des divisions qui ont été prises à volonté A3, A2, A1, par lesquelles on tracera autant de cercles paralleles entr'eux, & perpendiculaires à l'axe du cylindre, que nous supposons Droit; ensuite on portera de part & d'autre de la ligne AD tracée à la surface du cylindre, les arcs des cercles determinez par l'intersection de ceux de la sphère; sçavoir l'arc 1, 4 sur le premier cercle, l'arc 2, 5 sur le second, & 3, 6 sur le troisiéme, & par les points A, 6, 5, 4, B, on tracera à la main une moitié de l'Ellipsimbre, & l'autre de l'autre côté également, ce que la Figure 189. ne peut exprimer, parce que les demi-cercles 1, 4, *o*; 2, 5, *p*; 3, 6, *q* doivent être relevez par l'imagination en l'air, perpendiculairement au plan de la section par l'axe du cylindre, & qu'ils ne representent encore qu'une moitié de la courbe, l'autre étant de l'autre côté de la ligne AD sur le cylindre.

Secondement, si l'on veut tracer l'Ellipsimbre sur la surface de la sphère; au lieu de la ligne AD que nous avons prise pour milieu des arcs, dont la Figure nous donne les moitiez, on tracera sur la sphère un cercle majeur * passant par les points A & B, sur lequel on portera les intervales des divisions faites par les paralleles 1*r*, 2*s*, 3*t* qui sont les arcs AT, AS, AR, AB, par lesquels on décrira autant de cercles paralleles entr'eux, & perpendiculaires au majeur, & l'on portera de part & d'autre de ce cercle majeur les arcs des cercles mineurs déterminez par l'intersection des demi-cercles du cylindre, qui sont dans les plans correspondans, ainsi l'on portera sur le premier l'arc R4, sur le second l'arc S5, sur le troisiéme l'arc T6, & l'on aura sur la surface de la sphère les points A, 6, 5, 4, B, par lesquels

* Prob. XXX.

on tracera à la main une courbe qui sera l'Ellipsimbre proposée: on en fera autant de l'autre côté de l'arc ARB, sur la surface de la sphère, pour l'autre moitié de l'Ellipsimbre.

On peut encore tracer cette courbe sur le cylindre & sur la sphère d'une autre maniere.

Premierement, sur le cylindre on peut tracer une Ellipse par les points A & B [par le Probl. XXXVI.] & ayant pris sur cette Ellipse les arcs correspondans aux parties de l'axe Az, AY, de la projection on fera passer par les points z & Y des paralleles à l'axe du cylindre, sur lesquelles on portera les longueurs Zl, Ym de la projection, lesquelles donneront les points l, m & n qui seront à la circonference de l'Ellipsimbre, mais cette maniere est plus longue. On traceroit de même sur la sphère un cercle majeur AB, d'où, comme terme, on porteroit les arcs correspondans aux longueurs lZ, mY, pour avoir les points l, m & n; mais cette maniere qui seroit plus longue, seroit moins correcte dans l'exécution: on ne la propose ici que comme une idée des differens moyens qu'on peut employer pour parvenir à la même fin.

Demonstration.

La raison de la premiere construction est toûjours fondée sur le Theoreme general de la division des corps en tranches paralleles, par le moyen desquelles on a plusieurs intersections des cercles inégaux de la sphère & du cylindre, dans lesquelles sont les points de la rencontre des deux surfaces, & par conséquent de l'Ellipsimbre, car quoique l'on ait tracé ces differens cercles sur le plan de la Figure, qui est celui qui passe par l'axe du cylindre, il faut les redresser par l'imagination perpendiculairement à ce plan; ce qui ne change rien à leur distance rélative au plan tangent supposé sur la ligne AD du cylindre, puisque les lignes 4n, 5m, 6l lui sont paralleles, comme elles le sont aussi à l'axe de la sphère CP: & puisque la courbe doit toûjours avoir des points communs aux deux surfaces, il suit qu'elle passera par les intersections des courbes formées par le plan qui coupe les deux corps, *ce qu'il falloit trouver.*

On parviendra aussi à la même description, si au lieu de faire les tranches perpendiculaires à l'axe du cylindre, on les lui fait paralleles, alors les points de la courbe se trouveront à l'intention de cercles de la sphère, & des Parallelogrames du cylindre, c'est toûjours le même principe differemment appliqué.

Si le cylindre n'étoit pas Droit, mais scalene, il arriveroit du changement pour les Figures des sections, car supposant les tranches perpendiculaires à son axe, elles seroient circulaires dans la sphère, & Elliptiques

dans le Cylindre, & elles n'y feroient circulaires, que lorfque les tranches feroient obliques à l'axe, & paralleles à la bafe, ou bien faifant une fection fous-contraire ; ce qu'il eft aifé de fe reprefenter & de concevoir fans le fecours d'une Figure : cependant pour aider l'imagination, on peut s'exercer fur une boule & un cylindre en relief coupé, c'eft-à-dire, taillé avec de la craye, ou autre matiere tendre.

L'usage de ce Problême eft indiqué au Theoreme X. pour les enfourchemens des Lunettes pratiquées dans une Voute fphérique.

Probleme XL.

Les diametres des deux Cylindres inégaux qui fe pénetrent, & l'inclinaifon de leurs Axes qui fe rencontrent étant donnez, tracer l'Ellipfimbre formée par la rencontre de leurs Surfaces.

La conftruction de ce Problême eft fi femblable à celle du penultiéme, que la feule infpection de la Figure 190. en fera voir la difference, qui ne confifte que dans la préparation, ou au lieu de deux quarts de cercles, il faut faire deux quarts d'Ellipfes, au lieu de les placer à angle droit fur le côté du grand cylindre, il faut donner à leurs axes l'inclinaifon qu'ils doivent avoir fur ce côté.

Soit cependant pour une plus ample explication [*Fig.* 190.] la moitié du grand cylindre QB pénetré par un plus petit T*m*, dont l'axe X*x* fait avec l'axe *c*C du grand, l'angle X*xc*; on prendra la ligne BC pour moitié du grand axe d'une Ellipfe, & le Rayon *e*C du demi diametre du grand cylindre pour moitié du petit axe, on décrira fur un plan à part le quart d'Ellipfe NDE, dont le centre fera C; enfuite ayant prolongé la moitié du grand axe CN jufqu'en M, en forte que NM foit égale à *hm*, prife pour moitié du grand axe d'un autre quart d'Ellipfe; on prendra pour moitié du petit axe la ligne NH égale au demi diametre de la bafe TV du petit Cylindre, & l'on décrira le quart d'Ellipfe H2 1 M; enfuite ayant tiré par H la ligne DL parallele à CM, on divifera le quart d'Ellipfe HM en autant de parties égales qu'on voudra; par exemple, ici en trois, aux points 2. & 1. par lefquelles on menera 1G, 2F, paralleles à CM, & ML, 1K, 2I, paralleles à HN: cette préparation étant faite, on divifera la circonference du petit cylindre T*m* en quatre, & le quart en autant de parties égales que celui de l'Ellipfe HM, par exemple, ici en douze, puifque le quart HM eft divifé en trois: 1.° Si l'on veut avoir la projection de cette divifion fur la ligne A*m*, on fera *hi* = HI, *hk* = HK, & *hm* = HL, ou NM: enfuite on menera par ces points *h*, *i*, *k*, des paralleles à l'axe X*x* du petit cylindre, prolongées au delà des points *h*, *i*, *k*, fur lefquelles on portera les diftances de la tangente

Fig. 190.

HN au quart d'Ellipse EDN; sçavoir, HD en *hd*, PF en *pf*, & *if*; OG en *og*, & K*g*, & par les points A, *g*, *f*, *d*, *f*, *g*, *m*, on tracera la Courbe qui represente l'axe courbé de l'Ellipsimbre, ou la projection de son contour.

2.° Presentement si l'on veut tracer l'Ellipsimbre sur le petit cylindre *t* & *m*, on tracera une Ellipse sur la surface, dont la circonference coupera les paralleles R*g*, S*f*, L*d*, &c. aux points *o*, *p*, *h*, *i*, K, de chacun desquels comme d'un terme, on portera les distances H*d* en *hd*, *p*F en *if* & *pf*, OG en *og* & en K*g*, & ainsi de même de l'autre côté du cylindre, & par les points trouvez sur les paralleles à l'axe du cylindre, on tracera à la main la courbe qui sera l'Ellipsimbre proposée.

3.° Si l'on veut tracer cette courbe sur le grand cylindre QB, ayant tracé une ligne AB parallele à son axe C*c*, on prendra à volonté un point *h* pour celui du milieu, de la section duquel on portera de part & d'autre les distances HI, HK, HL, pour avoir sur cette ligne A*m* les points *o*, *p*, *h*, *i*, K, par lesquels on tracera par le Problême XXXVI. autant d'Ellipses paralleles entr'elles, suivant l'inclinaison donnée A*hd*; ensuite on portera de part & d'autre de la ligne A*m* sur chacune de ces Ellipses, les arcs correspondans du quart d'Ellipse EDN, sçavoir, ND sur *hd*, NF sur *pf* & *if*, NG sur *og* & K*g*, & par les points *g*, *f*, *d*, *f*, *g*, qui terminent les arcs des Ellipses tracées sur le cylindre, on fera passer une ligne courbe de chaque côté de la ligne A*m*, qui sera l'Ellipsimbre proposée,

Demonstration.

La raison de cette construction est toûjours déduite du même Problême general que les précedentes. On coupe les deux corps par tranches paralleles qui sont dans le petit Cylindre des Parallelogrames, parce que les plans coupans, sont paralleles à son axe, & dans le grand cylindre les sections des mêmes plans sont des Ellipses; or parce que toutes ces Ellipses sont égales, elles sont representées par le quart d'Ellipse EDN, qui a été fait dans la préparation; & parce que tous les Parallelogrames sont inégaux, on a exprimé la moitié de leurs côtez par les lignes HI, HK, HL qui sont les distances des points 1, 2, H, par lesquels passent es plans qui coupent le petit cylindre; car si l'on releve par la pensée le quart d'Ellipse H2 1M à angle aigu sur le plan de l'Ellipse EDN, en sorte que les demi-axes CN & NM fassent un angle égal à l'angle *x*, *h*, *m*, c'est-à-dire, dans la Figure, que NM soit posée sur NA; il est clair que la projection de la ligne HN se réduira à un point N, placé au milieu du petit cylindre, comme est le point *h*, la projection du point 2. se fera sur NA à une distance égale à HI qui est, par la con-

struction, *hi* pour un côté, & *hp* pour l'autre, & tout le quart d'Ellipse M 1 2 H sera dans un plan tangent au grand Cylindre QB, suivant la ligne *hm*, partie de son côté A*m*, & les intervales des divisions H, 2, 1, M à l'Ellipse qui est la section du même plan dans le Cylindre, seront exprimez par les lignes HD, *p*F, *o*G, qui sont perpendiculaires à la tangente HN, & paralleles à l'axe NC, lesquelles distances sont entr'elles comme les sinus verses, ou les fleches du double des arcs DN, FN, GN, lesquelles sont encore entr'elles comme les sinus verses des arcs de cercle correspondans à la base du Cylindre, comme nous l'avons démontré ailleurs; ce que nous avons representé à la Figure 191. qui est la vûë de la précedente par le bout du gros Cylindre, comme il sera facile de reconnoître par les mêmes Lettres placées aux points correspondans, mais doubles, parce qu'elle fait voir les deux côtez, & par conséquent les Parallelogrames des sections du petit Cylindre; mais par la construction les longueurs de ces fleches, ou ce qui est la même chose, des longueurs qui leur sont égales, ont été portées de *h* en *d*, de *i* en *f*, &c. donc la courbe *tdm* est l'axe courbe de l'Ellipsimbre, & marque sa profondeur dans le Cylindre QB, & parce que l'on a porté les intervales des arcs de l'Ellipse DE, qui est égale à toutes les autres sections, paralleles sur chacune des sections correspondantes; on aura la rencontre des Parallelogrames du petit Cylindre avec les Ellipses du grand, où sont les points communs à leurs deux surfaces; donc ils sont à la circonference de l'Ellipsimbre, & cette Courbe passera par tous ceux qui ont été ainsi déterminez, *ce qu'il falloit faire.*

L'usage de ce Problême a été indiqué au Theoreme XIX. il sert pour les enfourchemens des Berceaux, ou parties de Berceaux surhaussez ou surbaissez, ou qui sont biais, c'est-à-dire, inclinez entr'eux, supposant que leurs axes se rencontrent.

Probleme XLI.

Les Diametres de deux Cylindres qui se pénetrent de toute leur circonference sans que leurs Axes se rencontrent, & l'inclinaison de leurs côtez entr'eux, étant donnée, tracer l'Ellipsimbre formée par la rencontre de leurs Surfaces.

La Figure 192. est faite pour mettre sous les yeux la difference de ce Problême avec le précedent, qui ne consiste qu'en ce que les axes des Cylindres ne se rencontrent pas, & la Figure 193. pour la construction. *Fig.* 192. 193.

On peut distinguer deux cas dans cette proposition; le premier, lorsque le petit Cylindre tombe perpendiculairement sur le côté du grand, c'est-à-dire, sur des lignes paralleles à son axe; le second, lorsque les lignes paralleles à l'axe du petit Cylindre, tombent obliquement sur cel-

les qui sont aussi paralleles à l'axe du grand Cylindre. Si leurs côtez sont perpendiculaires entr'eux, on fera pour la préparation des quarts de cercles ou demi-cercles égaux à leurs bases, comme on a fait au Problême XXXVIII. pour le Cicloïmbre, & si leurs côtez sont obliques, on fera pour la préparation des demi-Ellipses & quarts d'Ellipses, comme à la Figure 193.

Soit E a *b* D un quart d'Ellipse de la section oblique d'un plan coupant le Cylindre D E G F, parallelement à l'axe du petit Cylindre qui pénetrent le grand, comme on voit à la Figure 192. soit aussi KH*b* la moitié de l'Ellipse faite dans le petit Cylindre par la section d'un plan tangent au grand; on divisera à volonté sa circonference aux points 1, 2, 3, 4, & par ces divisions on menera des paralleles à l'axe H*x*, qui coupe le quart d'Ellipse du grand Cylindre en *m* & *x*, plus ou moins loin du centre C, par où passe l'axe du grand Cylindre: supposant que la position du petit dans le grand Cylindre est donnée en a*b*GF, ces lignes 1 O, 2 N, *m*M, 3*n*, 4*o*, étant prolongées vers le quart d'Ellipse E*a b* D, le rencontreront aux points 1, 2, *m*, 3, 4; on menera aussi par le point H la ligne H*d*, parallele au diametre K*b*, de même que 3*e* & 4*f*, qui rencontrent le côté du Cylindre G*b* prolongé en *d* aux points *e* & *f*, cette préparation étant faite.

Fig. 194. Pour décrire l'Ellipsimbre sur la surface du grand Cylindre D E G F, on commencera par tirer une ligne *d d* parallele à son axe par le Problême XXXI. sur laquelle ayant pris le point M pour le milieu de la section, on prendra de part & d'autre de ce point, sur la ligne *dd*, les distances *b f* de la Figure 193. de la préparation que l'on portera en M*f*, *b e* que l'on portera en M*e*, & *b d* que l'on portera en M*d*, aussi de part & d'autre du point M: ensuite on fera passer par tous ces points des Ellipses qu'on tracera sur la surface du grand Cylindre, suivant l'angle de l'inclinaison du côté du petit Cylindre sur le grand, par exemple, IKL [*Fig.* 192.] ou des cercles, si le petit Cylindre tombe à angle Droit sur les côtez du grand.

Sur chacun de ces cercles ou Ellipses, on portera de part & d'autre de la ligne *dd*, les arcs de cercles ou d'Ellipse déterminez par les paralleles à l'axe du petit Cylindre, qui passent par les divisions de la section Elliptique, sçavoir *m*a de la Fig. de la préparation sur MA, & *mb* sur MB, l'arc *m* 1 en *f* 1 d'un côté & de l'autre du milieu M, & l'arc *m* 4 sur *f* 4 aussi de part & d'autre; enfin l'arc *m* 2 sur *e* 2, & *m* 3 sur *e* 3, & par les points *d*, 3, 4, B, 4, 3, *d*, 2, 1, A, 1, 2, on fera passer une courbe qui sera l'Ellipsimbre proposée sur la surface du gros Cylindre.

Pour tracer cette courbe sur le petit Cylindre, on fera la même chose qu'au

qu'au Problême précedent; ce qu'il eſt inutile de répeter, la ſeule difficulté qu'il y aura, c'eſt qu'ici les deux côtez de la Courbe n'étant pas égaux, le quart du petit Cylindre ne ſuffit pas pour donner les points des quatre parts, comme aux Figures 187. & 190. il faut avoir toutes les diſtances d'une moitié de la courbe à la tangente K*b*: ainſi ayant décrit une Ellipſe autour du petit Cylindre, telle que la feroit la ſection d'un plan tangent au grand, on la diviſera en deux depuis le point d'attouchement repreſenté dans la préparation par le point *b*, & ayant diviſé ſa demi-circonference en parties égales à celles de la demi-Ellipſe *b*HK, ſçavoir *b*4, 43, 3H, &c. on menera par chacune de ſes diviſions des paralleles à l'axe du petit Cylindre, ſur leſquelles on portera ſucceſſivement d'un côté & d'autre les diſtances de la tangente K*b* à l'arc de l'Ellipſe *ab*; ſçavoir, *o*4, *n*3, M*m*, *n*2, *o*1, Ka, leſquelles donneront des points par leſquels on tracera l'Ellipſimbre propoſée.

Si l'on vouloit avoir la projection de cette courbe ſur un plan, au lieu des arcs que l'on a tracé dans la Figure 194. en maniere de perſpective ſur le grand Cylindre, il faudroit en prendre les cordes ou demi-cordes & la conſtruction, à cela près, feroit toûjours la même.

Demonstration.

Cette conſtruction émane du même principe que les précedentes. On ſuppoſe les deux Cylindres coupez en tranches par des plans paralleles entr'eux, & à l'axe du petit Cylindre, dans lequel ils font pour ſection des Parallelogrames, dont les intervales ſont marquez par ceux des lignes 4*f*, 3*e*, H*d* qui dépendent de la diviſion qu'on a voulu faire du contour du petit Cylindre, pris ſur un cercle, s'il eſt perpendiculaire au côté du grand, ou ſur une Ellipſe, s'il eſt oblique, comme dans le cas preſent, parce qu'on ſuppoſe ce petit Cylindre coupé par un plan tangent au grand, afin d'avoir un terme d'où l'on puiſſe compter de combien chaque ligne parallele à l'axe s'avance au deſſous de ce plan, pour atteindre à la ſurface du grand Cylindre; c'eſt-à-dire, à la Courbe que ce plan fait dans ce grand Cylindre; or cette courbe eſt un cercle, lorſque le petit Cylindre eſt perpendiculaire au côté du grand, & une Ellipſe, lorſqu'il lui eſt oblique, & parce que tous les plans des tranches ſont paralleles, toutes les Ellipſes qu'ils font ſont auſſi égales entr'elles, de ſorte que dans la préparation, on fait ſervir une Ellipſe pour toutes, ainſi l'Ellipſe Ea*b* repreſente celle qui eſt faite par le plan paſſant par les points 23*e*, par 14*f* & K*b*; or dans chaque interſection des Parallelogrames du petit Cylindre & des Ellipſes du grand, il n'y a que deux points communs, ſçavoir, a*b* pour celle du milieu, 1, 4, pour l'interſection de la tranche ſuivante, & 2, 3, pour la troiſiéme, leſquelles étant eſpacées

de part & d'autre de la ligne AB, donnent les points du contour de l'Ellipſimbre, *qu'il falloit trouver.*

L'usage de ce Problême a été indiqué au Theoreme XX.

Probleme XLII.

La poſition d'un Cylindre dans un Cône qu'il pénetre, étant donnée, décrire l'Ellipſimbre formée par la rencontre de leurs Surfaces.

Fig. 195. Ce Problême comprend pluſieurs cas qui peuvent tous ſe réſoudre de la même maniere; car 1.° ou les axes du Cylindre & du Cône ſont paralleles entr'eux, 2.° ou ils ſe coupent, 3.° ou perpendiculairement ou obliquement, 4.° ou ils ne ſont pas paralleles, & ne ſe coupent pas, 5.° & alors l'axe du Cylindre eſt perpendiculaire au plan paſſant par l'axe du Cône, 6.° ou il lui eſt incliné, 7.° ou il n'entre pas totalement dans ce plan, lorſqu'il lui eſt perpendiculaire, 8.° ou il n'y entre pas auſſi, lorſqu'il lui eſt incliné.

Tous ces differens cas ſe peuvent réſoudre par la même pratique qui a été expliquée au Problême general, en coupant le Cône & le Cylindre en pluſieurs tranches par des plans paralleles entr'eux, dont la ſituation à l'égard des axes du Cône & du Cylindre eſt arbitraire: il y a cependant en cela du choix pour la commodité de l'exécution; car il convient de les ſituer de maniere qu'ils donnent toûjours les ſections les plus ſimples, nous les avons mis dans la Figure 195. perpendiculairement à l'axe du Cône, pour avoir l'interſection de deux cercles, l'un dans le Cône, l'autre dans le Cylindre, lorſque les axes SC & Xx ſont paralleles entr'eux; ſi l'on avoit diſpoſé les tranches parallelement aux axes, on auroit eu pour interſection celle d'un Parallelograme, & d'une Hyperbole qui eſt moins facile à tracer que le cercle.

Si les axes ſont inclinez entr'eux comme SC & Qq, le plan yG coupant les deux corps, donnera dans le Cône un cercle, & dans le Cylindre une Ellipſe, dont yK ſera la moitié du grand axe, & le diametre de la baſe du Cylindre le petit axe; ainſi il ne s'agit que de décrire cette Ellipſe, & la couper par un cercle qui ait pour Rayon 1i, & parce que toutes les Ellipſes qui ſeront faites par les ſections des autres plans paralleles à yy ſont égales; on peut ne décrire qu'une Ellipſe, & la couper par les cercles inégaux, qui ſeront les ſections des plans paralleles dans le Cône, en mettant leurs centres dans la diſtance où ils doivent être de celui de l'Ellipſe; par ce moyen on aura une ſuite d'arcs de cercles & d'Ellipſes, leſquels étant tranſportez ſur les ſurfaces du Cône & du Cylindre, comme nous l'avons dit aux Problêmes précedens, donneront autant de points à la circonference de l'Ellipſimbre, qu'on voudra mul-

tiplier le nombre des tranches par des ſections paralleles, cela eſt clair après les exemples des Problêmes précedens; cependant pour ne pas devenir obſcur en voulant être concis, nous en feront l'application à la pratique.

Soient, pour le premier cas où les axes ſont paralleles, les plans *y* G, Y *n* paralleles entr'eux, & perpendiculaires aux axes SC du Cône, & X*x* du Cylindre; du point I pour centre & pour Rayon 1 *i*, on décrira un quart de cercle 1 *di*, & du point H pour centre, & pour Rayon le demi diametre HG du Cylindre, on décrira un autre quart de cercle qui coupera le précedent au point Z, duquel ſi on abaiſſe une perpendiculaire ſur *y* G, on aura le point 5 pour projection du point Z, & un de ceux de l'axe courbe *b* 5 *a* de l'Ellipſimbre; on trouvera de même un autre point *f* de cet axe par l'interſection des deux cercles *oem* du Cône, & N *zn* du Cylindre; cette préparation étant faite. Fig. 195.

Pour tracer l'Ellipſimbre ſur le Cône, ayant tiré du ſommet S une ligne à ſa baſe, qu'on prendra pour le milieu de l'Ellipſimbre, on placera ſur cette ligne les points *ba* de ſes deux extremitez dans leur diſtance du ſommet S, & enſuite les points *i* & *m*, par leſquels on fera paſſer deux cercles, ſur leſquels on portera de part & d'autre de la ligne droite les arcs *i* Z & *mz*, qui donneront les points *z* & Z, par leſquels on fera paſſer à la main la courbe qui ſera l'Ellipſimbre demandée; on n'a pas fait de Figure pour cette tranſpoſition des arcs trouvez, parce qu'elle eſt à peu près la même qu'à la Figure 182. ou 185. de la Planche 16.

Pour le ſecond cas où l'axe du Cylindre tombe obliquement ſur celui du Cône, on agira de même qu'au précedent, excepté que ſur le Cylindre AVTB, où il ſe fait des Ellipſes par la ſection oblique des plans *y* G, Y *n*, on tracera des Ellipſes égales qui auront pour grand axe la ligne *yy* ou YY, & pour petit axe le demi diametre de la baſe VT du Cylindre; ainſi le point P, qui eſt à la rencontre des deux ſurfaces ſe trouvera par l'interſection du cercle du Cône, dont 1 I ſera le Rayon, & de l'Ellipſe *y* P *y*; de même que le point O par l'interſection du cercle du Cône qui a pour Rayon 2 L, & de l'Ellipſe YOY.

Si des points O & P, on abaiſſe les perpendiculaires O *o* & P *p* ſur les lignes *y* G, Y *n*, on aura les points *p* & *o*, qui ſeront la projection des rencontres des ſurfaces O & P, & ſur l'axe courbe de l'Ellipſimbre, qui ſera courbe B *po* A; cette préparation étant faite.

Si l'on veut tracer l'Ellipſimbre ſur le Cône, on tirera par ſon ſommet une ligne droite, ſur laquelle ayant placé les points B & A ſommets de la courbe, on y marquera auſſi les points I & L, par où on fera paſſer

des cercles, ſur leſquels on prendra de part & d'autre de la droite du milieu les arcs IP, LO, & l'on aura les points P & O, par leſquels & par le point A & B on tracera à la main l'Ellipſimbre demandée, comme au cas précedent.

Pour tracer la même courbe ſur le Cylindre, on commencera par tracer IN parallele à ſon axe, ſur laquelle on portera les points *b* & *a* pour les extremitez de la courbe, & les points *g* & N dans leur diſtance à ces points; on fera paſſer par les points *g*, N & *a* des cercles paralleles à ſa baſe pour le premier cas, & des Ellipſes pour le ſecond cas, & l'on portera ſur ces cercles les arcs *gz*, NZ pour le premier, & *y*P & YO pour le ſecond, pour les points a ou A on prendra la demi-circonference pour avoir les points *bz*, Z a d'un côté de la parallele à l'axe, & autant de l'autre, ou B*p*OA d'un côté, & de même de l'autre de la ligne qui paſſe par le ſommet du Cône & le milieu de la ſection; par ces points ainſi trouvez on tracera l'Ellipſimbre demandée.

Mais ſi le Cylindre étoit perpendiculaire au plan du triangle par l'axe du Cône, on ne pourroit plus faire uſage de la même conſtruction, parce que les plans coupans le Cône perpendiculairement à ſon axe, couperoient le Cylindre parallelement à ſon axe, & y feroient pour ſection des Parallelogrames, dont les côtez ne détermineroient point la rencontre des deux ſurfaces, alors il faut avoir recours aux tangentes des ſections du Cône.

Fig. 196. Soit donc [*Fig.* 196.] le Cylindre DO*pd* qui eſt perpendiculaire à l'axe SC du Cône, lequel eſt coupé par un plan paſſant par l'axe X*m* du Cylindre, & SC du Cône; on coupera l'un & l'autre de ces corps par des lignes H*n*, F*m*, IN qui donneront ſur l'axe S*c* les points *n*, *m*, N, deſquels comme centres & pour Rayons *ng*, *m*M, N*k*, on décrira des arcs de cercle *gy*, M*z*, K*x*, auſquels on tirera les tangentes *gh*, M*f*, *ki* égales aux Ordonnées de la baſe du Cylindre GH, XF, KI, & par les points *h*, *f*, *i*, on menera des paralleles à l'axe du Cylindre, juſqu'à la rencontre des arcs comme *hy*, *fz*, *ix*, leſquelles ſerviront à tracer la courbe, comme nous le dirons ci-après.

Fig. 199. Ayant tracé ſur le Cylindre une Ellipſe par les points donnez E & L par le Problême XXXIV. comme *e*, *h*, *f*, *il*, *Fig.* 199. on menera par les points *hfi* donnez à la circonference de cette Ellipſe des paralleles à ſon axe G*y*, F*z*, I*x*, ſur leſquelles on portera les longueurs trouvées *hy*, *fz*, *ix*, qui donneront ſur ces paralleles les points *y*, *z* & *x*, par leſquels & par les points *e* & *l* on tracera à la main une courbe, qui ſera celle qu'on demande.

Si l'on veut tracer la même Ellipſimbre ſur le Cône, dont le triangle

SBA de la Figure 196. eſt la ſection par l'axe, on operera comme aux cas précedens; ainſi ſuppoſant celui de la Figure 197. qui eſt plus petit faute de place dans la Planche, égal à celui de la Figure 196. on commencera par tirer du ſommet S à la baſe une ligne droite quelconque SB, ſur laquelle on portera les diſtances SE, S*g*, SM, S*k*, SL de la Figure 196. & ayant tracé ſur la ſurface de ce Cône des cercles paſſans par les points *g*, *m*, *k*, on prendra de part & d'autre de ces points, les arcs *gy*, M*z*, *kx*, de la Figure 196. qu'on portera de part & d'autre de la ligne SB, & l'on aura des points *eyzxlxzye*, par leſquels on tracera à la main la courbe propoſée, ſuppoſant comme je viens de le dire, un rapport entre les Figures 196. & 197. qu'on n'a pû obſerver faute de place; mais comme il ne s'agit ici que d'une explication, on peut ſuppoſer égales des Figures inégales. *Fig.* 197.

Lorsque le Cylindre qui pénetre le Cône eſt perpendiculaire à ſon triangle par l'axe, & que les axes ne ſe rencontrent pas, les tangentes aux arcs de cercle des ſections faites par les plans coupans les Cônes par tranches paralleles, ne ſont pas égales de part & d'autre des côtez du Cylindre prolongez comme dans le cas précedent; c'eſt pourquoi il faut diſpoſer la Figure comme à celle de 200. *Fig.* 200.

Ayant placé le centre C de la baſe du Cylindre, par lequel paſſe l'axe qui tombe perpendiculairement au triangle BSA par l'axe du Cône; on décrira de ce centre un cercle *or*DRO que l'on coupera auſſi bien que le Cône par des plans paralleles entr'eux, & à l'axe du Cylindre & perpendiculaires à celui du Cône, leſquels plans ſont repreſentez par les lignes 1, 4, 2, 5, 3, 6, qui coupent le cercle de la baſe du Cylindre aux points *or*, *d*D, OR, par leſquels on tirera à ces lignes des perpendiculaires indéfinies *o*T, RG, *d*E, DF; enſuite ayant décrit des demi-cercles 1*h*4, 2F5, 3G6, on leur menera des tangentes L*h*, EF, TG paralleles à leurs diametres 14, 25, 36, leſquelles détermineront les longueurs des côtez du Cylindre hors du Cône, pour les paralleles à l'axe qui paſſent par les points *od*O, *r*DR; ainſi le côté du Cylindre qui paſſe par le point *d* ſort du Cône de la longueur *y*E, celui qui paſſe par le point O ſort du Cône de l'intervale *x*T, & ainſi des autres; & parce que les points G & F ſont très près du point d'attouchement des tangentes, ils ſortent très peu du Cône.

Presentement pour tracer cette courbe ſur le Cylindre, on operera de même qu'à la Figure 199. excepté qu'en celle-là nous avons ſuppoſé les diſtances de l'Ellipſe qui coupe le Cylindre égales, de part & d'autre de ſon axe, & qu'ici elles ſont inégales.

Pour tracer la même courbe ſur le Cône, on ſuivra auſſi la même mé-

thode qu'à la Figure 197. excepté que l'on ne portera pas les meſures des arcs paralleles ſur les deux côtez de la ligne SB, mais tous d'un côté.

Ou bien on tracera ſur le Cône une Hyperbole HY tangente au cercle de la baſe du Cylindre, pour ſervir de terme, d'où on meſurera les arcs qui coupent les côtez du Cylindre; car les points de la courbe ſeront toûjours dans l'interſection des cercles des tranches du Cône paralleles à la baſe, & des côtez du Cylindre paralleles à ſon axe.

La même operation ſert pour les cas où le Cylindre n'entre dans le Cône que d'une partie de la circonferance, comme on le voit dans la
Fig. 200. même Figure 200. au cercle D*g*6.

Secondement, ſi au lieu de faire les tranches paralleles par des plans perpendiculaires à l'axe du Cône, on veut les faire paralleles à l'axe du Cylindre, la ſolution du Problême ſera également Geometrique, mais un peu plus difficile; parce qu'au lieu de cercles dans le Cône, on aura pour ſection des Ellipſes, des Paraboles ou des Hyperboles, ſuivant l'inclinaiſon de l'axe du Cylindre à celui du Cône; mais auſſi on n'aura dans le Cylindre que des Parallelogrames.

Afin qu'on puiſſe choiſir la maniere qui convient le mieux, nous allons donner un exemple de la courbe formée par la pénetration d'un Cylindre à l'axe du Cône.

Fig. 201. Soit [*Fig.* 201.] le triangle par l'axe du Cône *b*S*a*, l'axe de ce Cône SC, celui du cylindre X*c* qui le rencontre, ou qui ne le rencontre pas, ſuppoſons premierement qu'il le rencontre; la ſection plane de ce Cylindre par un plan perpendiculaire à celui qui paſſe par ſon axe, & ſuivant la rencontre avec l'axe SC, ſera une Ellipſe, dont EL ſera le grand axe, & le petit axe ſera le diametre DF de la baſe du cylindre. Soit la moitié de cette Ellipſe E*d*L que l'on traverſera par autant de lignes droites paralleles que l'on voudra avoir de doubles points de la courbe comme 4:1, 5, 2, 6, 3, qui couperont l'axe aux points *o*, *c*, O, par leſquels on menera des paralleles à l'axe du Cylindre juſqu'à la rencontre du côté S*b* du Cône, comme O*g*, *c*I, *o*H; chacune de ces lignes ſera une partie de l'axe de la courbe qui ſera faite dans le Cône par la ſection d'un plan parallele à l'axe du Cylindre, & les points *g*, I, H en ſeront les ſommets; dans l'exemple preſent ces courbes ſeront des Ellipſes, parce que les lignes *g*O, IC, H*o* prolongées, rencontreront en dedans les deux côtez du Cône S*b* & S*a* prolongez, mais ſi le Cylindre avoit été incliné ſuivant la ligne E*e* parallele à SA, ces courbes ſeroient des Paraboles. Quelles que puiſſent être ces ſections, elles ſeront toûjours ſemblables entr'elles, quoique inégales; on a donc l'axe & le ſommet de ces ſections, & l'on a

aussi deux points à leur contour que donne une double Ordonnée 4, 1, 5, 2, 6, 3, car à cause de l'uniformité du Cône on peut concevoir le côté SO du Cône en l'air sur le côté SC dans un plan perpendiculaire au plan SC*a*, comme on le voit representé en perspective dans la Figure 198. mais parce qu'on ne peut pas faire cette préparation sur le solide, on décrira ces courbes sur le plan du triangle *b*S*a*, en portant les longueurs des axes O*g*, *c*I, *o*H sur l'axe SC en OG, *c*C & *o*K, & par les points 4GI, 5C2, 6K3, on décrira les Ellipses ou les Paraboles, ou Hyperboles que les plans des tranches font dans le Cône, & par les points R*dr* des Ordonnées de la demi-Ellipse E*d*L, on menera des paralleles à l'axe SC jusqu'à la rencontre des courbes 4G*i*, 5C2, 6K3, aux points *p*, *q*, *v*.

Cette préparation étant faite, on pourra tracer l'Ellipsimbre sur le Cône, en traçant une ligne SB [*Fig.* 198.] de son sommet S à la base pour servir de milieu à la courbe, sur laquelle ayant porté les longueurs S*e*, S*g*, SI, SH, S*l* de la Figure 201. & sur les côtez S*b*, S*a* de la Figure 198. des longueurs égales à S4, S1, S5, S2, S6, S3: on tracera sur la surface du Cône les Ellipses, Paraboles ou Hyperboles qui doivent passer par ces trois points, sur lesquelles on portera de part & d'autre de la ligne SB, les arcs K*u*, C*q*, G*p*, lesquels donneront les points par lesquels & les deux sommets *e* & L, on tracera à la main l'Ellipsimbre demandée. *Fig.* 198.

Pour tracer la même courbe sur le Cylindre, il faut ajoûter à la préparation des tangentes à ces arcs, comme KT pour avoir la distance de ces tangentes aux arcs des courbes formées par les plans des tranches sur les côtez du Cône, & alors on s'en servira pour décrire l'Ellipsimbre sur le Cylindre, comme on a fait à la Figure 197. il faut encore remarquer ici que les Figures 201. 198. n'ont pas été faites d'une grandeur rélative, quoiqu'on les suppose telles, faute de place dans la Planche.

Si l'axe du Cylindre ne rencontroit pas celui du Cône, comme à la Figure 200. mais que l'Ellipse faite par le plan du triangle par l'axe coupant le Cylindre fut à côté, il faut en prolonger les Ordonnées jusqu'à l'axe & chercher les sommets des sections, & transporter la ligne du milieu à côté de celle qui passe par les sommets des sections coniques de la quantité dont elle doit être éloignée du plan passant par l'axe de l'Ellipse, qui fera dans le Cône une Hyperbole, prenant cet intervale sur l'arc de la section conique qui coupe cette Hyperbole; ce qui n'est pas difficile à concevoir par les exemples que nous avons donnez pour trouver les points des Ellipsimbres sur les arcs des sections coniques formées par les tranches paralleles à l'axe du Cylindre: de sorte que la préparation peut ser-

vir à tracer les ſections ſolides, où le Cylindre n'entre pas dans le Cône de toute ſa circonference.

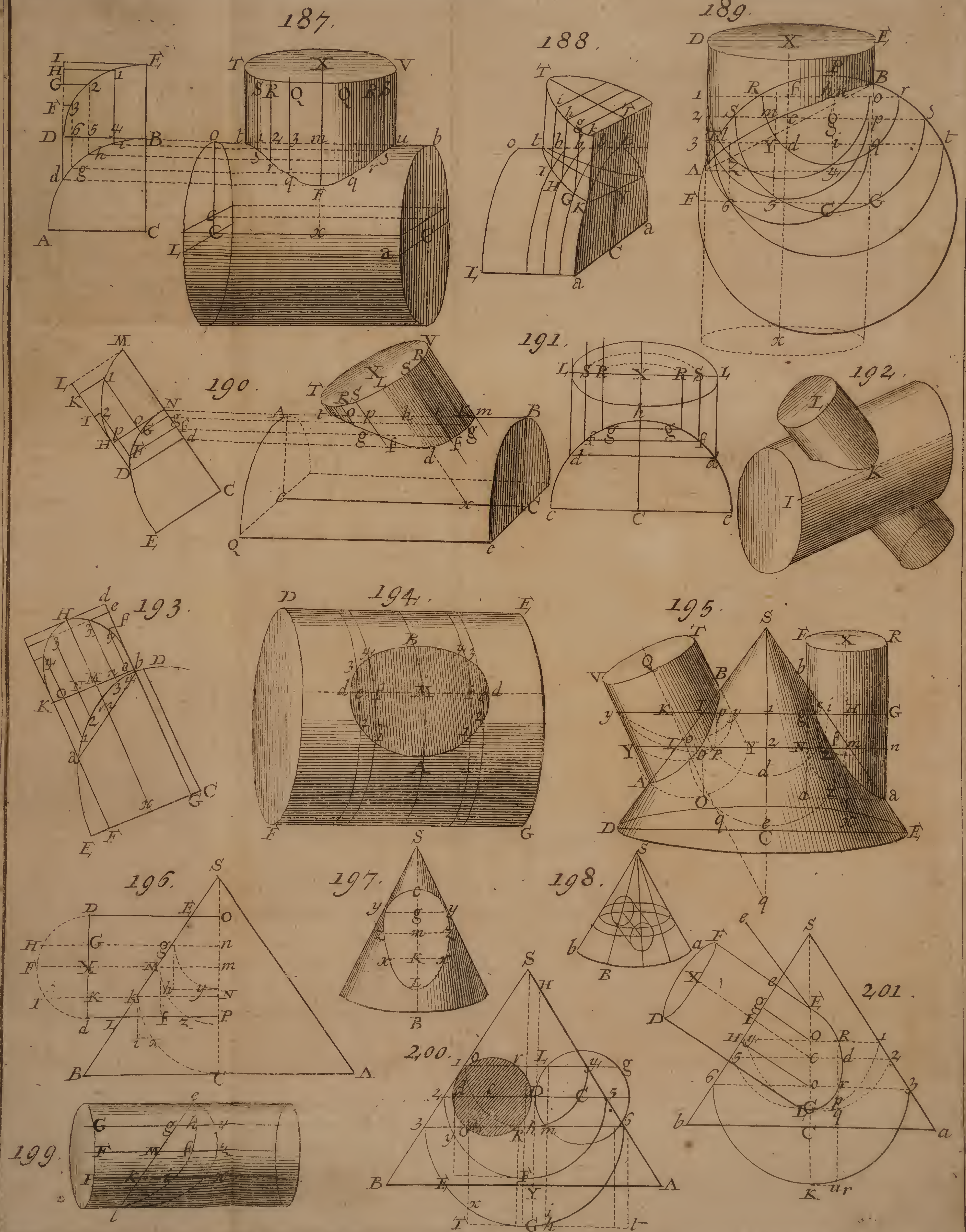
DEMONSTRATION.

Le même principe qui a ſervi de baſe aux démonſtrations des Problêmes précedens, s'applique ſi naturellement à celui-ci qu'il ne demande qu'une médiocre attention.

Premierement pour la Figure 196. il faut ſe repreſenter que les lignes gh, Mf, ki qui ſont dans le plan du triangle BSA lui doivent être perpendiculaires, de même que les lignes GH, XF, KI qui ſont les Ordonnées au diametre Dd de la baſe du Cylindre, & les correſpondantes que l'on a fait égales, doivent auſſi être cenſées paralleles, & dans le même plan que les arcs de cercle gy, Mz, kx; de ſorte que ſi l'on imagine des lignes paralleles à l'axe Xm du Cylindre paſſant par les points hfi qui ſont à la ſurface, ces lignes qui en ſeront des côtez, rencontreront les arcs en certains points, comme y, z, x, qui ſeront ceux de l'immerſion du côté du Cylindre dans le Cône, par conſéquent communs aux deux ſurfaces, & à la circonference de la courbe formée par leur interſection, donc les arcs gy, Mz, kx ſont la meſure de la diſtance des points de l'Ellipſimbre à ſon axe droit EL, ſur la ſurface du Cône.

Mais parce qu'on ne peut pas prendre les mêmes meſures dans le cylindre, lorſqu'on veut tracer la même courbe à la ſurface, on a recours à la ſuppoſition d'un plan tangent au Cône, & perpendiculaire à celui qui paſſe par l'axe du cylindre, & le côté EL du Cône, lequel plan tangent fait dans le cylindre une Ellipſe, parce qu'il le coupe obliquement ſuivant la ligne EL, qui eſt inclinée à l'axe Xm: or cette Ellipſe eſt toute hors du Cône, & les lignes gh, Mf, Ki ſont des Ordonnées à ſon axe EL, puiſqu'elles lui ſont ſuppoſées perpendiculaires, & qu'elles ont été faites égales à celle du cercle de la baſe du cylindre; donc la diſtance des extremitez de ces Ordonnées aux arcs de cercle du Cône, priſes ſur des paralleles à l'axe du cylindre, donne exactement les points d'immerſion des côtez paſſant par les points hfi de la circonference de l'Ellipſe plane, tangente au Cône; donc ces diſtances ont dû être portées, comme il a été dit à la Figure 199. pour avoir les points de l'Ellipſimbre *qu'il falloit décrire.*

Ce que nous pouvons ajouter touchant les pratiques indiquées par les Figures 200. & 201. ne ſera qu'une plus ample explication de la premiere: il faut toûjours ſe repreſenter que par le moyen des plans paralleles coupant la baſe du cylindre & le Cône en même tems, on s'eſt donné des points à la ſurface du cylindre, comme o, r, D, &c. *Figure* 200. &


187.
188.
189.
190.
191.
192.
193.
194.
195.
196.
197.
198.
199.
200.
201.

200. & R*dr* Figure 201. par lesquels on doit faire passer des paralleles à l'axe du cylindre pour avoir des côtez marquez à la surface; & parce que ces côtez dans la supposition de la Figure 200. sont perpendiculaires au plan du triangle par l'axe, ils n'y sont exprimez suivant les Régles de la projection que par un point; il faut donc les coucher sur le même plan de ce triangle, aussi bien que les arcs des sections circulaires du cône, qui n'y sont exprimées suivant les mêmes Régles de la projection 1 : 4, 2 : 5, 3 : 6, & par ce moyen on trouve les intersections de ces arcs avec les côtez du cylindre, lesquelles donnent des points communs aux deux surfaces; c'est-à-dire, des points de la Courbe que l'on doit tracer; & par conséquent on est obligé de supposer des plans tangens au cône, comme nous venons de le dire, il faut tirer des tangentes à chacun des arcs des sections du cône, lesquelles seront toutes dans le même plan qui est supposé couper le cylindre & faire une Ellipse.

La derniere pratique a été suffisamment expliquée par la construction, & par ce qui a été dit ci-devant.

L'usage de ce Problême a été indiqué au Theoreme XXVI. il se présente assez souvent dans les Fortifications où les murs sont presque toûjours en Talud, & où il y a des arondissemens, qui sont par conséquent des portions de cônes tronquez, dont les sommets sont quelquefois en bas, comme aux arondissemens des Contrescarpes, & des flancs concaves, & quelquefois en haut, comme aux Tours en Talud, & arondissemens des Orillons; dans l'Architecture civile, il est plus rare.

Des Ellipsimbres composées.

Probleme XLIII.

Tracer une Ellipsimbre composée, formée par la pénetration d'une Sphère & d'un Cylindre, dont la circonference n'entre qu'en partie dans la Sphère.

Ce Problême se résoudra comme tous les précedens par notre méthode generale, en traçant des perpendiculaires à l'axe du cylindre [*Fig.* 202.] qui traversent aussi la sphère, par lesquelles on suppose autant de plans paralleles entr'eux, & perpendiculaires au plan passant par l'axe du cylindre, & le centre de la sphère, dont les sections seront des cercles dans l'un & l'autre de ces corps. Pla. 18. *Fig.* 202.

Soit donc la sphère AB*kb*A pénetrée par le cylindre DEGF, dont l'axe est XX. par lequel, & par le centre C de la sphère, ces deux corps sont coupez par un même plan: on menera par le centre C un diametre PC*p*

parallele à cet axe, & ayant tiré à ces deux lignes autant de perpendiculaires qu'on voudra *a* 1, *b* 2, *d* 3, *e* 4, &c. des points *a b d e*, &c. pour centres & pour Rayons *ah*, *bi*, *dk*, &c. on décrira autant d'arcs de cercles (les quarts suffisent) & des points *o*, *p*, *q*, *r*, &c. pris sur l'axe du cylindre pour centres, & pour Rayons les demi-diametres de la base *o* 1, *p* 2; on tracera autant d'autres arcs de cercle jusqu'à la rencontre des précedens faits dans la sphère sur les mêmes diametres prolongez. Les points de leurs intersections *x* & *x* seront communs aux deux surfaces, & si de ces points on abaisse des perpendiculaires aux mêmes diametres, on aura leur projection sur le plan passant par l'axe du cylindre & le centre de la sphère, sur lequel ils donneront autant de points de l'axe courbe de la section P*yyyp*.

Cette préparation étant faite, on s'en servira pour tracer l'Ellipsimbre composée, comme on a fait pour les Ellipsimbres simples, en traçant autant de cercles sur la sphère & sur le cylindre, commençant à compter la mesure des arcs *hx*, *ix*, K*x*, depuis un cercle majeur., dans lequel seront les deux Poles P & *p* de tous ces arcs; & sur le cylindre par tracer un côté EG ou DF, d'où l'on mesurera à droite & à gauche les arcs 1*x*, 2*x*, 3*x*, 4*x*, ou leur supplement, comme il conviendra le mieux, parce qu'il est toûjours plus commode de prendre & de porter les mesures des arcs qui sont au dessous de 90. degrez, que ceux qui sont plus grands, à cause de la rondeur du cylindre.

La démonstration de ce Probléme est trop semblable à celle des précedens pour s'y arrêter; chaque arc de cercle qu'on a fait ici, dans le plan du Papier, qui est celui qui passe par l'axe du cylindre, & le centre de la sphère, peut être relevé à angle Droit sur ce plan sur les lignes qui en sont les diametres ou les Rayons, sans qu'il arrive aucun changement à leur intersection *x*, & à leur projection *y*, qui est dans le méme plan, & dans celui de l'arc.

L'usage de ce Problême a aussi été indiqué au Theoreme XI. il est inutile d'en répeter l'explication.

Probleme XLIV.

Tracer une Ellipsimbre composée, formée par la pénetration de deux Cylindres, dont la circonference de l'un n'entre qu'en partie dans l'autre.

Il y a deux cas dans ce Problême, qui n'en changent point la construction; car les cylindres se coupent à angles Droits, ou obliquement, de quelque façon qu'ils se croisent, il faut toujours supposer qu'ils sont coupez par des plans tangens à chacun des cylindres qui les coupent ré-

ciproquement, & perpendiculairement aux plans paſſans par chacun de leurs axes; de ſorte que ſi les cylindres ſe croiſent à angle Droit, les ſections de ces plans tangens à un des cylindres feront dans l'autre des cercles, & s'ils ſe traverſent obliquement, les ſections faites par les mêmes plans feront des Ellipſes dans l'un & l'autre cylindre; cela ſuppoſé, nous choiſiſſons à la Figure 203. le cas où ils ſont perpendiculaires pour plus grande facilité. *Fig.* 203

Soit le cylindre YLNI vû par la baſe repreſenté par le cercle AE*a*B, lequel eſt pénetré par un autre cylindre *d*A*a*D, qui n'entre pas dans le premier de toute la circonference; en ſorte qu'il reſte une partie FB de ſon diametre au dehors, laquelle répond au double de l'arc D*g* de la baſe D*ga*, étenduë ici par ſuppoſition ſur le plan du Parallelograme DA paſſant par ſon axe *ll*.

Ayant tiré un diametre A*a* ſur la baſe du premier cylindre BAE*a*, lequel eſt ici confondu avec le côté du ſecond, quoiqu'il puiſſe paſſer entre C & B, ou entre C & E; on tirera ſur une des extremitez de ce diametre la perpendiculaire *d*A, ou *a*D qui repreſentera le plan tangent au grand cylindre, & le diametre de la baſe du petit, ſur lequel on tracera le demi cercle D*ma* qui repreſentera la moitié de cette baſe, laquelle doit cependant être à angle Droit ſur le plan du Parallelograme *d*A*a*D, mais dont le changement de ſituation n'en fait aucun aux interſections des lignes qu'on en doit tirer.

On diviſera enſuite l'une des deux baſes des cylindres, en parties égales ou inégales; nous diviſerons, par exemple ici, l'arc du demi cercle *a*BA, ou ſeulement le quart du cercle BA en parties égales, ou inégales B*r*, *rq*, *qp*, *pn*, *n*A, & par ces points *npqr*, on tirera des paralleles à l'axe *ll* du cylindre DA prolongées juſqu'à l'arc de la baſe *dm*A, ou D*ma*, qu'elles rencontreront aux points *g*K*mo*.

Cette préparation étant faite, ſi l'on veut tracer l'Ellipſimbre ſur le grand cylindre YN, on commencera par faire à ſa ſurface un cercle parallele à ſa baſe, n'importe où, ſi les cylindres ſe coupent à angle Droit, ou une Ellipſe, ſuivant l'obliquité de la direction des côtez du ſecond cylindre qui le pénetre. On tranſportera ſur ce cercle les diviſions B*r*, B*q*, B*p*, B*n*, en *b*R, *b*Q, *b*P, *b*N de part & d'autre du point *b*, qui a été pris à volonté à la ſurface du cylindre, ſi la ſection eſt un cercle, ou un point correſpondant au point B, s'il eſt une Ellipſe; & par les points *b*RQPN*a* on menera autant de paralleles à l'axe du grand cylindre; puis ayant tracé un cercle pour le milieu de la ſection, ſi on ne l'a pas fait du premier coup, on portera ſur ces paralleles à l'axe toutes les Ordonnées de la baſe du petit cylindre de part & d'autre du cercle pris pour

le milieu, comme ici a*a* fuivant l'ordre de leur pofition à l'égard du point B milieu de la divifion; ainfi on portera l'Ordonnée *cf* provenant du point B en *cf* fur le gros cylindre de part & d'autre du point *c*, *gh* quatre fois en *gh*, fur les deux paralleles R*h*, R*h*; on continuera de même en portant *i*K deux fois fur chaque parallele QK de part & d'autre des points *i* & *i*, & ainfi de fuite; & l'on aura les points *o*, *m*, K, *h*, *f*, *h*, K, &c. par lefquels on tracera à la main l'Ellipfimbre demandée.

Si l'on veut tracer la même courbe fur le cylindre D A; on tracera un cercle à la furface par un point pris à volonté, ou une Ellipfe, fi les deux cylindres fe coupent obliquement, on divifera la circonference de ce cercle en parties égales à celles de la bafe *dm* A, au haut de la Figure, en portant de fuite les arcs *df*, *fh*, *h*K, K*m*, *mo*, & recommençant à l'autre demi cercle; & par tous ces points de divifions ayant tracé autant de paralleles à l'axe du cylindre, on portera de part & d'autre du cercle pris pour le milieu les longueurs des demi-cordes 1 *r*, 2 *q*, 3 *p*, 4 *n*, qui donneront des points *r*, *q*, *p*, *n*, par lefquels on tracera la courbe qui eft l'Ellipfimbre demandée, laquelle fera égale à la précedente, quoique fur un cylindre different.

Demonstration.

Pour démontrer ce Probléme, il fuffit de reprefenter les differens effets des fections des plans qui coupent les deux cylindres par tranches, fuivant notre principe general; car fi l'on imagine les deux cylindres coupez par des plans paralleles entr'eux, & à un des deux axes, il eft évident qu'ils feront des Parallelogrames dans celui où les tranches font paralleles à fon axe, & des cercles dans l'autre, fi les cylindres fe pénetrent à angle Droit, ou des Ellipfes égales s'ils fe coupent obliquement; mais comme l'on peut fuppofer les fections des plans fucceffivement paralleles aux deux axes; on aura des Parallelogrames & des cercles dans chaque cylindre qui donneront par differends moyens les mêmes points de la courbe, ce que nous avons fait dans cette conftruction pour abreger; car nous pouvions également divifer le fecond cylindre D A en cercles paralleles à *d*A, & prendre fur chacun, à commencer du côté *d*D, les arcs correfpondans à chacun de ces cercles, raffemblez fur la bafe *dm* A, c'eft-à-dire, qu'au cercle du milieu paffant par F & B, on auroit porté deux fois l'arc *df*, enfuite aux deux Collateraux deux fois l'arc *dh*, & ainfi de fuite; mais comme l'ufage des lignes droites eft plus commode & plus exact dans l'exécution, que celui des courbes tracées fur des furfaces courbes, on a choifi les unes preferablement aux autres, puifque l'une & l'autre maniere doit également donner les points du contour de l'Ellipfimbre, *qu'il falloit trouver.*

USAGE.

Nous avons fait remarquer au Theoreme XXI. que l'usage de cette courbe étoit assez fréquent dans les ceintres des Voutes, parce que la plûpart sont cylindriques, & que souvent une Voute n'est percée que par une portion de cylindre, comme il arrive aux abajours & aux descentes de Cave.

Des Ellipsoïdimbres.

Probleme XLV.

Tracer une Ellipsoïdimbre formée par la pénetration de la Sphère & du Cône, dont l'axe ne passe pas par le centre de la Sphère.

La solution de ce Problême étant toûjours la même, c'est-à-dire, fondée sur le même principe; il ne s'agit que de tracer des lignes paralleles entr'elles sur le plan qui passe par l'axe du Cône, & le centre de la sphère, & qui soient perpendiculaires à cet axe, lesquelles seront les diametres des cercles, que les plans passans par ces lignes perpendiculairement au triangle par l'axe du Cône, feroient dans le Cône & dans la sphère; les interfections des cercles du Cône avec ceux de la sphère, qui sont sur le même plan, donneront les points de la Courbe sur les surfaces des deux corps, ausquelles ils seront communs, & les perpendiculaires abaissées des points d'intersection des arcs sur leurs diametres communs donneront leur projection, & les points de l'axe courbe de l'Ellipsoïdimbre; la Figure 204. fait voir que c'est ainsi qu'on a tracé l'axe courbe A*d*B par une pratique tout-à-fait semblable aux précedentes, sans qu'il soit nécessaire d'y ajoûter une plus longue explication, qui ne pourroit être utile qu'à ceux qui liroient ce Problême, sans avoir lû auparavant quelques-uns des précedens; il suffit de dire en leur faveur que le point *y* est trouvé par l'intersection des arcs de cercle *d*E*x* & *gfx*, ayant abaissé du point *x* la perpendiculaire *xy* sur le diametre commun E*f* des arcs faits, l'un du centre *d* pris sur le diametre de la sphère ID, & l'autre du centre *g* pris sur l'axe du Cône S*h*. *Fig. 204.*

Quand nous disons que les plans qui forment les tranches des deux corps doivent être perpendiculaires à l'axe du Cône, on conçoit bien que ce n'est que pour plus de commodité dans l'exécution, comme nous en avons déja prévenu le Lecteur ci-devant, parce qu'alors toutes les sections dans le Cône étant des cercles, sont les Figures les plus simples & les plus faciles à décrire; car rien n'empêche qu'on ne fasse les tranches paralleles à l'axe; mais alors leurs plans formeroient des Hyperboles

dans le Cône; de ſorte que les points de l'Ellipſoïdimbre ſeroient à l'interſection de differentes Hyperboles, avec differents cercles, j'entends de differentes grandeurs; car les Hyperboles ſeroient toûjours ſemblables, étant formées par des plans paralleles entr'eux. Rien n'empêcheroit, de même qu'on ne fit les tranches inclinées à l'axe du Cône, mais alors les points de la courbe pourroient être à l'interſection des cercles de la ſphère, & des trois autres ſections coniques, Ellipſes, Paraboles ou Hyperboles, ſuivant l'inclinaiſon des plans coupans à l'égard de l'axe du Cône; car le centre de la ſphère étant donné dans le triangle par l'axe du Cône, on parviendroit toûjours au même but, mais par des voyes plus embaraſſantes; ce qu'il faut éviter.

L'usage de ce Problême eſt indiqué au Theoreme XIV. pour les enfourchemens des Lunettes ebraſées, ou voutes en Canonieres, qui rachetent une Voute ſphérique, ou d'une Trompe conique qui rachete un Cul-de-four.

Probleme XLVI.

Décrire une Ellipſoïdimbre formée par la pénetration du Cône dans le Cylindre, à la rencontre de leurs Surfaces.

Soit [*Fig.* 205.] le cercle KBA*i*, qui repreſente la baſe du cylindre, & le triangle SD*d*, celui qui eſt la ſection du Cône par ſon axe SC, lequel paſſe, ou ne paſſe pas par le centre X de la baſe du cylindre: les interſections de ce cercle avec le triangle donnent les points communs aux deux ſurfaces du Cône & du cylindre; ſçavoir, deux points dans ſon immerſion AB, & deux ſans ſon émerſion *i*K, leſquels ſont par conſéquent à l'Ellipſoïdimbre.

On diviſera l'arc BA en autant de parties égales ou inégales que l'on voudra, par leſquelles on tirera des perpendiculaires à l'axe SC du Cône, comme *gn* 1, *eo* 2 ou *em* 3, & des points *g* & *e* pour centres & pour Rayon la partie qui eſt compriſe dans le Cône *g* 1, *e*2 ou *e*3, on décrira des arcs de cercle 1R, 2*u*, 3*x*, & par les points *nom* des diviſions, on menera des paralleles à l'axe SC juſqu'à la rencontre de ces arcs, qu'elles couperont aux points R, *u*, *x*, leſquels ſeront au contour de la courbe; ſi l'on ſuppoſe ces arcs relevez en l'air perpendiculairement au triangle par l'axe ſur leurs diametres.

Pour faire uſage de cette préparation dans la deſcription de l'Ellipſoïdimbre ſur le cylindre, on tracera un cercle à ſa ſurface, pour ſervir de milieu à la Courbe, par exemple GH, ſur lequel ayant tranſporté les diviſions de l'arc BA, à commencer d'un point Q pris pour le point C de la préparation, on portera C*o* & C*p*, en Q*o* & Q*p*, C*n* en Q*n*, & C*m*

en Q*m*, & par les points *nopm* on menera des paralleles à l'axe du cylindre, ſur leſquelles à commencer du cercle GH, on portera de part & d'autre de ce cercle les Ordonnées des arcs 1 R, 2*u*, 3*x*, qui ſont *n*R en *rn*, *ou* en *ou*, *mx* en *mx*, & par les points *rux*, &c. trouvez à la ſurface du cylindre, on tracera à la main une courbe qui ſera l'Ellipſoïdimbre propoſée.

Secondement, ſi on veut tracer la même courbe ſur le cône, on tirera du ſommet S deux côtez à ſa ſurface diametralement oppoſez, comme SD S*d*; on prendra ſur chacun d'eux, les diſtances SB, SA, & SK S*i*, ſi l'on veut tracer la petite ſection, & ſur le côté SD ayant porté les intervales B1, B2, on tracera par les points 1. & 2. des cercles paralleles à la baſe, ſur leſquels on portera de part & d'autre de ce côté, les arcs 1R, 2*u*, & dans l'autre côté auſſi de part & d'autre l'arc 3*x*, & par les points R*ux*, on tracera ſur le cône à la main, ou avec une Régle ou Baguette ronde & pliante, la courbe qui ſera l'Ellipſoïdimbre demandée.

Si l'axe du cône étoit incliné au côté du cylindre, il eſt clair qu'au lieu de cercles, il faudroit tracer des Ellipſes.

La Figure fait voir auſſi d'un coup d'œil, comment on doit faire la projection de cette courbe, en tirant par les points donnez *nom* des paralleles à l'axe du cône, leſquelles étant traverſées par une perpendiculaire GH ſur le même plan, ſi l'on porte de part & d'autre de cette ligne ſur chaque parallele l'Ordonnée correſpondante du cercle fait par chaque tranche, on aura les points T, *r*, *u*, *x*, *t*, &c. par leſquelles menant une courbe, on aura la projection de l'Ellipſoïdimbre demandée.

La démonſtration de ce Problême eſt facile à apercevoir, ſi l'on ſe repreſente les arcs 1R, 2*u*, 3*x* élevez perpendiculairement ſur leurs diametres, & ſur le plan du triangle par l'axe du cône ; car alors les Ordonnées *n*R, ou *mx* repreſentent les côtez du cylindre qui paſſent par les points R, *u*, *x*, de la ſurface du cône, où ſont leurs interſections; & par conſéquent les points communs aux deux ſurfaces, qui ſont au contour de l'Ellipſoïdimbre ; *ce qu'il falloit trouver.*

Nous avons indiqué au Theoreme XXVI. l'uſage de cette courbe, nos *Embraſures* dans les Tours, ou dans les *Flancs concaves* ſans Talud, ou des Portes ebraſées dans les murs arondis par leurs plans ſans Talud, ſont des portions de cônes qui pénetrent des cylindres.

Probleme XLVII.

Décrire une Ellipſoïdimbre formée par l'interſection des Surfaces de deux Cônes, dont les Axes ſe coupent.

Cette courbe ſe décrira par notre méthode generale, en coupant les deux cônes par des plans paralleles entr'eux, & perpendiculaires à l'axe de l'un des deux; la courbe ſera à l'interſection des cercles & des Ellipſes, dont on a les centres & les diametres ou Rayons, & les axes des Ellipſes que l'on trouvera dans le plan qui paſſera par les deux axes; la Figure 207. & ce que nous avons dit tant de fois en pareilles conſtructions ſuffiſent pour mettre cette pratique ſous les yeux.

Fig. 207.

L'usage de ce Problême eſt principalement pour les Embraſures ou Portes ebraſées en Tour creuſe ou ronde, & en Talud, ſuppoſant quelles ſoient Droites, c'eſt-à-dire, que leur axe ou ligne de direction, ſoit perpendiculaire à la tangente du mur arondi, ou à la corde qui eſt le diametre de la Porte ou Embraſure; ſi la direction eſt rampante, ce ſont deux cônes dont les axes ſe coupent obliquement.

Des Ellipſoïdimbres compoſées.

Probleme XLVIII.

Tracer une Ellipſoïdimbre compoſée ſur les Surfaces du Cône & de la Sphère, qui ſe pénetrent.

La ſolution de ce Problême n'a rien de particulier, que la maniere de trouver les axes droits des deux parties des courbes qui ſe croiſent pour n'en faire qu'une des deux; ce qui détermine leurs points d'inflexions dans le plan paſſant par l'interſection de ces deux axes, perpendiculairement à celui qui paſſe par l'axe du cône.

Fig. 206. Soit la Figure 206. la ſection d'un cône par ſon axe, & d'une ſphère par ſon centre; ſi l'on tire du ſommet S une tangente STD au cercle de la ſphère PTH, les lignes tirées des points E & H, où la ſphère coupe le cône au point d'attouchement T, ſeront celles que l'on cherche, & le point *y*, projection du point *x*, interſection des arcs T*x* de la ſphère fait du centre F, & G*x* du cône du centre *m*, ſera celui de l'inflexion formée par la rencontre de deux portions d'Ellipſoïdimbre de la partie ſuperieure & de l'inferieure du cône; les autres points ſe trouveront à l'ordinaire par l'interſection des arcs de la ſphère, dont les centres ſont ſur ſon diametre P*p* parallele à l'axe du cône, & des arcs des ſections du cône, dont les centres ſont ſur ſon axe S*m*.

Application

Application des Pratiques précedentes aux Courbes quelconques formées par les interſections des Cylindres, & les Cônes.

Puisque l'on connoît que les ſections des ſphères, ſphèroïdes, cônes & cylindres faites par des plans, ſont toujours du nombre de celles qu'on appelle coniques qui ne ſortent jamais du ſecond degré, & que lorſqu'ils ſont paralleles, elles ſont toujours ſemblables: quelque puiſſe être la ſection de ces corps qui ſe pénetrent, ſoit à l'égard de leurs axes, ou de leurs côtez, on trouvera toujours ſur chaque tranche l'interſection de deux de ces courbes, qui donnera deux points de la courbe plane ou à double courbure, qui ſe forme par la rencontre des deux ſurfaces; ce qui ſuffit pour ſuppléer dans la pratique à ce qui peut manquer à notre Theorie, concernant les Paraboloïdimbres, Hyperboloïdimbres ou autres poſſibles, comme on voit aux Figures 207. & 208. *Fig.* 207. 208.

De la deſcription des Helices & Limaces.

QUOIQUE les Helices ne ſoient pas du nombre de ces Courbes qui ſont produites par la ſection des corps, auſquelles nous nous ſommes bornez; elles ſont ſi uſuelles en Architecture, qu'on a beſoin très ſouvent de les tracer.

Le mot *d'Helice* vient du Grec *Heliſo*, c'eſt-à-dire, *circumvolvo*, je tourne autour; quelques Mathematiciens ont appliqué ce nom à la ſpirale, qui eſt une courbe plane, c'eſt-à-dire, décrite ſur un plan; mais la plûpart l'ont reſervé pour celles qui s'élevent au deſſus d'un plan en tournant autour d'un corps, comme le Lierre, les Liſerons & les *Convolvulus*, autour d'un Arbre. Pour moi qui tâche d'éviter les periphraſes, j'en reſſerre la ſignification à celles qui tournent autour d'un corps cylindrique ſans s'approcher de leur axe, pour les diſtinguer de celles qui en approchent, que j'appelle *Limaces*, en quoi je la diſtingue encore d'une autre courbe qui eſt dans un plan, que l'on appelle le *Limaçon de M. Paſcal*, laquelle eſt une eſpece de ſpirale.

Je diviſe encore les Helices en régulieres & irrégulieres, les régulieres ſont celles qui montent autour d'un corps cylindrique d'un mouvement uniforme, comme ſont les Vis, dont l'intervale de chaque révolution qu'on appelle le *Pas de la Vis* eſt toujours égal; les irrégulieres ſont celles, dont les Pas de chaque révolution, augmentent ou diminuent ſuivant une certaine proportion que l'on s'eſt fixé.

Probleme XLIX.

Tracer une Helice ſur un Corps Cylindrique.

Fig. 209. Pour décrire cette courbe, on tracera un cercle autour du cylindre, s'il eſt droit ſur une baſe circulaire, ou une Ellipſe s'il eſt ſcalene, mais droit ſur une baſe Elliptique, & l'on en diviſera la circonference en autant de parties égales qu'on voudra, comme Figure 209. en ſept pour la moitié qui paroît, c'eſt-à-dire, 14. pour le circuit entier; & par ces diviſions on menera autant de paralleles à l'axe du cylindre; enſuite on réglera l'intervale des révolutions à volonté, & l'on en diviſera un comme OA ou ſon égal BD en autant de parties égales qu'on a diviſé la circonference de la baſe du cylindre (dans l'exemple préſent en 14. parties,) & l'on en portera ſur chaque parallele à l'axe une de plus qu'à la précedente. Ainſi commençant à rien au point *o*, on portera une de ces diviſions ſur la parallele *ag* au point 1, ſur la ſeconde *bh* deux, au point 2, ſur la troiſiéme *ci* trois, au point 3, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la moitié au point 7. alors on retournera vers le point A en faiſant la même augmentation, & continuant ainſi juſqu'au ſommet du cylindre.

Si l'Helice eſt irréguliere, que les diviſions de DàB ſoient dans le rapport des tangentes ou des ſécantes, ou d'autres progreſſions; la conſtruction ſera toujours la même, & la même proportion regnera entre les Pas de la Vis, qu'on a fait regner dans l'intervale d'un ſeul.

Corollaire.

D'ou il ſuit que ſi deux Helices de baſes differentes, c'eſt-à-dire, de differens diametres, font un même nombre de revolutions autour d'un axe commun, les intervales des Pas auront plus grande raiſon à leur baſe plus elles ſeront petites, & au contraire plus petite raiſon à l'égard des plus grandes; c'eſt-à-dire, que les Pas de la Vis, quoiqu'également diſtans, ſeront plus inclinez, & les autres plus couchez.

Usage.

Ce Problême ſert à pluſieurs Ouvrages. Premierement à tracer les grandes Vis, les Colomnes torſes, les naiſſances des Voutes tournantes & rampantes, comme la Vis St. Giles, & les joints de Doele des mêmes Vis, les limons tournans, que les Apareilleurs appellent *la Courbe rampante*, le deſſous des marches tournantes des Vis, les appuis des Fenêtres & Baluſtres dans les Tours rondes ou creuſes, &c. comme nous l'expliquerons au IV. Livre.

Des Limaces.

Les Limaces font, comme nous l'avons dit, des Helices qui s'approchent continuellement de leur axe. Or elles peuvent en approcher en telle raifon qu'on voudra faire regner entre les lignes droites tirées des points de la courbe perpendiculairement à leur axe ; ainfi on peut décrire cette courbe fur tous les corps coniques, fphériques ou conoïdes & fphéroïdes, ellipfoïdes, paraboloïdes, ou hyperboloïdes, ou tout autre corps formé par la révolution de quelque courbe fur fon axe ; nous donnons ici pour exemple le Cône & la fphère, *Fig.* 210. 211. *Fig.* 210. 211.

On peut encore faire regner une certaine progreffion entre les intervales de chaque révolution de cette courbe, ou les faire égaux fuivant le deffein qu'on fe propofe.

PROBLEME L.

Tracer une Limace fur un Cône ou fur une Sphère, ou Sphéroïde.

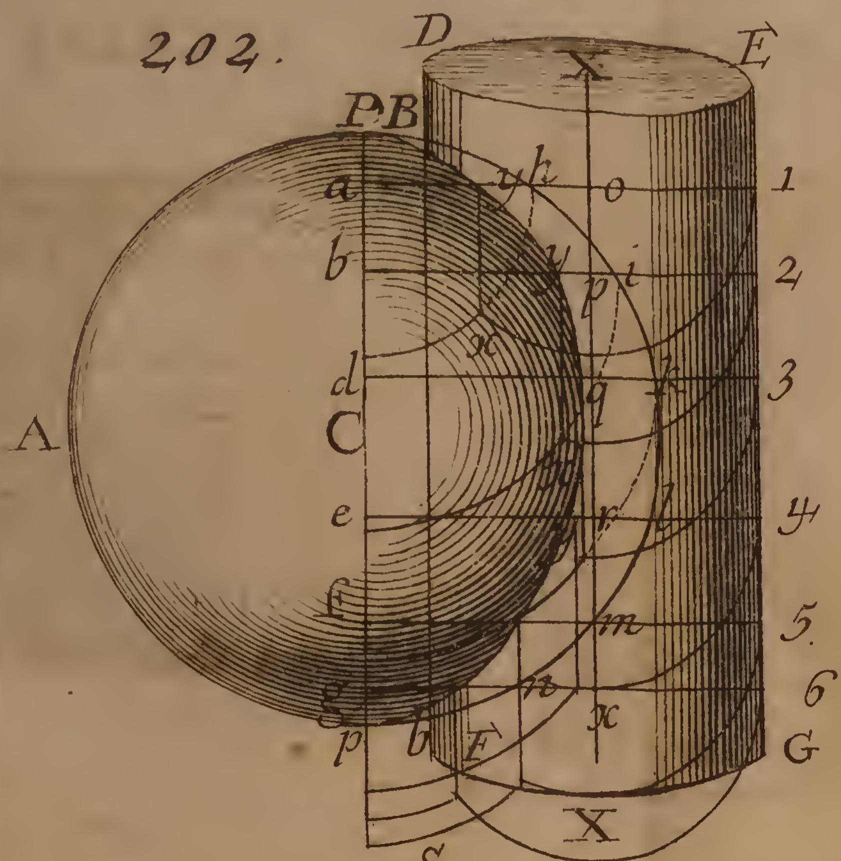
On divifera la bafe du Cône [*Fig.* 210.] ou la bafe circulaire ou Elliptique d'une Hemifphère ou Hemifphéroïde en autant de parties égales que l'on voudra, par lefquels on tirera autant de lignes droites au fommet du Cône, ou autant de cercles ou Ellipfes au Pole P de la fphère ou du fphéroïde. Enfuite on divifera le côté du Cône en un même nombre de parties, fi l'on ne veut qu'une révolution, ou fi l'on en veut plufieurs en un plus grand nombre, comme du double, triple ou quatruple, & l'on fera ces parties égales fi l'on veut, ou diminuant fuivant un certain rapport, par exemple pour le Cône, on peut les faire diminuer fuivant le rapport des paralleles à la bafe d'un triangle Ifofcele formé par deux des côtez du Cône, & par la premiere divifion prife à volonté, & pour l'Hemifphère, par les arcs paralleles à la bafe d'un triangle fphérique, comme *cd*P [*Fig.* 211.] dont la bafe *cd* fera prife à volonté pour le premier intervale ; ce qui donnera une échelle de divifions inégales, qu'on portera fur chaque ligne du Cône tendant au fommet, comme fur *a*S (*Fig.* 210.) une divifion, fur *b*S deux, fur *c*S trois, & ainfi de fuite. *Fig.* 210. 211.

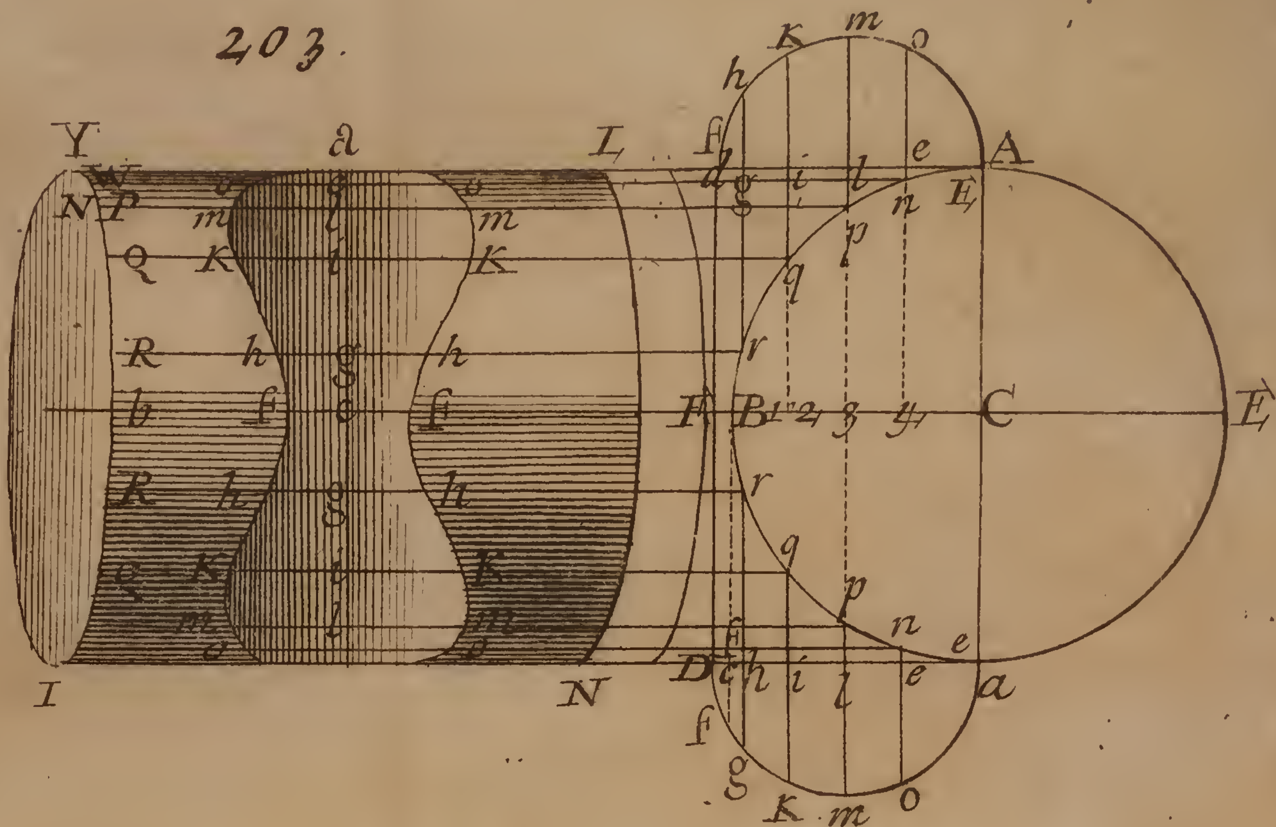
Pour la fphère, on portera fur les cercles tendant au Pole les mefures fuivies de même avec leur augmentation d'une partie fur chacune.

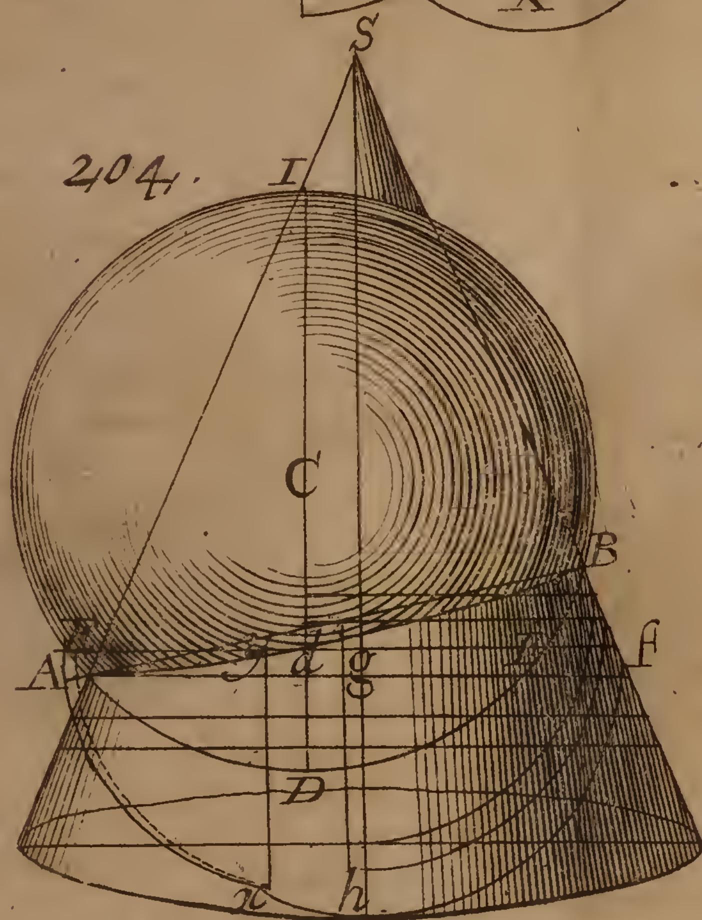
USAGE.

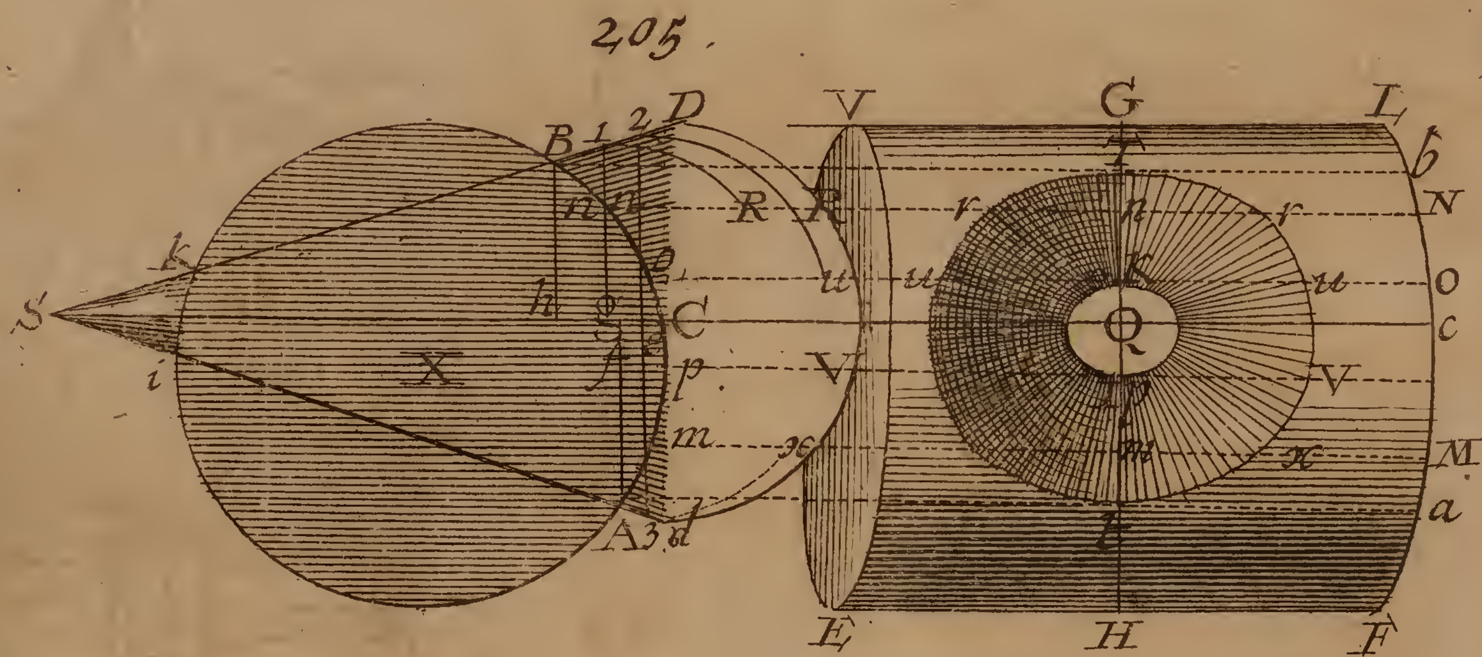
Il n'eſt pas ſans exemple que l'on ait fait des édifices en Limaces. On a gravé une Eſtampe du projet d'une Chapelle pour le milieu du Louvre, dont le ſommet ſe terminoit en Limace; on croit que la Tour de Babel étoit de même, comme on le voit dans le Traité qu'en a fait le P. *Kirker*, le Chevalier *Borromini* a fait ainſi le Chapiteau qui couronne toute la voute de l'Egliſe de Saint Leon de la Sapience à Rome; mais ſans avoir recours à l'application de ce Problême dans les Edifices en grand, on la peut trouver aſſez ſouvent dans le petit, pour de certains Ornemens de volutes ſaillantes ou rentrantes. La nature nous donne des merveilleux exemples des varietez de cette courbe dans une infinité de Coquillages de Mer & de Terre; j'en ai vû au Chily de Coniques gravez de Canelures à côtes entre chaque *pas*, ou intervale de l'Helice, qui diminuoient de longueur, de largeur & de profondeur dans une merveilleuſe proportion juſqu'à la pointe, où elles devenoient imperceptibles à la vûë; ce que le plus habile Artiſan aidé des ſecours de la Geometrie auroit bien de la peine d'imiter.

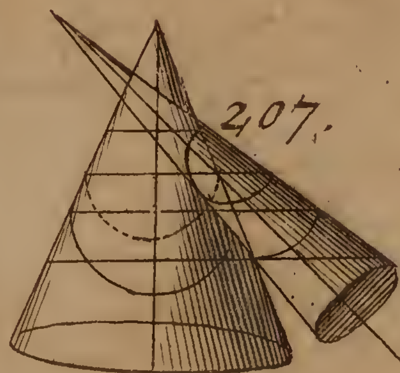


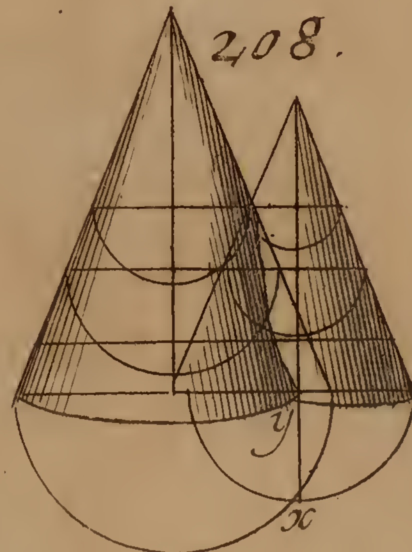

202.

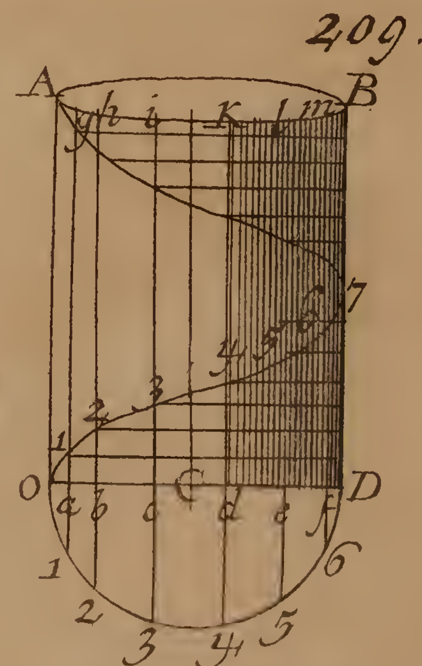

203.

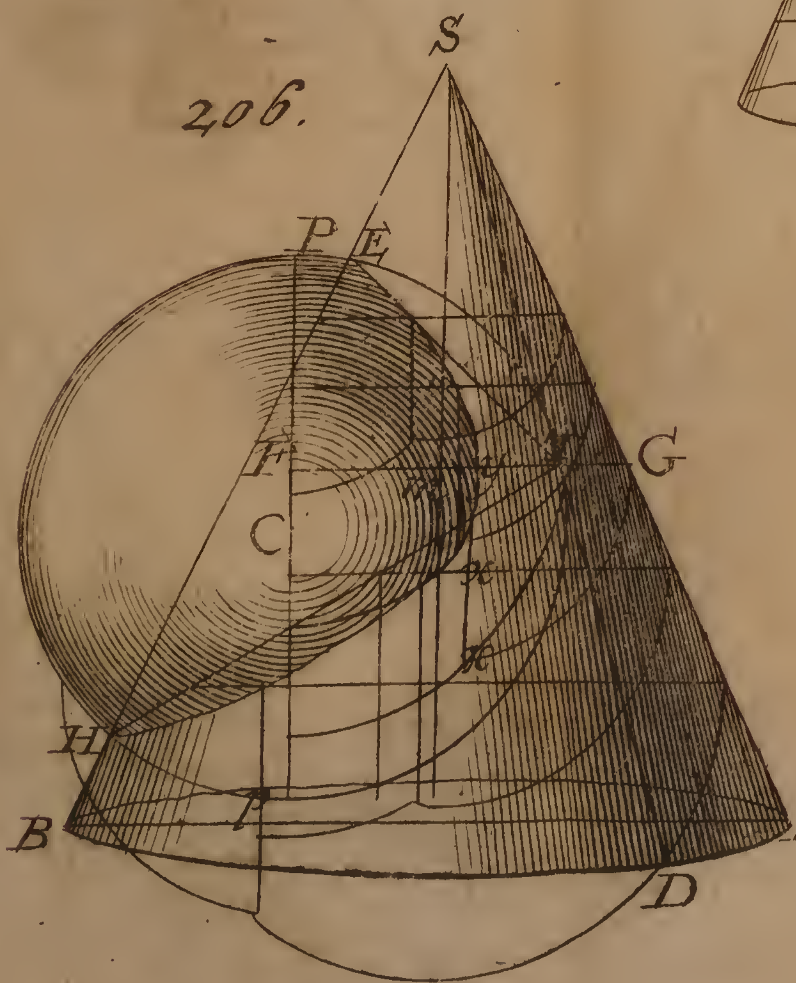

204.

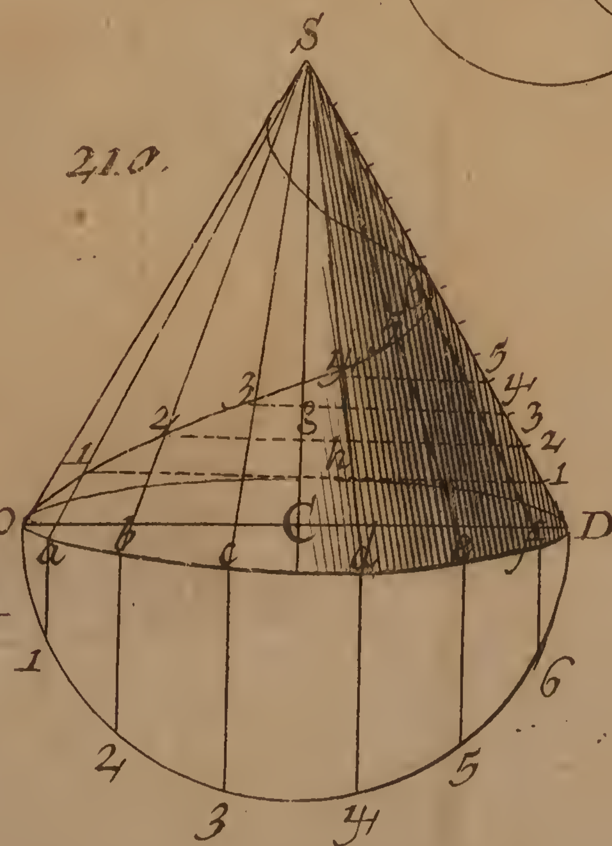

205.

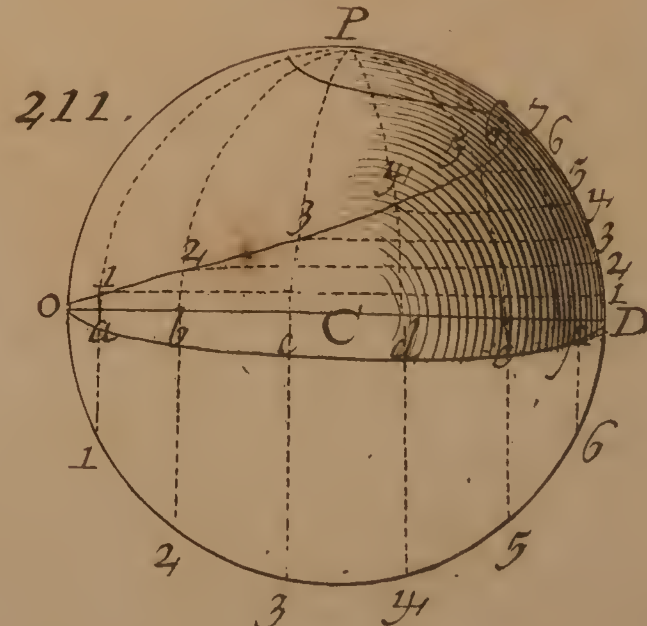

207.

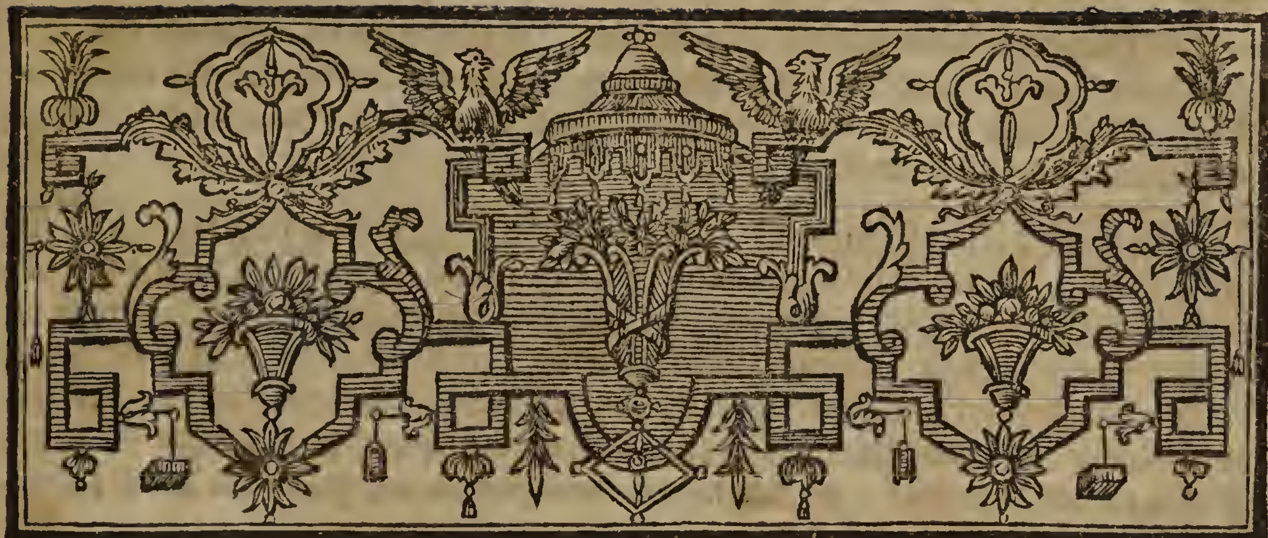

208.


209.


206.


210.


211.



TRAITÉ DE STEREOTOMIE.

LIVRE TROISIE'ME.

De la description des Divisions des Solides.

DANS les deux Livres précedens nous n'avons eu pour objet que la Figure des lignes & des surfaces formées par les sections des corps, & l'art de les décrire. Presentement nous embrassons l'espace compris entre une, deux ou plusieurs sections ; c'est-à-dire, les parties solides qui résultent de la division des corps coupez par des surfaces planes ou courbes ; & nous nous proposons de chercher les moyens de les representer sur un plan autant exactement qu'il est possible, afin de trouver les longueurs de leurs côtez, & leurs angles plans & solides, tant rectilignes, que mixtes.

Pour m'expliquer en termes de l'Art, il s'agit ici de cette espece de *Dessein* que les Architectes appellent le *Trait* & *l'Epure*, dans lequel consiste toute la difficulté de la coupe des Pierres.

Je vais tâcher d'éclaircir cette matiere, & d'en donner les principes

en la réduisant à un petit nombre de Régles appuyées de leurs raisons, & dont l'application sera d'autant plus facile, que le lecteur est déja pleinement instruit de la maniere de décrire toutes les especes de Courbes qui peuvent y être mêlées.

On sçait qu'il est impossible de representer exactement un solide sur une surface plane, non seulement celui qui en a de courbes; mais encore celui qui n'est compris que par des planes, puisqu'elle ne peut jamais en representer qu'une, & un solide en a au moins quatre; ordinairement dans l'usage de l'Architecture six, & quelquefois davantage. On a donc été obligé de considerer les solides dans les differentes rélations & situations de leurs parties, par le moyen desquelles on parvient à les representer à differentes reprises.

Tantot, pour connoître la distance horisontale de leurs angles, on les a supposé comme aplatis sur un plan horisontal; tantôt, pour connoître leurs hauteurs, on les a conçû comme aplatis sur un plan vertical; quelquefois pour connoître d'un coup d'œil toutes leurs surfaces, & en voir le rapport, on les a rangé de suite sur une surface plane. Enfin pour sçavoir quels sont les angles que ces surfaces font entr'elles, on en a mesuré les angles mixtes, curvilignes & rectilignes par le moyen des cordes des côtez courbes, ou avec des instrumens; jusqu'ici on a rien imaginé de mieux.

On peut donc réduire tout l'Art de tracer une *Epure* à quatre sortes de descriptions, la premiere a pour objet les mesures horisontales; on l'appelle en termes d'Architecture le *Plan*, en langage de Mathematique *l'Ichnographie*, ou la *projection horisontale.* Nous sommes obligez d'adopter ce dernier pour éviter les équivoques dans les raisonnemens Geometriques, où le mot de *Plan* signifie en general une surface plane quelconque. Secondement, pour éviter les manieres de parler qui renferment une espece de contradiction, comme de dire *le plan d'un point*, *ou d'une ligne* pour signifier sa projection. Troisiémement, pour éviter la Cacophonie, lorsqu'il faudra dire *le plan d'un plan*, au lieu de sa projection.

La seconde espece de description des solides a pour objet les mesures verticales; on l'appelle dans le langage des Sciences *Ortographie*, & en termes d'Architectures elles a differens noms. Celle qui represente les faces des Edifices, ou de leurs parties s'appelle *Elevation*: celle qui en fait voir les dedans, suivant une section faite par leur largeur s'appelle *Profil*, & celle qui represente aussi les dedans, suivant leurs longueurs s'appelle *Coupe* & Profil.

La troisiéme espece de description des solides qui fait partie du des-

ſein de l'Epure, a pour objet l'étenduë des ſurfaces; on l'appelle en termes de l'Art le *Développement*, parce qu'elle raſſemble & étend ſur une ſurface plane, celles dont le ſolide eſt comme enveloppé ; celle-ci n'a pas de nom particulier uſité dans les Livres; mais puiſque les précédentes en ont qui ſont dérivéz du Grec, rien n'empêche qu'on l'appelle avec feu M. de Lagny de l'Academie des Sciences *l'Epipedrographie.* *Memoires de l'Acad.* 1727.

La quatriéme eſpece de deſcription neceſſaire à l'Epure a pour objet les ouvertures des angles rectilignes, curvilignes & mixtes, formez par les termes des ſurfaces planes & courbes, & par l'inclinaiſon qu'elles ont entr'elles. Celle-ci n'a pas de nom propre, on l'appelle la maniere de trouver les *Buveaux*, quelques-uns Beuveaux ou Bevaux, mais plûtôt ſuivant l'étimologie du latin *Bivium* les *Biveaux*; on peut avec le même M. de Lagny l'appeller la *Goniographie*; ces quatre eſpeces de deſſeins ſont eſſentiels à l'Epure, & les ſeules neceſſaires; car quoiqu'il y ait une cinquiéme maniere de repreſenter les ſolides par la *Scenographie*, c'eſt-à-dire, la Perſpective, on n'en peut tirer aucun ſecours pour la coupe des Pierres, parce qu'elle change les meſures des ſolides repreſentez, en diminuant les parties qui s'éloignent du devant du tableau.

De l'Arangement des Deſſeins dans l'Epure.

La confuſion que l'on trouve dans les deſſeins des Livres qui traitent de la coupe des Pierres, vient ſouvent de la multiplicité des eſpeces de repreſentations que l'on raſſemble dans la même Epure ; car ſouvent on y joint le plan au Profil, quelquefois encore à l'élevation, & l'on méle les uns avec les autres ſans diviſions ; ce qui demande une grande attention pour démêler ce qui appartient à chacune ; en effet ſouvent la même ligne fait partie du plan & de l'élevation, & ſert encore au Profil.

Souvent les objets verticaux ſont renverſez, comme ſi au lieu de monter ils tomboient du haut en bas; quelquefois ils ſont placez de côté, quoiqu'ils doivent être verticaux ; ſouvent on fait des lignes & des arcs de cercles inutiles à la conſtruction, qui ne ſervent qu'à indiquer les alignemens, les égalitez des lignes tranſpoſées, ou l'ouverture de leurs angles: il arrive auſſi ſuivant les circonſtances, que pour analiſer une projection, on ſe ſert pour plus de commodité & abreger l'operation, d'un angle Droit qu'on a trouvé fait, quoique pour un ſujet different. Ce double employ de lignes trouble l'attention des Lecteurs, ou exige une fatigante contention d'eſprit pour démêler ces differentes conſiderations.

La neceſſité de raſſembler pluſieurs objets dans une petite Planche rend cet embarras preſque inévitable ; d'autant plus qu'il a ſon utilité pour indiquer plus ſenſiblement leurs rapports.

Malgre' les ſoins qu'on a pris pour éviter la confuſion, il eſt bon d'avertir le Lecteur qu'il ne doit compter de connexité neceſſaire entre les lignes des deſſeins, que celle qui eſt annoncée ou indiquée par le deſſein qu'on y a joint, dans lequel on aura ſoin de dire que cette ligne qui étoit de l'élevation ou du *Plan* doit être conſiderée par une autre ſuppoſition, comme étant du Profil; mais lorſqu'on aura omis cet avertiſſement, & qu'il ſera queſtion de Profil, il faut abandonner l'idée qu'on attachoit à une ligne, comme faiſant partie du plan, & prendre celle qui convient au Profil dont on a parlé.

Quoiqu'il ſoit plus naturel de mettre chaque eſpece de deſſein à part; il eſt cependant vrai que cette ſimplicité d'objet indique moins ſenſiblement les rapports des lignes, & que l'on trouve en cela moins de commodité qu'à raſſembler, & même quelquefois à mêler les *Plan*, *Profil* & *Elevation*: on tiendra cependant pour arbitraire l'arangement de leurs ſituations, les uns auprès des autres, ou dans les autres, au deſſus, au deſſous, ou à côté; pourvû que les parties en ſoient diſtinctement décrites.

CHAPITRE I.

De la Projection en General.

NOUS avons déja expliqué dans la ſeconde partie du II. Livre, ce que nous entendons par le mot de Projection; il ſuffit de répeter ici que c'eſt la deſcription d'un corps faite par des lignes perpendiculaires à un plan tirées de chacun des angles & diviſions réelles ou imaginaires de ce corps, telle eſt la trace de la goutiere d'un comble qui décrit la Figure de ſon contour ſur la Terre.

On conçoit aiſément ſuivant cette définition, que le même corps poſé de differentes manieres donne differentes Figures de projection; ainſi un dez poſé à plat ſur une de ſes ſurfaces, *Fig.* 212. aura pour projection le quarré, ſur lequel il eſt appuyé, parce que les perpendiculaires tirées des quatre angles ſolides qui ſont hors du plan de deſcription, ſont les mêmes que celles qui ſont à la jonction des quarrez perpendiculaires entr'eux; mais ſi le dez eſt ſuppoſé n'être appuyé que ſur un de ſes angles, les perpendiculaires tirées des ſix ſommets des autres angles formeront ſur ce plan le contour d'une exagone qui ſera régulier, ſi le huitiéme angle ſe trouve dans la même perpendiculaire au plan que le premier, comme on voit, *Fig.* 223.

D'ou il ſuit: 1.° que pour faire la Projection d'un corps, il ne ſuffit pas

pas d'en concevoir parfaitement la Figure ; mais il faut connoître ou déterminer la position de ses angles ; parce que la variation de cette position change les mesures des distances horisontales ou verticales, que l'on cherche dans ce genre de dessein ; car les perpendiculaires tirées des angles solides s'approchent ou s'éloignent, suivant l'inclinaison des surfaces des solides, & se confondent quelquefois ; de sorte que deux points differens ne sont representez que par un seul sur le plan de description.

2.° Qu'une seule projection verticale ou horisontale ne suffit pas pour exprimer sur un plan la Figure, ou la situation d'un solide à l'égard de ce plan ; mais qu'elles sont necessaires toutes les deux ; 1.° parce que les mêmes corps en differentes positions peuvent avoir la même projection ; ainsi une Piramide quadrilatere droite, ou un Cône droit, par exemple, *Fig.* 215. 218. appuyée sur son sommet, lorsque son axe est perpendiculaire au plan de description, a pour projection un quarré, & le Cône un cercle, comme s'il étoit appuyé sur sa base, *Fig.* 214. 217.

2.° Parce que les corps differens peuvent avoir la même projection ; ainsi un Cône, un Cylindre, une Vis & une Sphère donnent également un cercle pour projection, *Fig.* 216. 217. 218. 219. 220. de même qu'un Cube, un Parallelepipede & une Piramide quadrangulaire donnent aussi un quarré pour projection, *Fig.* 212. 213. 214. 215. un Anneau & un Helice ont également chacun une Couronne de cercle ou d'Ellipse pour projection, *Fig.* 221. 222. ou, si nous prenons des exemples dans l'Architecture, nous trouverons que le *Plan* d'une voute sur le Noyau & celui d'une Vis Saint Giles de mêmes diametres ne different en rien ; celui d'une voute en plein ceintre Droit surmontée & surbaissée ou inclinée en descente, donnent aussi le même Parallelograme dans leur projection, ainsi que les Voutes cylindriques & les sphériques donnent le même *Profil.*

3.° Parce que des corps ronds ont des projections rectilignes égales ou semblables à celles des corps terminez par des surfaces planes, ainsi [*Fig.* 224.] un Cône couché, a pour projection un triangle rectiligne, de même qu'une Piramide, *Fig.* 225. & un cylindre ou une vis donne un Parallelograme, aussi bien qu'un prime rectiligne, *Fig.* 226. 227. 228. & même un mixte [*Fig.* 229.]

4.° Parce que la projection change souvent la nature des choses, la projection d'une ligne perpendiculaire au plan de description n'est qu'un point ; celle d'un plan en pareille situation n'est qu'une ligne ; celle d'une ligne courbe qui seroit dans ce plan devient une ligne droite, ou si elle est inclinée à ce plan, elle peut changer d'espece, comme nous l'avons dit au Livre précedent, de cercle, elle peut devenir Ellipse, ou d'Ellipse, elle peut devenir un cercle.

5.° Enfin, parce que de la projection des solides, il en résulte quelquefois des Figures si differentes de celles de leurs surfaces, qu'on ne peut les prévoir qu'avec une grande attention, comme nous l'avons fait remarquer de celle du Cube posé sur un de ses angles, lorsque le diametre qui passe par les opposez, est perpendiculaire au plan de description, sa projection est un Exagone régulier; pour qu'on n'en doute pas, je vais en donner la démonstration.

Fig. 223. Soit [*Fig.* 223.] le Cube AE posé sur son angle B; en sorte que sa diagonale SB soit perpendiculaire au plan PL: ayant divisé les trois surfaces quarrées qui comprennent l'angle solide S par des diagonales, comme le quarré ASDG par la diagonale AD; à cause de l'égalité des quarrez, ces diagonales seront égales entr'elles, & formeront un triangle équilateral parallele au plan de description; parce que ce triangle est la base d'une Piramide triangulaire droite, dont l'axe, qui est partie du diametre, est perpendiculaire au plan de description (par la supposition;) donc la projection de ce triangle sera aussi un triangle égal à la base de cette Piramide. La même chose arrivera à l'égard des trois autres surfaces du Cube, qui comprennent l'angle solide opposé B, dont les divisions des quarrez par des diagonales retrancheront une Piramide égale à la précedente, mais renversée & tournée differemment, en sorte que les angles de l'une seront au devant des faces de l'autre, & à distances égales; puisque par la supposition les côtez & leurs inclinaisons sont égaux; ces deux triangles équilateraux donneront donc la position de six des angles du Cube, & les deux autres qui sont aux extremitez du diametre, réunis par la projection dans un même point, tomberont au milieu des deux triangles équilateraux, & seront le centre de l'éxagone; donc la projection du Cube ainsi posé, est un éxagone régulier.

Pour faire connoître les angles élevez, & ceux de la projection, on a marqué les uns & les autres des mêmes lettres differenciées par des Majuscules.

Il suit de ces remarques, que pour sçavoir si un solide est contenu dans un autre, par exemple, un Tetraedre dans un Cube, ou un autre solide dans un Parallelepipede, tels que sont ordinairement les quartiers de Pierres de taille; il faut faire autant de projections de ce solide, que le Parallelepipede a de surfaces qui ne sont pas répetées dans leurs opposées, c'est-à-dire, trois, parce qu'il en a six, & appliquer chacune de ses projections à la face qui lui convient, pour sçavoir si elle n'excede point.

Dans l'Architecture ces projections ne se font que sur des plans horisontaux & verticaux, parce qu'on ne s'y conduit que par *l'Aplomb* & le *Niveau*. Ainsi des trois, il y en a toujours une horisontale, qui est ap-

pellée le *Plan*, & deux verticales, dont l'une eſt *le Profil*, pour ce qui eſt vû de côté, & la troiſiéme eſt *l'Elevation*, pour ce qui eſt vû de face; mais parce qu'un ſolide peut être compris par des ſurfaces inégales de tous côtez; le cas peut arriver qu'on ait beſoin de ſix projections, ſçavoir de deux horiſontales, & de quatre verticales, c'eſt-à-dire, une pour chaque face du Parallelepipede, dans lequel on doit former le ſolide.

CHAPITRE II.

De l'Ichnographie, ou Projection Horiſontale,

En Termes de l'Art

DU PLAN.

DANS le deſſein que nous avons de conduire le Lecteur par des principes generaux à la connoiſſance des proprietez particulieres des ſections des corps, pour trouver les modelés des parties qui compoſent differentes eſpeces de Voutes; il auroit ſuffit de ne faire mention que de celles des ſphères, Cônes & Cylindres, comme nous avons fait juſqu'à preſent, mais à cauſe que ce III. Livre eſt une préparation à la pratique de la coupe des Pierres, il nous a ſemblé à propos d'entrer dans le détail de l'Architecture, & d'en parler le langage, dont nous avons joint ici une explication, à laquelle on pourra avoir recours pour en entendre les termes uſitez; mais comme elle n'eſt pas aſſez ample pour donner une parfaite intelligence des rélations des ceintres, nous commencerons par y ſuppléer.

Des differences Reſpectives des Ceintres.

On ſçait que les differentes ſections des corps ronds, tels que ſont les voutes, produiſent differentes lignes à leur ſurface, courbes ou droites; leſquelles ont chacune un nom pour les déſigner; les ſections tranſverſales & *Continuës*, ſont ſouvent appellées *Ceintres*, les parties de ces ſections interrompuës par la liaiſon des vouſſoirs s'appellent, *joins de Doele.* Les ſections longitudinales s'appellent *joins de Lit*, celles-ci ſont droites dans les Cônes & Cylindres, & courbes dans les Sphères, & les Anneaux & Helices; les parties de ces ſections qui ſont dans l'épaiſſeur de la voute, s'appellent *joins de tête.*

Les intervales ou diviſions des joins de Lit doivent être continuez avec une certaine régularité, tantôt en lignes droites paralleles, quelquefois en ſe rapprochant avec une certaine uniformité, comme concourant à un point fort éloigné; ſouvent en lignes courbes paralleles, ou concourant à un même point, comme aux Voutes ſphériques.

Lorsque les joins de Lit sont paralleles entr'eux, comme aux Voutes cylindriques, il est clair que les ceintres circulaires & elliptiques qui les traversent, doivent être divisez en un même nombre de parties proportionelles; de sorte que si deux ceintres ne sont pas paralleles entr'eux, dans les voutes en Berceau, l'un étant circulaire, l'autre sera necessairement Elliptique, ou tous les deux seront Elliptiques, & les divisions de l'un déterminent necessairement celles de l'autre pour la quantité & la grandeur des *voussoirs*, qui sont les Pierres qui la composent. Cette dépendance respective oblige l'Architecte à se déterminer sur la Courbe qu'il veut former à une face de la voute, plûtôt qu'à l'autre, ou à celle qui résulte de la section d'un plan perpendiculaire à son axe; celui de ces ceintres, auquel il fait le plus d'attention, & qu'il choisit pour faire la division la plus réguliere de ses voussoirs, s'appelle le *Ceintre primitif*, l'autre dont la courbure & les divisions dépendent de la suite des joins de Lit, & de la difference de position à l'égard de celui-ci, s'appelle *Ceintre secondaire.*

Fig. 230. Le Ceintre primitif est quelquefois réel comme en ABD [*Fig.* 230.] où l'on suppose une face biaise, qui doit paroître & subsister; ou simplement imaginaire & supposé comme *ima*, *Fig.* 231. où l'on suppose un plan tangent à une Tour, dans laquelle on veut faire une Porte, dont le ceintre réel qui ne peut être décrit sur une surface plane, ne peut servir à régler les divisions des voussoirs; de sorte qu'on est obligé ou de les développer pour l'étendre sur une surface plane, & alors il devient primitif, ou de supposer un ceintre dans un plan tangent à la Tour qui est un primitif supposé; parce qu'il ne doit pas subsister, ne servant qu'à déterminer les divisions du réel, qui est le *secondaire.*

Mais si l'on développe le ceintre réel R*m*D sur un plan, pour en faire le ceintre primitif, comme lorsqu'on veut que les têtes des voussoirs soient égales, le même ceintre consideré comme appliqué à la surface courbe de la Tour, est un secondaire, soit que la surface soit convexe, comme à la Figure 231. soit qu'elle soit concave, comme à la Figure 232. où le ceintre ASD est supposé comme primitf, pour régler les divisions du réel AMD dans le dessein de l'Epure seulement. Où il faut remarquer que soit que ce ceintre primitif soit pris sur la corde de l'arc concave d'une Tour, ou sur un plan tangent à la Tour parallele à cette corde, il n'en résulte aucun changement au
Fig. 231. ceintre réel *ima*, *Fig.* 231, ou AMD, *Fig.* 232. & que ce ceintre pri-
Fig. 232. mitif supposé, est le même que celui de l'arc Droit; de sorte qu'on peut dire alors que l'arc Droit est le ceintre primitif; mais si la division se fait sur un développement, il devient le secondaire, en ce que ses divisions en dépendent, & deviennent inégales, lorsque celles du développé sont égales.

Si le Ceintre primitif ſuppoſé, n'étoit pas dans un plan parallele à la corde RD qui eſt perpendiculaire à la direction de la porte, comme L*b* qui lui eſt incliné, alors il y auroit trois ceintres à conſiderer, dont les diviſions ſeroient toutes inégales; ſçavoir, 1.° celles du ceintre primitif imaginaire; 2.° du ceintre réel à la ſurface de la Tour; 3.° & du ceintre de l'arc Droit dans l'épaiſſeur de la Tour, & chacun de ces ceintres ſeroit d'une courbure differente; ſçavoir, circulaire ou elliptique, & ellipſimbre: il faut expliquer ce que nous entendons par l'arc Droit.

De l'Arc Droit.

Le ceintre qui eſt la ſection d'un plan coupant l'axe d'une voute en Berceau à angle Droit s'appelle *l'arc Droit*, tel eſt l'arc RED [*Fig.* 230.] ou ROI, *Fig.* 235. & 237. ou ABD, *Fig.* 239. ce genre de ceintres peut être *primitif*, ou *ſecondaire*, ſuivant l'attention principale que l'on a aux faces, ou à l'interieur d'une voute. Dans les Figures 230. & 235. il ſemble être naturellement le ſecondaire, ſi l'on a principalement en vûë la régularité du ceintre de face apparente ABD. Dans la Figure 239. il eſt primitif, ſi ABD eſt la face apparente, parce qu'elle eſt perpendiculaire à la direction du Berceau.

D'ou il ſuit, 1.° que l'arc Droit n'eſt à plomb que dans les voutes Horiſontales, & qu'il eſt en talud & ſurplomb dans les inclinées, comme R*oi*, *Fig.* 235.

Secondement, qu'il n'eſt jamais parallele aux arcs de faces biaiſes à la direction des Berceaux, ſoit qu'ils ſoient de niveau, ou en deſcente, comme on voit aux Figures 230. & 235. où l'arc RED, R*oi* n'eſt pas parallele à ABD.

Troisie'mement, que l'arc Droit de toutes les voutes biaiſes & en deſcente n'eſt pas d'une courbure ni d'une largeur, ou hauteur égale à celle de l'arc de face, ainſi *Fig.* 230. ſuppoſant l'arc de face circulaire, l'arc Droit RED ſera ſurmonté elliptique, dont le petit axe RD ſera plus court que le diametre AD; & au contraire (à la Figure 235.) ſi ABD eſt circulaire R*oi* ſera elliptique ſurbaiſſé, dont le demi axe O*c* ſera plus petit que le Rayon BC.

Quatrie'mement, qu'il ne peut y avoir d'arc Droit, proprement dit, dans une voute conique, comme dans les Trompes, [*Fig.* 236.] parce que la ſurface de ſa Doele ne peut être à angle Droit ſur aucun plan, que ſuivant une ligne tirée de ſa baſe au ſommet du Cône, dont les côtez ſont convergens. *Fig.* 236.

Cependant le P. Deran appelle *arcs Droits* les *Biveaux*, c'eſt-à-dire, les angles de la doele & des lits.

Quelques-uns ont auſſi appellé arc Droit le ceintre primitif perpendiculaire à l'axe du Cône, parce qu'on s'en ſert comme de l'arc Droit pour la diviſion des vouſſoirs.

Il ſemble par ce que je viens de dire qu'il n'y a point d'arc Droit dans les voutes courbes par leur projection horiſontale; mais ſi l'on fait attention que l'angle que fait un Rayon avec ſa tangente eſt réputé Droit, ou infiniment peu different du Droit, on reconnoîtra facilement qu'ils ſont les arcs Droits des Voutes ſphériques, ſphéroïdes & annulaires.

Fig. 233. 1.° Que tout cercle Majeur d'une ſphère ABD, *Fig.* 233. eſt un arc Droit.

2.° Que dans les ſphéroïdes il y en a deux; ſçavoir, *asb* qui eſt perpendiculaire à l'axe qui paſſe par les Poles du premier, perpendiculairement au plan de la baſe, ou projection du ſphéroïde, comme P*bpa*,
Fig. 234. [*Fig.* 234.] & le ſecond ſera PS*p*.

3.° Que l'arc Droit d'une voute *Annulaire* eſt celui dont le diametre
Fig. 238. tend au centre de l'anneau s'il eſt circulaire, comme R*i*, *Fig.* 238. lequel eſt perpendiculaire à la tangente TN, & au plan de la projection ADFE, ſoit que la voute ſoit horiſontale, comme la *voute ſur le noyau*, ou qu'elle ſoit inclinée à l'horiſon, comme la vis St. Giles.

Si l'Anneau eſt Elliptique, comme la voute ſur un noyau Ovale, ſon arc Droit ſera la ſection Verticale, perpendiculaire à la tangente au point de diviſion de l'Ellipſe qui eſt la projection d'un joint de lit; il en ſera de même pour la vis St. Giles ſur un plan Ovale; alors la direction du diametre de l'arc Droit ne tend plus au centre du noyau.

U S A G E.

On connoîtra dans la ſuite que l'arc Droit eſt indiſpenſablement néceſſaire pour trouver les Biveaux & faire les panneaux, c'eſt lui ſeul qui détermine les angles mixtes des doeles & des joins, & qui ſert à faire les développemens des ſurfaces courbes des Cylindres; parce qu'étant perpendiculaire à toutes les paralleles à l'axe, dont le nombre infini forme la ſurface des Berceaux, il donne ſeul les meſures des largeurs de ces ſurfaces, & par conſéquent les intervales des joins de lit, qui ſont paralleles à l'axe du Cylindre: il en eſt de même à l'égard des Cylindres pliez ſur leurs axes d'une courbe Circulaire ou Elliptique, comme dans les voutes ſur le noyau.

REGLES DU DESSEIN DE L'EPURE.

I.

Du PLAN, ou de la Projection Horisontale.

Dans toutes les voutes où l'arc Droit & l'arc de face sont inégaux, il faut commencer par *se déterminer au choix d'un des deux pour en faire le ceintre Primitif.*

La Simetrie, la beauté ou la solidité étant les motifs de ce choix, il ne sera pas difficile de sçavoir lequel il convient de choisir. Lorsqu'une face est apparente, il en faut faire le ceintre Primitif, afin que les Têtes des voussoirs soient égales, & que leurs joins soient dirigez suivant les perpendiculaires à leurs tangentes aux points de division, si le ceintre est Circulaire, Elliptique ou de quelqu'autre courbe; mais si les Faces sont cachées, comme lorsqu'une voute est terminée par deux murs, il est plus commode de prendre l'arc Droit pour le Primitif; car il faut remarquer que si l'un est Circulaire & l'autre Elliptique, celui qui sera pris pour Primitif réglera les joins de l'autre en fausse Coupe, à moins que l'on ne fasse les lits Gauches, parce que les joins de téte du Circulaire tendent à l'axe du Berceau, & les joins de tête du ceintre Elliptique ne tendent pas au centre de l'Ellipse par où passe l'axe du Cylindre; de sorte que les lits changeroient d'inclinaison insensiblement, ce qui donneroit un lit Gauche, & que l'on doit éviter dans la pratique, à cause de la difficulté de l'exécution.

Remarque sur le choix du Ceintre Primitif aux Voutes extradossées.

Un Architecte est assez le Maître de choisir pour ceintre Primitif l'Arc de face, ou l'arc Droit, lorsqu'une voute n'est pas extradossée; mais lorsqu'elle l'est, il ne convient pas toujours qu'il choisisse l'arc de face; car s'il s'agit d'un Berceau ou d'une voute Conique biaise, dont l'arc de face soit Circulaire, il est évident par le Theoreme II. du I. Livre que l'épaisseur deviendra plus grande à la clef qu'aux impostes; de sorte que les voussoirs y deviendront plus pesans qu'aux impostes, ce qui est contre la bonne construction, & cependant qu'aucun Auteur de la coupe des Pierres n'a remarqué; il convient donc alors de choisir l'arc Droit pour centre Primitif, le faisant Circulaire, ou si l'on veut un peu surmonté,

SECONDE REGLE.

Divifer le Ceintre Primitif en autant de parties égales qu'on veut avoir de rangs de Pierres ou Vouffoirs, & régulierement en nombre impair.

Cette operation confiderée geometriquement, eft prefque toujours impoffible, parce qu'elle dépend de la trifection de l'angle qu'on n'a pas encore trouvée; mais cette précifion eft inutile dans les Arts, il fuffit de chercher ces divifions en tâtonnant, d'autant plus qu'elles font arbitraires; puifqu'on peut faire fans difformité des voutes de Pierres d'une largeur inégale, pourvû que chaque rang foit exactement parallele, & que la difference des largeurs foit peu fenfible.

Nous ajoûtons que les divifions doivent être en *nombre impair*, afin qu'il ne fe trouve point de joint au milieu du ceintre; mais une Pierre également appuyée fur les deux côtez de la voute qu'elle doit fermer dans l'exécution, on l'appelle pour cette raifon *la Clef*, nom qui n'eft pas affecté à une feule Pierre, mais au rang de vouffoirs qui eft le plus élevé: ce n'eft pas qu'un joint fur le milieu d'un ceintre tirât beaucoup à conféquence pour la folidité; mais il choqueroit la vûë & la bonne ordonnance.

Il en faut cependant excepter les pans des voutes fphériques établies fur un quarré; on doit leur tracer un joint au milieu dans l'Epure feulement, mais non pas dans l'exécution, parce que ce joint n'eft que l'angle d'un vouffoir qui fait enfourchement, dont les branches fe réuniffent à cette ligne du fommet; c'eft pourquoi on divife le nombre des vouffoirs de chaque côté en parties égales.

Par la même raifon de Simetrie, il ne convient pas de divifer le côté d'un ceintre depuis la clef jufqu'à l'impofte en plus grand nombre de vouffoirs que l'autre, à moins que les impoftes ne foient pas de niveau entr'elles, comme dans les arcs Rampans, ou que la quantité des vouffoirs foit affez grande de chaque côté, pour qu'on ne s'apperçoive pas d'un rang de plus ou de moins; c'eft pourquoi les arcs Rampans peuvent être divifez en nombre pair.

La raifon pour laquelle il faut commencer par la divifion du ceintre Primitif, eft qu'il faut avoir la projection Horifontale des joins de lit de chaque Rang de vouffoir, qu'on ne peut tailler qu'après en avoir déterminé les largeurs par le nombre qu'en doit contenir le contour du ceintre, & que lorfque les voutes font biaifes, ces largeurs de tête deviennent inégales, foit dans les arcs de face, foit dans les arcs Droits qui ne font pas paralleles entr'eux; de forte qu'il faut prévoir ce que la largeur d'une

d'une tête biaise doit donner à l'arc Droit, ou ce que celle de l'arc Droit donnera d'augmentation à l'arc de face biaise.

TROISIE'ME REGLE.

Diviser les Arcs exterieur & interieur du Ceintre Primitif, qui comprennent l'épaisseur de la Voute en parties proportionnelles par des perpendiculaires à ces Arcs, aux points de leurs Divisions, pour régler l'inclinaison des joins de Tête.

Nous avons donné au II. Livre, Problêmes 26. 27. & 28. la maniere de tirer ces lignes, qu'on appelle les *joins de Tête*, comme 11, 22, 33, 44, *Fig.* 237. 238. 39. & 40. non seulement pour les ceintres circulaires, mais aussi pour toutes sortes de courbes des sections Coniques, & nous avons fait voir que la pratique des Ouvriers n'est pas exacte pour d'autre Courbe que pour le cercle.

Sur quoi il y a trois choses à remarquer. La premiere, que l'on doit tirer les joins de Tête perpendiculairement aux tangentes des Courbes des ceintres aux points de leur division dans les arcs de Face seulement, où l'on a la liberté de les incliner comme l'on veut; mais non pas aux ceintres Elliptiques des arcs Droits, lorsqu'ils sont secondaires, parce que les Lits des voussoirs ne seroient pas continuez dans un même plan, comme nous l'avons dit ci-devant.

La deuxiéme, que lorsque le ceintre primitif est circulaire, les joins du secondaire Elliptique, doivent être tirez au centre de l'Ellipse, plûtôt que perpendiculairement à la tangente sur la division, parce que les plans des lits doivent tous s'entrecouper dans l'axe du Berceau Cylindrique, comme on l'enseignera au IV. Livre de differentes manieres.

La troisiéme, qu'aux arcs de face Elliptique, il faut se contenter de faire les joins de tête perpendiculaires aux arêtes de Doele, parce qu'on ne peut les faire en même tems perpendiculaires à celle de l'extrados d'une Ellipse concentrique semblable, que par le moyen d'une Courbe qui ne convient ni au joint de Tête ni au Lit, qu'il faut affecter de faire toûjours plan. La raison est que les arcs des Ellipses Asymptotiques, c'est-à-dire, concentriques & semblables ne sont pas paralleles, comme ceux de deux cercles, par conséquent la perpendiculaire à la tangente de l'une ne peut se réunir avec celle de l'arc proportionel de l'autre.

La premiere raison sur laquelle est fondée cette division proportionelle de l'arc exterieur & de l'interieur, qui comprennent l'épaisseur de la voute, concerne la solidité, parce que les têtes des voussoirs devienent par cette construction, en forme de coin, plus large du côté exterieur que de l'interieur, la circonference de l'un étant plus grande que celle de

l'autre, les parties aliquotes en sont aussi plus grandes; de sorte que la Pierre ne peut passer par l'ouverture inferieure de l'intervale de deux voussoirs, qui est plus étroit à la Doele qu'à l'Extrados; ainsi étant pressée par sa pesanteur contre les voussoirs Collateraux, qui se servent mutuellement d'appui les uns aux autres, elle est soutenuë en l'air par la résistance des derniers appuis, qui sont les Piedroits, lesquels doivent avoir assez de force pour contrebalancer l'effort que ces voussoirs ou especes de coin font pour les écarter.

Nous avons encore deux autres raisons de cette construction; la premiere concerne la Simetrie, afin de conserver toûjours une inclinaison uniforme des joins de tête sur la courbe du Ceintre; car quand même les parties de l'arc exterieur & de l'interieur ne seroient pas proportionelles, la voute n'en subsisteroit pas moins, pourvû que celles de l'interieur soient toujours plus petites que celles de l'exterieur, il n'en résulteroit d'inconvenient que de la difformité, & une inégale impulsion des voussoirs contre leurs Collateraux.

La seconde raison est pour une plus grande solidité, parce que les plans qui passent par les joins de tête, qu'on appelle les lits, étant perpendiculaires à la tangente de l'arc au point de sa division, font avec la Doele de part & d'autre le plus grand angle qu'ils puissent faire, qui est le Droit, ou infiniment peu different du Droit; car si on le faisoit obtus d'un côté, il rendroit l'autre aigu.

Or il importe que les résistances des *Arêtes*, c'est-à-dire, des angles des Pierres, soient égales pour porter également la charge, car il est clair que la plus forte feroit casser la plus foible, comme l'expérience le fait voir aux platebandes, où l'on est forcé d'en agir autrement; ce que nous ferons remarquer au Livre suivant, en donnant les moyens d'y remedier.

QUATRIE'ME REGLE.

Abaisser des Perpendiculaires de chacun des Points de division de l'Arc exterieur & de l'interieur sur le Diametre commun prolongé, où il le faut, pour en avoir la projection sur une ligne droite.

Fig. 237. 238. & 239. Soit [*Fig.* 237. 238. & 239.] les arcs ABD exterieur, & *abd* interieur divisez en parties proportionelles A 1, 1.2, 3.4, & *a* 1, &c. par les lignes 1. 1, 2. 2, 3. 3, 4. 4, on abaissera sur le diametre commun *ad*, & sur son prolongement AD des perpendiculaires de chaque point de division 1. 2. 3. 4. lesquelles pour l'arc exterieur seroient 1E, 2F, 3G, 4H, & pour l'interieur 1 *e*, 2*f*, 3*g*, 4*h*, pour avoir les projections des divisions de l'arc exterieur aux points EFGH, & de l'interieur aux points *efgh*.

Les perpendiculaires, dont il eſt ici queſtion, ſont ordinairement en œuvre des verticales, c'eſt-à-dire, en termes de l'art des *à-Plombs*, & lorſque le diametre du Ceintre n'eſt pas horiſontal, comme il arrive aux arcs Rampans, au lieu du diametre on ſubſtituera une ligne horiſontale, juſqu'à laquelle on prolongera ces perpendiculaires au deſſous du diametre incliné.

La raiſon de cette operation eſt qu'elle fournit une maniere commode de trouver l'inclinaiſon de chaque Corde des arcs du ceintre diviſé en vouſſoirs, en ce que chacune de ces Cordes devient l'Hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont la projection donne la longueur de la jambe horiſontale *ae* pour le premier de l'interieur a *e* 1, *Fig.* 239. & *ef* ou ſon égale 1 *K* pour le ſecond triangle 1 K 2; de ſorte qu'il ne reſte plus qu'à trouver la hauteur de l'autre jambe du triangle rectangle *e* 1 ou K 2, pour avoir les deux extremitez de l'arc ou de ſa Corde, *a* & 1, ou 1 & 2, pour avoir ſa poſition à l'égard de l'horiſon; ce que la difference des perpendiculaires ſur le diametre donne facilement, en retranchant de la hauteur 2*f*, la premiere hauteur *e*. 1.

Il eſt viſible que ces differences de hauteurs où ces hauteurs à l'Impoſte *a* ſont les Sinus Droits de l'inclinaiſon des Cordes des diviſions des ceintres, & les lignes horiſontales trouvées par la projection *ae*, *ef* ſont leur ſinus de Complément.

Or avant que de creuſer les arcs dans la Pierre, on commence toujours par en trouver les Cordes par pluſieurs raiſons, qu'on verra dans la ſuite. Cette pratique eſt la fondamentale de toutes les projections, on la trouvera repetée à chaque Trait de la coupe des Pierres au IV. Livre; *c'eſt pourquoi il eſt bon d'y faire attention.*

Il faut remarquer que quoique les lignes qui ſont la projection des arcs ſoient verticales dans l'exécution, il n'importe dans le deſſein de l'Epure en quelle ſituation on les trace, pourvû qu'elles ſoient toujours perpendiculaires à une ligne ſuppoſée horiſontale.

Cet avertiſſement n'eſt pas inutile pour les Commençans qui trouvent étrange, que dans l'Epure on place les ceintres quelquefois dans une ſituation renverſée, ou pour la commodité de l'arangement de la Figure, à laquelle on joint le plus ſouvent les parties contiguës, ou pour éviter la confuſion des lignes qui ſe croiſent; ou pour s'accommoder à la place du papier, ou du mur ſur lequel on fait le Trait.

L'imagination doit redreſſer les plans couchez ſur d'autres plans, avec leſquels ils doivent faire des angles Droits, aigus ou obtus; or en quelque

ſituation que l'on les ſuppoſe, les perpendiculaires à leur commune interſection donneront toujours les mêmes points de projection des arcs; ainſi, *Fig.* 239. ſi l'on ſuppoſe les arcs B D, M D & *b d*, *p d* égaux entr'eux, & également diviſez aux points 3. 4. *o* & *n*, il eſt évident que les perpendiculaires tirées à leur interſection commune C D, donneront les mêmes points de projection *g* & *h* pour les points *o* & *n*, comme pour les points 3 & 4; ainſi dans les Traits, on trouvera des ceintres placez indifferemment en tout ſens, ſuivant la commodité de la Figure & du Papier.

CINQUIE'ME REGLE.

Mener par les Points de projection des diviſions des Ceintres, des Lignes droites ou courbes, comme il convient à la direction des joins de Lit de chaque eſpece de Voute, qui en expriment la projection.

Fig. 237. 238. Soit [*Fig.* 237. & 238.] la ligne *a d*, le diametre d'un ceintre ſur lequel on a trouvé par la projection les points *e*, *f*, *g*, *h*, qui expriment les diviſions des joins 1, 2, 3, 4, ſi la voute eſt Cylindrique comme à la Figure 237. pour trouver la direction des joins de lit, & la tracer, il ne s'agit que de mener des paralleles à l'axe, ou aux côtez du Berceau par les points *e*, *f*, *g*, *h*, comme *ek*, *fl*, *gm*, *hn*, & ſi le Berceau n'eſt pas droit, mais tournant comme une voute ſur le Noyau circulaire, *Fig.* 238. aulieu de lignes droites, on tirera des arcs de Cercles concentriques à ſes côtez, ou des arcs d'Ellipſes, ſi cette voute tourne en Ellipſe, & l'on aura la direction des joins de lit, comme *ekp*, *flg*, *gmr*, *hns*.

Fig. 233. Si la voute eſt ſphérique, comme à la Figure 233. du point C pour centre, il faut décrire autant de cercles concentriques par les points de projection des joins, on aura de même la direction de ces joins, qui eſt encore parallele aux Piedroits de la voute.

Fig. 240. Enfin ſi la voute eſt Conique, comme à la Figure 240. ayant trouvé la projection des diviſions du ceintre primitif A M B aux points F D N O, on tirera par ces points & par le ſommet interieur du Cône S les lignes *s*F, *s*D, *s*N, *s*O, qui ſeront les directions des joins de lit.

Par où l'on voit, que dez qu'on a la projection des diviſions du Ceintre primitif, on a auſſi la direction des joins de lit exprimée ſur le plan Horiſontal.

Il faut ſeulement excepter de cette remarque les voutes ſphériques, ou ſphéroïdes, dont les joins de lit ſont dirigez à des Poles horiſontaux; parce que leurs projections ſont des Ellipſes qui ſe croiſent aux Poles, comme les ſommets de deux Cônes égaux tournez en ſens contraire ſur un axe commun, qu'on pourroit inſcrire dans le ſphéroïde.

La raison de cette operation eſt que les vouſſoirs doivent être couchez, ſuivant leur plus grande longueur dans une ſituation horiſontale, ou qui en approche autant qu'il eſt poſſible, pour leur donner une meilleure aſſiete; or lorſqu'ils ſont rangez ſuivant la direction d'un Berceau horiſontal, où ils ſont toujours horiſontaux dans un ſens, ils s'appuïent totalement ſur leurs lits, mais dans les voutes inclinez, ils s'appuïent ſur leurs Têtes, quelquefois autant que ſur leurs Lits.

Secondement, on prolonge la direction des joins de lits dans la longueur, ou dans le circuit de la voute, afin de leur donner la grace d'une Simetrie de lignes droites ou courbes paralleles aux Impoſtes, leſquelles font une eſpece d'ornement dans les Voutes ſphériques, & ſi on s'écarte de cette diſpoſition en inclinant les joins, c'eſt encore pour en faire un ornement plus ſingulier par un arrangement d'arcs.

On pourroit obſerver une pareille Simetrie à l'égard des joins montans, qu'on appelle joins de Doele qui les traverſent; comme je l'ai vû exécuté au Pont d'Avignon ſur le Rône, dans la partie qui ſubſiſtoit ſur le petit bras de la Riviere. Mais il en réſulte deux inconveniens, l'un pour la conſtruction, en ce que l'on n'a pas la liberté d'y employer des Pierres de longueurs inégales, l'autre pour la ſolidité, parce que les parties ne ſont pas liées enſemble; de ſorte que dans l'exemple que je viens de citer, le quart, la moitié & même les deux tiers du Pont pouvoient tomber ſans entrainer le reſte, ce que l'Architecte avoit peut être fait à deſſein.

Il peut encore arriver qu'une partie de voute s'afaiſſe davantage en ôtant les ceintres que les voiſines, dont l'appareil a pû être mieux exécuté, & faire ainſi des inégalitez dans la Doele; enfin l'uſage eſt de prolonger par une ſuite réguliere les joins de Lit, & non pas ceux de Doele, qui ne doivent faire aucune ſuite, que lorſqu'on veut affecter de la déliaiſon.

Les lignes de la projection des joins de lit, quoique ſimples dans l'Epure, ſont la repreſentation de trois lignes de la voute; ſçavoir, de l'intervale vuide qui reſte entre deux vouſſoirs, que l'on remplit quelquefois de Mortier; & des deux angles ou arêtes de ces deux vouſſoirs, qui ſe touchent à la ſurface de la Doele; c'eſt pourquoi on les appelle en termes de l'art *le Plan des arêtes des joins de Lit*, diction impropre qu'on ne peut adopter, puiſqu'on ne peut dire le plan d'une ligne, mais bien la *projection* d'une ligne.

L'on verra au Livre ſuivant de quel uſage ſont les projections des joins de lit; nous dirons ſeulement à l'égard des voutes Cylindriques, qu'elles ſervent à couper proportionellement les diametres des differens ceintres,

ſur leſquels élevant des perpendiculaires égales à celles qui tombent des diviſions du ceintre primitif, on trouve les hauteurs & les diviſions des joins de chaque ceintre ; ainſi, *Fig.* 239. à cauſe des paralleles *ap*, *ee*, *ff*, &c. les diametres *ad* & *pq* ſont diviſez proportionellement de même que *pq* & *rs*; de ſorte que le diametre *ad*, projection de l'arc primitif *abd*, eſt diviſé proportionellement au diametre *rs*, & parce que les hauteurs du Berceau ſont ſuppoſées égales par-tout en faiſant *yt*, *zu* égales à *e* 1, *f* 2, on aura les diviſions du troiſiéme ceintre; ce qui ſera expliqué plus au long dans la ſuite.

Si après avoir fait la projection des joins de Lit de la Doele ou Intrados, on en fait autant pour ceux de l'Extrados; on trouvera les points des diviſions des ceintres exterieurs, leſquels étant joins par une ligne aux interieurs, donneront l'inclinaiſon des plans des lits. Mais pour ne pas multiplier les lignes, on ne tire ces projections que dans le beſoin; nous les omettons preſque toujours dans cet Ouvrage, pour éviter la confuſion dans les Traits de l'Épure, où elles cauſent un embarras qui n'eſt pas un petit obſtacle à l'intelligence des Traits de la coupe des Pierres.

Pour faire la projection des joins de lit des voutes Coniques, dont les ſommets ſont loin, ou ſeulement hors de l'étenduë de la ſurface, ſur laquelle on la veut tracer, il ne ſuffit pas d'avoir la projection des joins d'un ceintre primitif, il en faut un ſecond; parce que ces lignes n'étant pas paralleles entr'elles, doivent tendre à un point qui eſt le ſommet du Cône, & ſi le ſecond ceintre n'étoit pas parallele ou ſemblable au primitif, on pourroit être embaraſſé pour aligner ces joins, dont il n'y a qu'un ſeul point donné par la projection ſur le diametre du ceintre primitif; voici un moyen aiſé de le faire.

Probleme I.

Par un Point donné auprès de deux Lignes convergentes, en mener une troiſiéme qui tende au même ſommet de l'Angle qu'elles feroient, ſi elles étoient prolongées.

Fig. 241. 242. Soient *Fig.* 241. 242. les lignes AB & CE inclinées entr'elles, & le point D entre les deux, ou au dehors; on tirera à volonté par ce point la ligne DAC, *Fig.* 242. ou ADC, *Fig.* 241. qui coupe les deux lignes données en A & en C; on lui menera enſuite une parallele BE, à telle diſtance qu'on voudra, & les diagonales AE, BC par les points où cette parallele coupe les lignes données. Du point D par H, ſection des diagonales, on tirera DG, & tranſportant la grandeur GE, de B en X, on tirera DX qui ſera la ligne cherchée.

DEMONSTRATION.

A cauſe des triangles ſemblables ADH, EGH, on a AD : EG : : AH : EH, & les triangles ſemblables ACH, EBH donnent AH : EH : : AC : BE, donc auſſi AD : EG ou BX : : AC : BE; *ce qu'il falloit faire.*

SIXIE'ME REGLE.

Les Lits des Voutes Cylindriques & Coniques doivent être, autant qu'il eſt poſſible, des Surfaces planes.

La raiſon eſt que la ſurface plane étant la plus ſimple, eſt par conſéquent la plus facile à exécuter, & la plus propre à s'adapter ſur une ſemblable; en ſorte que l'intervale des joins devienne le moindre qu'il eſt poſſible dans l'exécution; On éprouve en effet que lorſque les ſurfaces ſont courbes aux lits & aux joins, elles ſont rarement aſſez bien exécutées dans leur concavité ou convexité pour que l'une s'ajuſte bien dans l'autre; on eſt toujours obligé d'y retoucher, & de les preſenter ſouvent pluſieurs fois avant que l'une & l'autre ſurface s'ajuſtent bien enſemble; c'eſt par cette raiſon, que plûtôt que de faire des lits gauches, on aime mieux les faire en fauſſe coupe, comme dans les Deſcentes biaiſes, & dans ce Trait qu'on appelle *la Corne de Vache*, où l'on tire les joins du centre du petit ceintre, lequel étant excentrique au grand, ne peut avoir pour joint la même ligne; puiſque le Rayon du petit ne peut pas être perpendiculaire aux arcs du grand, dont les Rayons partent d'un autre point.

On pourroit cependant excepter certaines voutes irrégulieres, comme des Berceaux Elliptiques par un bout, & Circulaires par l'autre, dont les faces ſont apparentes; parce qu'outre la difformité qui en réſulteroit ſur chaque face, où les joins de tête ſeroient en fauſſe coupe, les lits plans pourroient couper les Doeles à angles trop aigus, qui ſeroient ſujets à faire caſſer les arêtes des vouſſoirs en les taillant, en les poſant, ou à la ſeule charge.

SEPTIE'ME REGLE.

Les Lits des Voutes ſphériques ou ſphéroïdes ſont des Surfaces Courbes.

La raiſon eſt qu'ils ſont formez par la révolution des joins de tête $e\,1$, $f\,2$, $g\,3$, autour de leur axe BC, auquel ils ſont inclinez; d'où il ſuit *Fig.* 233.
qu'ils ſont alternativement concaves & convexes pour s'adapter les uns dans les autres, comme des Cornets.

REMARQUE.

Les Lits des Voutes Cylindriques, Sphériques & Coniques régulieres sont des Surfaces qui ont toujours deux côtez paralleles, soit qu'elles soient planes, ou qu'elles soient courbes.

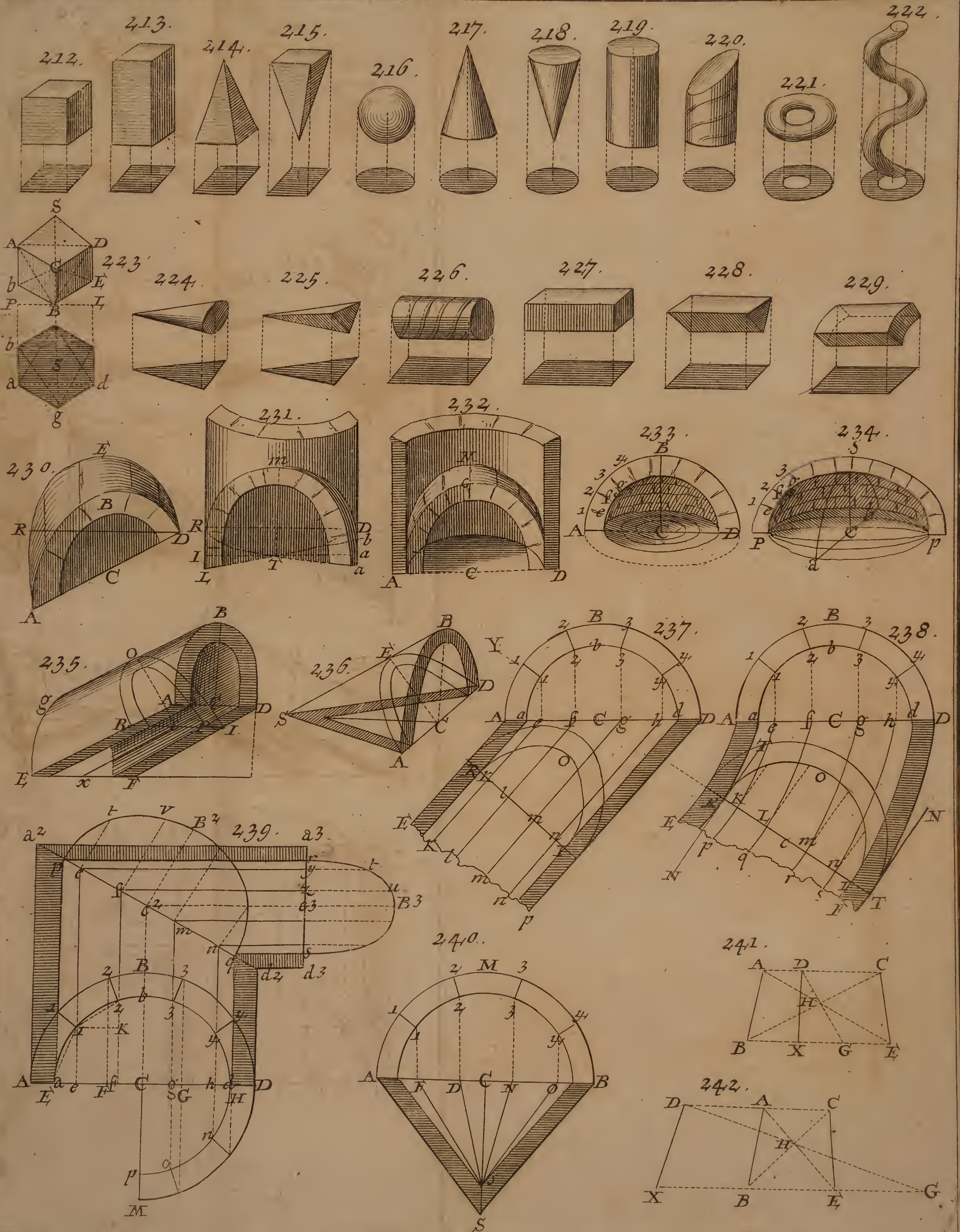
La raison est que les voutes sont ordinairement d'une même épaisseur; or comme les Lits s'étendent du dedans au dehors, ils sont terminez d'un côté par la Doele, & de l'autre par l'Extrados, qui sont paralleles au moins horisontalement.

Et quoique la voute ne soit pas extradossée d'une égale épaisseur, si elle est Cylindrique, & qu'elle s'épaississe vers les Reins, suivant la Courbe que M. Parent a trouvé pour balancer la poussée par l'augmentation d'épaisseur des voussoirs, dont on parlera au IV. Livre; il seroit encore vrai que les lits auroient deux côtez paralleles entr'eux, parce que cette épaisseur coupée suivant la direction de la voute, seroit toujours la même à chaque lit, la difference ne tombant que sur les surfaces des joins de Doele, ou de tête, & non pas sur les lits où la Puissance qui résiste au poid, doit toujours être égale à égale distance du point d'appuy.

HUITIÉME REGLE.

Pour connoître si l'on peut prendre des mesures sur une Projection, il faut examiner si l'Objet qui est projetté, étoit parallele au Plan de description.

Nous avons donné la raison de cette Régle, lorsque nous avons démontré que la projection faite par des lignes perpendiculaires à un plan, racourcissoit toujours l'objet projetté, qui n'étoit pas parallele à ce plan; parce que sa longueur étoit l'Hypotenuse d'un triangle rectangle, dont la projection n'est que le côté. C'est par cette raison, que pour avoir les mesures des voussoirs des Descentes biaises, il en faut faire deux projections, l'une horisontale qui donne des mesures trop courtes, & l'autre suivant la Rampe sur un plan qui lui soit supposé parallele. Ainsi l'on verra dans le IV. Livre, que quoique la maniere de tracer une voute en Descente biaise rachetant un Berceau par Equarrissement, soit la même que celle de tracer une Porte biaise en surplomb, il faut mesurer le biais de la Porte sur le plan de niveau, & celui de la Descente sur le plan incliné, appellé *plan suivant la Rampe*, parce que le plan de niveau est trop court; ce qui fait voir la necessité de faire un Profil des Rampes, ou ce qui est la même chose, leur projection sur un plan vertical, pour faire ensuite une nouvelle projection sur un plan incliné, par le moyen duquel on puisse trouver les mesures des voussoirs, dont les joins de lit sont paralleles à la Rampe.


212.
213.
214.
215.
216.
217.
218.
219.
220.
221.
222.
223
224.
225.
226.
227.
228.
229.
230.
231.
232.
233.
234.
235.
236.
237.
238.
239.
240.
241.
242.

CHAPITRE III.

De l'Ortographie, ou de la Projection sur un Plan Vertical.

I.°

DU PROFIL.

ON ne peut trouver par le moyen de la projection horisontale, ou *Plan* ichnographique, que des mesures horisontales, comme nous venons de le dire; mais parce qu'on a aussi besoin des mesures verticales, & quelquefois des projections sur un plan incliné, qu'il faut rapporter à un plan vertical, cette maniere de dessein qu'on appelle *Profil*, n'est pas moins necessaire que la precédente qu'on appelle *le Plan.*

La projection verticale change de nom, suivant la situation dans laquelle on represente les Objets; s'ils sont representez par le côté, suivant leur profondeur, on l'appelle *Profil*: s'ils sont representez dans leur interieur, suivant une longueur parallele à leur surface qu'on suppose ôtée, on l'appelle *Coupe*; & s'ils sont vûs en face, on l'appelle *Elevation.*

Cette difference qui ne consiste que dans la dénomination, n'en fait aucune dans la maniere de faire les representations. C'est toujours une projection sur un plan vertical, & à bien prendre la chose, c'est encore la même que pour faire la projection horisontale; car il n'y a qu'à supposer une position de plan vertical, au lieu d'un plan horisontal, & mener sur ce plan des lignes horisontales, au lieu de verticales, par les angles ou divisions de l'objet. S'il ne s'agissoit ici d'introduire le lecteur dans les principes d'un Art, dont il faut lui donner des idées distinctes, nous aurions confondu le Plan, le Profil & l'Elevation sous le même nom de *Projection*; car les Régles qui en constituent la difference, ne sont purement qu'accidentelles.

PREMIERE REGLE.

Pour les Voutes Cylindriques.

Un Ceintre supposé en situation Verticale étant donné, il faut mener par tous les Points de sa division en Voussoirs des Lignes horisontales, jusqu'à la rencontre d'une Ligne verticale ou supposée telle, pour en faire le Profil.

Cette Régle ne differe de la quatriéme du chapitre precédent, qu'en ce que ces lignes ne sont pas menées sur le diametre horisontal, mais sur une ligne qui lui est perpendiculaire, comme A E, [*Fig.* 243.] sur le Rayon C A, sur laquelle on a mené les paralleles à l'horison B E, 4*f*, 3*g*, 2*h*, 1*i*, pour *Fig.* 243.

avoir les hauteurs des points 4, 3, 2, 1, rassemblées sur cette ligne AE.

On pouvoit au lieu des horisontales BE, 4*f*, 3*g*, &c. abaisser des perpendiculaires 4*p*, 3*q*, 2*r*, 1*s*, comme l'on a fait ci-devant pour la projection horisontale, & transporter avec le compas la longueur de chacune de ces lignes sur AE, à commencer du point A; sçavoir, *p*4 en A*f*, *q*3 en A*g*, &c. & l'on auroit eu les mêmes points E*fgh*; mais il convient pour la pratique de les chercher par des perpendiculaires sur AE, parce qu'elles en font connoître les origines, & le point de division qu'on a voulu representer; ce qui empêche la confusion, d'autant plus que chaque point de la ligne AE en represente toujours deux, lorsque les ceintres sont également divisez dans chacune de leurs moitiez; comme ils le sont ordinairement, ou doivent l'être pour plus de régularité; ce qui fait que dans nos Figures de Profil, 243. & 244. nous ne mettons qu'un quart de cercle, qui est une moitié de ceintre, au lieu du demi cercle qui fait un ceintre tout entier; où l'on peut remarquer qu'il est indifferent de placer la verticale du Profil hors du cercle, comme AE à la Figure 243. ou dans le cercle, comme *h*R à la Figure 245.

La raison pour laquelle on rassemble ainsi toutes les hauteurs des divisions d'un ceintre sur une seule ligne, est premierement pour faire voir l'effet d'une voute vûë de côté, où les directions des joins de lit se resserrent à mesure qu'ils approchent du sommet, quoiqu'en effet, ils soient distribuez autour du ceintre à distances égales.

Secondement, pour changer la direction de ces joins, lorsque les Berceaux sont inclinez, comme à la Fig. 245. où se rencontrent sous quelque angle que ce soit, comme on voit à la Fig. 244. ce qui détermine les hauteurs inégales des Berceaux de même largeur, qui sont inclinez entr'eux.

Troisie'mement, pour trouver les hauteurs des divisions des ceintres des Faces inclinées à l'horison; car en les supposant sur un plan vertical, comme CBA, *Fig.* 244. & les rassemblant sur une ligne aussi verticale CB; il ne s'agit plus que d'incliner cette ligne, comme en C*b*, dans la situation où elle doit étre à l'égard de l'horison, c'est-à-dire, suivant son Talud, & par des arcs de cercle B*b*, *fn*, *gm*, &c. on aura toutes les hauteurs de ces divisions *bv*, *nu*, *mt*, *lx*, *ky*, lesqu'elles sont differentes des premieres BC, 4*p*, 3*q*, 2*r*, 1*s* qui étoient plus grandes.

SECONDE REGLE.

Mener des paralleles à la direction des Voutes en Berceau, par les Points de leur projection sur une Ligne verticale, pour y marquer les joins de Lit, & lorsque ces paralleles rencontrent une Ligne de jonction de deux Berceaux, reproduire ces mêmes Lignes parallelement à la direction du second Berceau, & ainsi d'un troisiéme.

Cette Régle se comprendra facilement par l'exemple de la Fig. 245. où l'on a representé une Descente *hnp*R, & à la Figure 244. une autre HD, qui aboutit à deux Berceaux horisontaux EDC*b* dans le bas, & HG, c^3, b^3 dans le haut. Fig. 244. & 245.

Ayant trouvé par la Régle precédente les divisions de la ligne C*b*, égales à CB, on tirera par les points trouvez *nm*, *lk*, les paralleles *nx*, *my*, *l*Y, *k*2, jusqu'à la rencontre de la ligne ED, qui represente le plan de l'Ellipse commune aux deux Cylindres EDC*b* & HD, & par les points *x*, *y*, Y, *z*, on tirera autant de paralleles à la ligne EH ou DG, qui donneront les intervales des joins de lit du second Berceau plus resserrez jusqu'à la seconde ligne HG, d'où on les reproduira parallelement à Hb^3, direction du troisiéme Berceau, où ils le seront encore plus; on continueroit de même pour les directions des Lits d'un quatriéme, s'il y en avoit.

La raison de cette operation, est que les joins de Lit doivent être continuez en ligne droite, parallelement à la direction des Piedroits des voutes, & à leurs Impostes: c'est pourquoi ils sont representez par des lignes paralleles dans le *Profil*, comme nous l'avons dit du *Plan*; la seule difference est que les paralleles de la Projection horisontale se resserrent vers les Impostes, & que dans le Profil, elles se resserrent vers la Clef, & les intervales de ces paralleles mesurez perpendiculairement, sont les sinus Droits de l'inclinaison des Cordes des arcs de chaque voussoir, comme les intervales des paralleles de la Projection horisontale, sont les sinus de leurs Complémens; de sorte qu'ayant trouvé les uns & les autres par ces deux sortes de Projection, on a les deux jambes du triangle rectangle, dont l'hypotenuse est la Corde de l'arc du ceintre, que comprennent les divisions de chaque voussoir; par conséquent on a la position de cette Corde à l'égard de l'horison, & l'angle qu'elle doit faire avec la Corde de l'arc suivant, soit qu'il soit portion de Cercle ou d'Ellipse.

TROISIE'ME REGLE.

Transporter toutes les Perpendiculaires tirées des divisions du Ceintre primitif au Rayon vertical, sur le demi diametre de chaque Berceau, pour avoir la Courbe des Ceintres secondaires, tant des arcs Droits, que des inclinez.

Soit *Fig.* 241. le quart de cercle CBA, moitié du Ceintre primitif divisé à sa circonference aux points 1, 2, 3, 4, ayant tiré par ces points des perpendiculaires à son demi diametre vertical, comme 1*i*, 2*h*, 3*g*, 4*f*, on les transportera sur tous les differens demi-diametres des Berceaux. 1.° Comme l'incliné en Talud C*b*, 2.° le vertical *bv*, qui est l'Arc Droit. *Fig.* 244.

3.° L'incline' de rencontre FD.

4.° Le perpendiculaire à la direction c^2, b^2, qui eſt l'arc Droit de la deſcente HD.

5.° L'incline' de rencontre HG.

6.° Le vertical de ſortie c^3, b^3, qui eſt auſſi un arc Droit, en un mot par-tout où l'on voudra avoir le changement des ceintres que donnent les differentes ſections des plans paſſans par ces demi-diametres. Ainſi pour former le ceintre de l'arc Droit du Berceau Rampant HD; ayant tiré à volonté la perpendiculaire b^2, c^2, qui coupera les paralleles originaires des points 1, 2, 3, 4, aux points *d*, *d*, *d*, on portera ſur chacune de ces paralleles les longueurs correſpondantes au ceintre Primitif AB, des Ordonnées 1*i*, 2*h*, 3*g*, 4*f*, en *d*1, *d*2, *d*3, *d*4, & l'on aura l'arc Droit ſurbaiſſé b^2, a^2, on tranſportera auſſi les mêmes Ordonnées perpendiculairement ſur les diviſions de la ligne HG, pour avoir l'arc de rencontre H3, *ig*, enfin ſur la ligne c^3, b^3, comme le marquent les mêmes chiffres pour avoir le dernier ceintre de face ſuperieure b^3, a^3. On obſervera la même conſtruction à l'égard de la ligne DE, ſi l'on vouloit avoir le ceintre de rencontre des differens Berceaux, avec cette ſeule difference, qu'au lieu des lignes obliques qui les coupent au Profil, il faut leur mener des perpendiculaires ſur chacune des diviſions, que donnent ces lignes, comme on voit en G*g*, *u*1, *v*2, *v*3; ce qu'on n'a pas fait dans cette Figure, pour éviter la confuſion.

La raiſon de cette operation, eſt que les largeurs des Berceaux étant par-tout égales, leur difference ne peut être que dans les hauteurs. Quoique les Berceaux ſoient inclinez à l'horiſon, les Ordonnées paralleles au plan qui paſſe par les Impoſtes ſeront des horiſontales, & par conſéquent égales à celles qui étoient paralleles au Rayon AC, leſquelles déterminent les largeurs, & coupent les demi-diametres, qui ſont dans des plans verticaux en parties proportionelles, telles que doivent l'être les abſciſſes des Ellipſes.

Si les Berceaux étoient Rampans ſuivant les Impoſtes, alors la ligne AC deviendroit inclinée au Rayon vertical CB, & toutes les autres Ordonnées lui ſeroient paralleles.

Sur quoi il eſt aiſé de remarquer qu'il n'eſt pas indifferent de prendre pour ceintre Primitif une face couchée en Talud, comme C*b*, ou ſa hauteur verticale *bv*, qui eſt l'arc Droit du Berceau horiſontal; puiſque ſi l'un eſt en plein ceintre, l'autre ſera ſurbaiſſé ou ſurmonté; c'eſt à l'Architecte à voir ce qui convient le mieux à ſon deſſein.

Des Profils des Berceaux à double Obliquité.

Tous les Profils dont nous venons de parler, ne ſuppoſent qu'une

obliquité, ou de direction, à l'égard du plan vertical, comme les Descentes; ou d'inclinaison de face, comme les Taluds; mais il en est d'autres qu'on ne peut exprimer dans les Profils, sans racourcir ou les faces ou les axes; de sorte qu'on ne peut plus y prendre de mesure, telles sont les obliquitez du Biais simple, du Biais & du Talud joint ensemble, ou de la Descente & du Biais; parce qu'alors si le plan de description est parallele à une des directions, il ne l'est pas à l'autre.

On verra dans le IV. Livre la maniere de faire les Profils de ces differentes especes de voutes obliques, & de suppléer par le Plan horisontal, & des seconds Profils aux racourcissement qui se trouvent dans les parties du premier, qui n'y peuvent être dans leurs mesures.

Comme nous ne donnons ici que les Régles generales, nous n'entrerons point dans le détail de toutes les differentes compositions d'obliquité; mais nous ferons voir comment on peut les réduire en une seule.

Probleme II.

Réduire toutes les differentes Obliquitez de biais, de Talud & biais, de biais & descente, de descente, Talud & biais, en une seule, pour ne faire qu'un Profil, qui exprime toutes ces Obliquitez, & conserve les mesures que l'on y doit prendre.

Ce Problême qui est le principe secret & misterieux de la methode de Desargues, sera détaillé au IV. Livre pour toutes sortes de Berceaux en particulier, où nous expliquerons ce qu'il a caché sous des noms impropres, qu'on trouve dans le Livre de Bosse.

Premierement, il est clair que toutes les obliquitez qui ne sont pas de directions differentes, peuvent se réduire à une seule; ainsi [*Fig.* 244.] *Fig.* 244. & 245.
dans une descente HD, le Talud HG ou le surplomb ED étant perpendiculaires au plan vertical passant par l'axe du Cylindre DG, peuvent être exprimez dans le même Profil differemment situé, sans aucun changement; car si je prends DG pour une horisontale, quoiqu'elle soit inclinée, il n'en résultera d'autre changement que celui de nom; sçavoir que HG que j'avois appellé Talud à l'égard de l'horison G a^3 ou CD, s'appellera surplomb à l'égard d'un horison DG, & qu'au contraire DE qui étoit en surplomb deviendra un Talud. Ainsi j'ai déja réduit deux obliquitez de descente & Talud en une seule de surplomb, & celle de descente & surplomb en une de Talud.

Secondement, [*Fig.* 245.] je puis changer une obliquité simple en une autre obliquité connuë sous un nom different; si par exemple je considere le demi Berceau R*hnp*, comme incliné à l'horison OR, je puis

le confiderer auffi comme horifontal fur R*p*, mais biais à l'égard d'une ligne de face R*b* confiderée comme étant dans le plan de fuppofition horifontal *b*R*p*, au lieu que dans la premiere fuppofition, elle étoit verticale dans le même plan confideré en fituation verticale, fans qu'il en réfulte d'autre changement, que celui du *niveau* en *à plomb*; la feule difference qui en réfulte, eft la tranfpofition de la Clef au lieu où étoit l'Impofte, & la divifion des vouffoirs qu'on commencera à une extremité d'un Rayon, au lieu de la commencer à l'autre, fi l'arc de face eft circulaire, mais s'il étoit furbaiffé ou furhauffé, il en réfulteroit une tranfpofition d'axe du grand au lieu du petit, & du petit au lieu du grand; ce qui arrivera à l'arc Droit, fi l'arc de face eft circulaire.

Au refte il eft clair que cet arc Droit n'eft pas fufceptible d'aucun autre changement, quand même on augmenteroit ou diminueroit le talud, le biais, la defcente ou le furplomb.

Si cependant les obliquitez des faces font doubles de differentes directions, comme de Biais & Talud tout enfemble, ou defcente & de Biais; alors on ne peut pas les réunir en une par la feule tranfpofition du niveau en à plomb; il faut chercher la pofition du diametre de plus grande obliquité, qui eft celui de la fection d'un plan paffant par l'axe perpendiculairement à la face du Berceau.

Fig. au deffus de 247. Soit AB [dans la Fig. au deffus du chiffre 247.] le Diametre horifontal d'un Berceau, dont la direction horifontale de fon Piedroit eft AG, & celle de fon axe qui lui eft parallele eft CX, faifant avec AB l'angle aigu XCA, foit auffi l'inclinaifon de fa face en Talud, fuivant un angle donné SCT, ou fon Complément TCB, du point C pour centre & CA pour Rayon, ayant décrit un cercle ASBK, qui coupera CT en T, on tirera de ce point T une parallele à ACB, & du point A une perpendiculaire A*x* à l'axe donné CE, qui coupera T*t* en *t*, fi par ce point *t* & le centre C, on tire une ligne DI, on aura l'obliquité fimple *t*C, compofée des deux PC du Biais, & *t*P du Talud, laquelle fera la projection d'un plan paffant par l'axe perpendiculairement à la face, & par conféquent celle d'une partie de l'axe fur le diametre de la plus grande obliquité. Pour détacher ces deux lignes confonduës par cette projection, on menera par le point *t* une perpendiculaire indéfinie *t*F, qui rencontrera la ligne de Talud TC prolongée en F, je dis que l'angle *t*CF eft celui de l'axe avec le diametre de la fection de la face coupée par un plan paffant par l'axe & perpendiculairement à cette face.

Demonstration.

Soit tirée A*x* perpendiculaire à EC qui rencentrera T*t* au point *t*.

Si l'on ſuppoſe deux Cylindres horiſontaux de baſes égales & de differentes directions de Biais & de Talud, que nous exprimerons par celles de leurs axes EC oblique ſur AB, & SC qui lui eſt perpendiculaire; ſi l'on fait mouvoir ces deux Cylindres en ſens contraire chacun autour de ſon axe, il eſt clair que le point T décrira un arc de cercle en l'air, dont la projection eſt la ligne T*t*, & que le point A tournant autour de l'axe XC décrira un autre arc, dont la projection eſt A*x*, qui rencontrera le precédent en un point en l'air, qui ſera exprimé au plan horiſontal par le point *t* commun aux deux diametres, & la ligne *t*C ſera la projection du Rayon CT dans un plan vertical, commun aux deux baſes des Cylindres; lequel Rayon eſt auſſi commun à la baſe d'un troiſiéme Cylindre, qui auroit pour axe DC, & pour inclinaiſon de ſa face l'angle DCF; car ſi l'on fait mouvoir le diametre TCF autour de cet axe, il eſt clair que le point F décrira en l'air un arc, dont F*t* eſt la projection, par conſéquent au lieu de conſiderer les deux Cylindres precédens, je puis ne conſiderer que le troiſiéme, dont l'obliquité FCD ſur ſon axe CD raſſemble celle des deux autres, ſuppoſant toûjours des baſes égales.

Il eſt viſible que ſi l'on prolonge la perpendiculaire juſqu'à la circonference du cercle en H, & qu'on tire HC, on aura un angle DCH égal à DCF, & par conſéquent que le diametre de plus grande obliquité pourra être repreſenté en deſſus en HK, ou en deſſous en FT, & l'axe par HC ou DC, puiſque l'angle de leur rencontre eſt toûjours le même en C.

Cela ſuppoſé, ſi l'on prend DI pour diametre de la baſe, il ſera évident qu'il ſera celui de la plus grande obliquité, puiſque le plan *t*HC paſſe par l'axe HC, & par la perpendiculaire H*t* qui eſt horiſontale ſur une ligne DI, qui eſt dans un plan incliné coupé par un vertical; or cette ligne H*t* qui eſt le ſinus droit de l'angle HCD, eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point H de l'axe au diametre DI; par conſéquent l'angle HCD eſt le plus petit de tous ceux que l'axe peut faire avec un des diametres de la baſe; *ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

De la connoiſſance de cet angle, il ſuit qu'on peut faire le Profil d'un Berceau à double obliquité, ſuivant les mêmes Régles que pour ceux qui n'en ont qu'une, ou deux de même direction, réduites à une; la difference qu'il y aura, c'eſt qu'au lieu de prendre la baſe horiſontale de la face donnée pour celle de la projection des diviſions de ſon ceintre en vouſſoirs, on prendra le diametre trouvé DI, ſur lequel on abaiſſera des perpendiculaires des points de ces diviſions; ce qui oblige à la deſcription d'un peu plus de la moitié de la baſe, ajoûtant au deſſous de AB l'arc

BI=AD; ainſi pour faire la projection des Impoſtes A & B, on menera de ces points ſur le diametre DI les perpendiculaires A*a*, B*b* qui donneront des points *a* & *b*, leſquels ne ſeront plus aux extremitez du diametre de baſe, comme ils étoient auparavant. Cependant il eſt viſible que ſi par ces points *a* & *b*, on mene des paralleles *a*X, *bm*, à l'axe HC, on retombera dans le cas de la pratique ordinaire de la Figure 245. ſuppoſant l'angle AR*p* égal à l'angle DCH de celle-ci; ſoit qu'on réduiſe les deux obliquitez au ſimple biais, ou à la ſimple deſcente Droite.

Corollaire II.

Puisque cette conſtruction change l'angle XCA du premier Biais en HC*a*, celle du Piedroit AG ſera tranſportée en *a*X parallelement à l'axe, & les lignes *ar* & *b*R perpendiculaires à l'axe exprimeront, le demi diametre de l'arc Droit, paſſant par les joins de lit des Impoſtes, il en ſera de même pour tous les autres joins de lit; ce qui fait voir comment on peut revenir à la même pratique de Profil qui a été expliqué à la Figure 244. où l'on a fait l'arc Droit a^2, b^2, par le moyen du demi diametre c^2, b^2, perpendiculaire à l'axe DG, diviſé en ſes abſciſſes, c'eſt-à-dire, qui font des diſtances équivalentes à des hauteurs des retombées; ce que nous expliquerons plus au long au IV. Livre.

Corollaire III.

Si au lieu de conſiderer le diametre AB, comme horiſontal dans un plan incliné, on le conſidere comme étant dans un plan vertical le diametre DI ſera incliné à l'horiſon, & ſi l'on veut auſſi ſuppoſer DI horiſontal, AB ſera incliné à l'horiſon, & *m*L perpendiculaire à DI ſera une verticale, laquelle ſera perpendiculaire à l'axe horiſontal HC, quoique tous les autres diametres poſſibles lui ſoient inclinez; d'où il ſuit que quelque Biaiſe que ſoit une voute, il y aura toûjours une tête de lit, où il n'y aura du tout point de Biais, & qui ſera parfaitement à l'équerre.

Corollaire IV.

Il ſuit auſſi que tous les angles des têtes des lits des vouſſoirs compris entre *m* & D ſeront obtus, & entre *m* & I, ils ſeront aigus plus & moins, ſelon qu'ils approcheront des extremitez D ou I, ce qui doit s'entendre auſſi des côtez oppoſez au deſſous du diametre DI; parce que les côtez des Cylindres étant paralleles à leur axe, l'angle de chacun de ces côtez avec un diametre donné, eſt égale à celui que fait l'axe avec ce même diametre.

Corollaire

Corollaire V.

Puisque les angles que l'axe fait avec chacun des diametres du cercle de la base du Cylindre ou face du Berceau, sont tous inégaux; il suit qu'on peut faire une infinité de Profils differens d'un même Cylindre scalene, dans lesquels il paroîtra plus ou moins incliné; en sorte que s'il est fait par le diametre perpendiculaire à celui de plus grande obliquité, le Profil de ce Cylindre, ou ce qui est le même, d'un Berceau biais, sera le même que celui d'un Droit.

Corollaire VI.

Si l'on tire aussi une perpendiculaire *nu* à l'axe HK, elle representera un des diametres de l'arc Droit, lequel étant supposé circulaire, la courbe de la face sera une Ellipse, dont le grand axe sera dans la plus grande obliquité DI, le petit axe en *m*L, qui lui est perpendiculaire; ce qui donne une facilité pour en tracer le ceintre.

Corollaire VII.

Au reste de quelque Courbe que soit le ceintre de face, ou celui de l'arc Droit, la maniere de trouver le diametre de la plus grande obliquité sera toujours la même; car le demi diametre CT sera égal à FC, quoique l'on subsistuë une Ellipse au lieu du cercle THF, & les perpendiculaires T*t* & A*x* aux directions SC, EC se rencontreront toujours au même point *t*, si sans égard à l'arc de face, on prend sur AC une longueur égale à CF ou CT, ce qui est indépendant du ceintre de face; en effet il est clair que quand même on ne prendroit que la moitié de ces lignes, les perpendiculaires *t*T & A*t*, qu'on peut considerer comme les côtez d'un Parallelograme, ne feroient que se rapprocher parallelement, & par conséquent se couperoient toujours dans la même diagonale *t*C; ce qui suffit pour donner l'angle DCF, de l'axe avec le diametre de plus grande obliquité qu'on cherche.

Corollaire VIII.

Puisque l'inclinaison du diametre DI de plus grande obliquité, avec la ligne horisontale donnée pour base de la face AB, & l'angle de cette ligne DI, avec celle qui represente l'axe HC, sont les seules choses essentielles à la réduction de l'obliquité; il est clair que leur transposition au dessus ou au dessous de la ligne AB, ne changent rien à la construction, & qu'ainsi il importe peu que l'axe soit en HC ou en FC, pourvû que l'une & l'autre de ces lignes fassent le même angle avec la ligne DI, & qu'ainsi il importe peu de faire le Profil du Talud au dessus ou au dessous de la ligne

AB; mais en ce cas il faut changer le côté de la perpendiculaire à l'axe de A en B.

Secondement, il faut observer que le talud & le surplomb, la descente & la montée à ouvertures d'angles égales avec l'horisontale AB, donneront toujours le même angle de l'axe HC avec le diametre DI, mais en differens sens; de sorte que les directions opposées donneront des angles de differente nature, l'un aigu & l'autre obtus; mais qui seront toujours les suppléments à deux droits l'un de l'autre.

Troisie'mement, que les Profils des angles d'inclinaison perpendiculaire à une même direction, comme la descente & le talud, la montée & le talud doivent être rangez d'un même côté au dessous de l'horisontale AB, lorsque l'un doit être soustrait de l'autre, & des deux côtez, lorsqu'ils doivent être ajoûtez; sçavoir, le Talud au dessous, & la descente au dessus, comme nous le ferons voir au IV. Livre; parce que si l'on retranche de l'angle de la montée celui du Talud, l'angle de la face avec l'axe qui étoit déja aigu, le devient encore plus. Et si l'on retranche le Talud de l'angle de la descente, qui est équivalent à un surplomb à l'égard de l'axe consideré en situation horisontale, & par conséquent obtus, le surplomb diminuë & approche plus du Droit; ce sera la même chose si l'on ajoûte l'angle du Talud au complément du surplomb ou descente; cet angle qui étoit aigu avec cette addition approchera plus du droit, par conséquent l'obliquité de l'axe sur la face diminuera.

Des Profils des Voutes Coniques.

Les Profils des Trompes & autres voutes Coniques qui seroient faits suivant les mêmes Régles que ceux des Cylindriques ou Berceaux, seroient inutiles pour la construction des Traits.

Fig. 247. La raison est que les projections des joins de Lit, n'étant pas paralleles entr'elles, ne peuvent l'être aussi à un même plan vertical; par conséquent (par le I. Corol. du Chap. V. du II. Livre,) ces points ne peuvent y être representez dans leurs justes mesures; ils seront tous plus courts au Profil, que dans la réalité, excepté un qui peut être dans un plan vertical. Ainsi supposant le Profil S*b*P [*Fig.* 247.] formé sur la projection SPL, il ne s'y trouvera de mesure juste, que la longueur du milieu de la Clef S*b*, dont SH est la projection horisontale; car il est visible que l'Imposte SL, ou son égale SP, est plus courte que son Profil *s*P; puisque SP est l'hypotenuse d'un triangle rectangle, dont *sa*P est un côté, les autres lignes S*n*, S*o* qui representent les joins de Lit, seront un peu moins racourcies, à mesure qu'elles approchent du plan vertical S*b*P.

D'ou il suit, que puisque tous ces Profils racourcissent inégalement

les joins de Lit; on ne peut en trouver toutes les valeurs raſſemblées dans un ſeul plan, comme celles des joins des Berceaux, excepté aux voutes qui ſont des portions de Cônes droits ſur une baſe Circulaire; parce qu'alors la valeur de tous les joins de Lit eſt donnée ſans le ſecours du Profil dans le ſeul plan horiſontal, ces Lits étant tous égaux à celui d'une des Impoſtes.

QUATRIE'ME REGLE.

Dans les Traits des Voutes Coniques Scalenes, il faut faire autant de Profils qu'il y a de joins de Lit, dont les Hauteurs ou les Projections horiſontales ſont inégales, pour en trouver la juſte valeur.

J'entends par le mot de *Scalene*, non ſeulement la voute dont la projection horiſontale ou verticale eſt un triangle ſcalene, mais auſſi celle dont le plan horiſontal eſt un triangle iſoſcele, & dont l'axe eſt Droit ſur ſa baſe, qui n'eſt pas circulaire, mais Elliptique, ou de quelqu'autre Courbe.

Soit [*Fig.* 247.] SAB, le plan horiſontal d'une Trompe que nous con- *Fig.* 247.
ſiderons comme biaiſe, quoiqu'elle ſoit droite, pour ne pas multiplier les Figures; ſur AB, comme diametre de la baſe du Cône, qui eſt la face de la Trompe, ayant décrit la courbe de ſon ceintre, comme le demi cercle AHB ou une demi-Ellipſe, & l'ayant diviſé en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4; on abaiſſera des perpendiculaires de chacun ſur AB, pour en avoir la projection horiſontale aux points D, E, F, G, d'où par le ſommet S du Cône, on tirera les lignes DS, ES, FS, GS, qui ſeront les projections des joins de Lit à la Doele, dont il faut chercher la valeur par le Profil.

Puisque tous les joins rencontrent le plan horiſontal en S, il eſt viſible qu'ils ſont tous chacun l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont on a les deux côtez donnez; ſçavoir, la hauteur des points 1, 2, 3, 4, ſur le plan horiſontal, & la diſtance de leurs projections D, E, F, G du ſommet S, dans la projection horiſontale.

Ainsi on peut faire ces Profils de differentes façons qui viennent toutes à la même fin.

1.° On peut élever aux points D, E, F, G des perpendiculaires égales aux hauteurs D1, E2, F3, G4, & tirer les hypotenuſes demandées, comme E2 en Ee, D1 en D*d*, les lignes S*e* & S*d*, ſeront les vraies longueurs des joins de Lit.

2.° Pour abreger, & profiter des angles droits tout faits, on peut porter les projections ſur la baſe BA prolongée; par exemple, ES en

Ex, & DS en DY, les lignes x2, & Y1, feront les vraies longueurs des joins de Lit, aufquels les oppofez correfpondans aux points 3. & 4. feront égaux, parce que le Cône eft droit; il n'en feroit pas de même s'il étoit fcalene, la Trompe étant biaife.

Ces deux manieres font bonnes en elles-mêmes, mais lorfqu'il y a beaucoup de vouffoirs, elles produifent une multiplicité de lignes qui caufe de la confufion; c'eft pourquoi je crois qu'il convient mieux de porter tous les Profils hors du plan fur une bafe commune.

3.° On prendra une ligne quelconque qui paffe par les fommets S hors du plan, comme SL fur laquelle on tranfportera par des arcs de cercle, faits du même point S pour centre, toutes les longueurs des projections SC, SF, SG, en K, L, *n*, où l'on élevera des perpendiculaires KH°, L3*f*, *n*4, les lignes 3*f*S, 4S feront les Profils des joins de Lit, paffant par les points 3 & 4, & H°S, celui du milieu de la Clef. Comme il eft évident par la conftruction, qui eft la même que la precédente. Cette méthode débaraffe le *Plan*, & les arcs CK, FL, G*n*, marquent les origines des Profils, pour qu'on ne s'y méprenne pas. Le refte de la Figure fert pour les difcours fuivans.

Les valeurs des joins de Lit étant trouvées, il fera facile de faire les Profils des furfaces des Lits, c'eft-à-dire, des fections du Cône par des points donnez à la circonference de fa bafe, & par fon fommet S perpendiculairement à chaque tangente menée par ces points; parce que fi la bafe eft circulaire, on a trois côtez du triangle de cette fection; fçavoir, l'axe qui eft commun à tous, le Rayon de la bafe qui eft toujours le même, fi elle eft circulaire, & le joint de Lit trouvé; l'angle de fupplément à deux droits du Rayon avec le joint de Lit, eft le Profil de la tête de Lit.

Mais fi la bafe eft Elliptique ou de quelque autre courbe, alors la fection du Lit prolongée ne paffera plus par l'axe du Cône, mais toujours par le fommet S, & la rencontre du joint de tête avec le plan horifontal fera facile à trouver; car fuppofant N*e* un joint de tête perpendiculaire à la courbe ondée A*e*H, il n'y a qu'à le prolonger jufqu'à la rencontre du diametre de la face AB en E, la ligne SE fera la fection qui tient lieu d'axe, E*e* celle du Rayon de la face, ainfi avec le joint de Lit, on aura le triangle de la fection interieur du Cône, dont l'angle de fupplément à deux droits fera le Profil de la tête du vouffoir.

Ou l'on voit qu'on n'a pas la même facilité qu'aux Berceaux où cet angle eft toujours égal à celui d'un diametre de la bafe avec l'axe du Cylindre, parce que les côtez du Cône font convergens.

Nous n'avons conſideré juſqu'ici qu'une ſeule obliquité dans le Cône; ſi l'on doit avoir attention à pluſieurs, comme lorſqu'une Trompe eſt biaiſe & en Talud, il faut réduire ces deux obliquitez en une, de la même maniere que nous l'avons dit pour les Berceaux, & ayant trouvé le diametre de plus grande obliquité, & ſon angle avec l'axe, on fera le Profil d'une voute à double ou triple obliquité, comme pour la ſimple biaiſe.

PROBLEME III.

Tracer le Profil d'une Voute Conique à double ou triple obliquité de Biais, Talud & Deſcente.

Puisqu'on ne peut exprimer la longueur d'une ligne inclinée à un plan, que par ſa projection ſur un plan qui lui ſoit parallele; il eſt clair qu'on ne peut faire un Profil d'un Cône ſcalene que dans un plan parallele à celui qui paſſant par ſon axe eſt perpendiculaire à la baſe, & ce Profil ne peut encore ſervir qu'à trouver les meſures des trois lignes qui ſont dans ce plan; ſçavoir, des deux côtez, le plus long & le plus court, & de l'axe du Cône; ainſi il eſt inutile de vouloir entreprendre un Profil d'un Cône ſcalene ſur tout autre diametre, que celui de la plus grande obliquité.

Nous en avons déja dit autant pour les Profils des Cylindres ſcalenes; mais à cauſe que les côtez ſont paralleles à l'axe, l'obliquité ne leur cauſe aucun changement, comme aux Cônes où ils s'alongent, & ſe racourciſſent continuellement de part & d'autre de la ſection perpendiculaire par l'axe.

Ainsi le Probléme ſe réduit à chercher cette ſection.

Soit, Planche 22. *Fig.* 265. le cercle AHBK, la baſe du Cône, ayant tiré par le centre C un diametre quelconque DE prolongé vers G, on portera de C en G la plus grande obliquité, comme celle du biais, & l'autre du Talud en GP perpendiculairement à GE; la ligne PB menée par le centre C fera la ſection d'un plan perpendiculaire à la baſe AHBK, & paſſant par l'axe du Cône, laquelle réduit les deux obliquitez de Biais & de Talud en une ſeule de ſimple Biais PC, plus grande qu'aucune des deux autres, étant l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont elles ſont les côtez. Pla. 22. *Fig.* 265.

Presentement on peut trouver tous les côtez du Cône ſans avoir recours à aucune nouvelle projection; on élevera PX perpendiculaire ſur PB, & égale à la hauteur du Cône, ou diſtance perpendiculaire de la baſe au ſommet. Puis ayant pris à volonté au contour de la baſe autant de points que l'on voudra 1, *c*, 3, E, 5, 6, 7, D, on prendra les intervales de chacun de ces points au point P, & on les portera ſur PB

aux points 7° 6° 5° 3°, & par ces points, & le fommet X, on tirera les lignes XA, X7°, X6°, X5°, X3° XB qui feront les vraies longueurs des côtez du Cône, avec lefquels chacun en particulier, la longueur de l'axe XC, & le Rayon CA forment autant de triangles, on aura les Profils de toutes les fections du Cône, & par conféquent en prenant les fupplémens des angles du côté, & du Rayon, tous les Profils des têtes des Lits.

SI l'on compare ce Profil avec celui de la projection verticale S*de*, faite fur une bafe *de* parallele au diametre donné DE, on reconnoîtra qu'aucune de fes lignes n'eft égale, ni à la longueur ni à l'inclinaifon qu'elle doit avoir fur le plan de la bafe; & par conféquent qu'elles font inutiles pour y prendre aucunes mefures de Profil, ce qui eft affez clair fans démonftration, puifque I*c*=GC eft plus petit que PC, & la hauteur PX=IS, il fuit que l'angle I*c*S eft plus grand que PCX, par conféquent le Profil de projection n'a pas affez d'obliquité.

USAGE.

CE Problême nous fervira à faire voir qu'on peut beaucoup abreger les Traits des voutes coniques biaifes en defcente, en furplomb ou en Talud; lorfque nous parlerons des Traits particuliers dans le IV. Livre; puifqu'on peut réduire toutes ces obliquitez differentes en apparence à une feule comme aux Berceaux, la montée peut être réduite en Talud fimple, la defcente en furplomb fimple, la montée en Talud, à un Talud plus oblique de la quantité du Talud, la defcente en Talud, à un furplomb moins oblique de la quantité du Talud, le biais en Talud ou en furplomb, à un plus grand biais, comme on le voit dans cet exemple; de forte que toutes les obliquitez étant réduites en une, il ne refte plus qu'à voir quel angle le diametre donné DE fait avec celui de la plus grande obliquité AB, pour y rapporter les projections des points de divifion en vouffoirs, qu'on a coûtume de faire fur le diametre donné ordinairement, horifontal ou incliné, s'il s'agiffoit d'une face rampante.

SI au lieu d'une projection verticale fur le diametre DE, on avoit voulu la faire fur le diametre *c*6 au lieu du biais GC, on auroit eu pour toute obliquité de l'axe celle du Talud GP, qu'il auroit fallu porter de I en *p* fur l'horifontale *dp*, & tirer *p*S qui donne une obliquité d'axe toute differente; enfin fi on avoit propofé le Profil fur le diametre HK perpendiculaire à PC, toute l'obliquité fe feroit évanoüie, la ligne SI auroit repréfenté l'axe, alors le Profil du Cône fcalene n'auroit en rien differé de celui du Cône droit.

D'ou il fuit que d'une infinité de Profils poffibles, il n'y en a qu'un

qui puisse donner les mesures des côtez, & de l'axe d'un Cône scalene.

Remarque sur les Profils en General.

Les multiplicitez des lignes qu'on trouve dans les Traits viennent principalement des Profils, or je regarde comme une maxime que

On doit éviter autant qu'il est possible l'assemblage de plusieurs Profils sur un même Plan, & particulierement les lignes inutiles qui n'indiquent que de loin, & par de longs renvoys leurs origines; c'est pourquoi lorsqu'on a un grand nombre de voussoirs dans une face, il convient mieux de mettre les Profils chacun à part, ou du moins une partie d'un côté, l'autre de l'autre, que de les mettre sur les bases de leur projection.

La raison de cette maxime est toute simple, lorsque les objets se presentent en trop grand nombre, ils partagent trop notre attention, & fatiguent l'esprit occupé à démêler ceux que nous devons choisir, ce qui arrive particulierement, lorsque les lignes de Doele & d'Extrados sont tirées, & comme mêlées; secondement, parce qu'il est aisé de se tromper & de prendre les unes pour les autres.

J'ajoute qu'il faut retrancher les lignes inutiles qui ne servent qu'à indiquer par de longs circuits les origines des Profils, parce qu'on en trouve souvent de cette espece dans les Traits des Auteurs de la coupe des Pierres, qui embroüillent extrêmement les Epures.

Pla. 20. *Fig.* 248.

Je puis donner pour exemple le Profil d'une descente à la Fig. 248. où le Parallelograme AE est la moitié du plan horisontal d'un Berceau avec ses projections de joins de Lit 1^pN, 2^pn provenant des divisions 1, 2, de la moitié du ceintre de face HA; le Parallelograme *he* est le Profil de ce Berceau, où l'on veut situer les joins de Lit dans la distance qu'il convient. La maniere ordinaire, est de les y conduire par de longs circuits des lignes que l'on voit dans la Figure $1\,1^a\,1^d$, $2\,2^a\,2^d$, H*ab*, que l'on peut supprimer sans se priver de l'indication de l'origine des Profils, comme on voit à la Figure 245. car ayant fait à l'ordinaire la projection horisontale des joins de Lit par le moyen du ceintre AHB, divisé en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, on trouvera les Profils des mêmes joins de Lit, en répetant la moitié de l'arc de face en *o*L*b*, & menant par ses divisions 1, 2 des horisontales 1D, 2*d*, qui donneront sur la ligne de Profil AR*b* les points *d* & D, par où on menera des paralleles à la Rampe R*p*, lesquels seront les Profils demandez; ce qui supprime comme l'on voit beaucoup de lignes droites & d'arcs de cercles inutiles, & marque, de plus près, l'origine de chacune des lignes de Profil, sans ofusquer inutilement le Lecteur.

De l'Elevation.

Il eſt encore une eſpece d'Ortographie, c'eſt-à-dire, de repreſentation des hauteurs, qu'on appelle *l'Elevation*, laquelle ne differe du Profil qu'en ce qu'elle a pour objet les parties exterieures, & apparentes au dehors, au lieu que le Profil eſt deſtiné pour exprimer les profondeurs auſſi bien que les hauteurs.

Dans tous les Traits, il eſt de neceſſité indiſpenſable de faire l'élevation de la face de la voute, dont il s'agit, pour trouver les intervales horiſontaux des joins de Lit, & leur hauteur au deſſus des Impoſtes, du moins à leurs origines ſur l'arc de face ; c'eſt là le principal uſage que l'on fait de l'élevation : cependant nous ferons voir que cette eſpece de projection verticale d'un corps ou d'une voute quelconque, conduit à ſon exécution, autant que celle du *Plan* & du Profil.

Il eſt clair que lorſqu'on veut faire uſage de cette eſpece de deſſein, il doit être aſſujetti aux Loix de la projection verticale, comme le Profil; c'eſt-à-dire, qu'elle doit être faite ſur un plan parallele à l'objet ou à la partie que l'on en veut repreſenter.

D'ou il ſuit, 1.° qu'on ne peut faire d'élevation d'un corps Cylindrique, ſur laquelle on puiſſe prendre d'autres meſures, que ſuivant ſa longueur ; parce qu'il n'y a que les côtez paralleles à ſon axe qui ſoient en ligne droite, par conſéquent qui puiſſent être paralleles au plan de deſcription. Quant aux parties de ſon contour repreſenté en élevation, il eſt clair qu'elles ſont toutes inégales ; ſe racourciſſant d'autant plus qu'elles s'éloignent de l'axe du Cylindre.

2.° Qu'on ne peut trouver que trois meſures ſur l'élevation d'un corps Conique ; ſçavoir, les trois côtez du triangle par l'axe du Cône qui eſt parallele au plan de deſcription, dont deux ſont des côtez du Cône, & le troiſiéme le diametre de ſa baſe.

3.° Qu'on ne peut prendre qu'une ſeule meſure ſur l'élevation d'un corps ſphérique, concave ou convexe ; ſçavoir, le diametre du cercle parallele au plan de deſcription.

Le peu d'utilité de ces deux dernieres eſpeces d'élevations, nous diſpenſe d'en donner des exemples, il ſuffit de celui d'un corps Cylindrique, ſur lequel eſt tracée une ligne quelconque, que nous ſuppoſerons ici une Helice, pour montrer comme on doit faire l'élevation d'un Eſcalier à vis dans les deſſeins d'Architecture.

Soit

Soit [*Fig.* 249.] la Couronne de cercle a D *b d*, le plan horiſontal d'une Tour dans laquelle eſt un Eſcalier, il ſuffit d'en tracer la moitié, parce que nous la ſuppoſons également diviſée de part & d'autre. Ayant diviſé ſon contour en un certain nombre de marches, s'il s'agit d'un Eſcalier, ou en parties égales arbitraires, s'il s'agiſſoit d'une Helice tracée à la ſurface de ce corps, on menera par le centre C une perpendiculaire CE au diametre *a b*, qu'on prolongera autant qu'on le jugera à propos; puis ſur cette ligne ayant pris à volonté un point D, on lui menera une perpendiculaire qui ſera parallele à a *b*, & par tous les points des diviſions du coutours de la Couronne de cercle, on menera des paralleles à l'axe CE indéfinies. On marquera enſuite ſucceſſivement chaque hauteur de marche ſur cet axe CE, s'il s'agit d'un Eſcalier, ou les parties aliquotes d'une révolution, s'il s'agit d'une vis ou d'une colomne torſe, & par toutes ces diviſions on menera des paralleles à la baſe AB, qui rencontreront les paralleles à l'axe CE, en des points 1, 2, 3, *a*, 5, 6, 7, M, &c. par leſquels on tracera à la main la Courbe D*a*M*b*E, qui ſera la repreſentation de l'Helice ſur la ſurface exterieure du Cylindre ou de la Tour.

Il eſt aiſé de voir que celle de la ſurface interieure *efg* du *Plan* ſe tracera de la même maniere. Il faut ſeulement obſerver que quoique les largeurs ſoient moindres, les hauteurs doivent être les mêmes pour l'Helice exterieure & interieure, parce que s'il s'agit d'Eſcalier, c'eſt la même hauteur de marche; il en ſera de même des autres Helices, qui font leur révolution en même tems; c'eſt pourquoi les points DMDME deviennent communs à l'exterieure & à l'interieure: l'élevation qui doit donner les premieres meſures du plan horiſontal de l'Epure ne contenant d'autre difficulté que celle de tracer le genre de Courbe qu'on ſe propoſe pour ceintre de la voute; nous n'avons rien à ajoûter à ce qui a été dit au II. Livre.

CHAPITRE IV.

Des moyens de faire les Plans, Profils & Elevations Des Figures irrégulieres.

Il y a deux ſortes d'irrégularitez dans les voutes; l'une conſiſte dans leurs contours, qui peuvent n'être ni Circulaires ni Elliptiques, mais de quelqu'autre Courbe de fantaiſie, telles ſont les Faces des Trompes ondées, comme cette voute Conique qu'on appelle Trompe d'Anet, *Fig.* 247.

L'AUTRE consiste dans la courbure de leurs surfaces qui ne sont ni Cylindriques, ni Coniques ni Sphériques, telles sont celles de la plûpart des Arrieres-voussures.

LE moyen le plus facile de connoître ces irrégularitez, est de les comparer à des Figures régulieres, ou par *Inscription* ou par *Circonscription*, les contours peuvent être connus par l'une & l'autre maniere; mais les surfaces irrégulieres ne peuvent l'être que par le moyen de la Circonscription dans la pratique de la coupe des Pierres, où il ne s'agit que d'ôter & non pas d'ajoûter, comme dans les ouvrages de Stuc; on peut donc comparer le contour d'une Figure irréguliere à une réguliere par son excès sur la réguliere inscrite, ou par son défaut à la réguliere circonscrite.

Fig. 247. SOIT, par exemple, une Trompe ondée, [*Fig.* 247.] dont la projection horisontale est la Figure SAHB, on peut en retrancher le Cône droit SAB, en tirant la ligne AB perpendiculairement sur son axe SC, & regarder le reste de la Figure qui est hachée comme un excès de ce Cône, que l'on peut trouver en tirant du sommet S autant de lignes qu'on voudra, comme SE, SD, SC, qu'on prolongera jusqu'aux extremitez de cet excès, & l'on aura les lignes E*e*, D*d*, CH, qu'il faudra ajoûter en ligne droite aux premieres, soit en projection pour en avoir le Plan horisontal, soit en Profil, comme V*h*, xe^2, yd^2.

AU lieu de comprendre un petit Cône dans une plus grande Figure, on peut tirer une perpendiculaire sur l'axe SH, & former un Cône droit SPL qui la renferme toute entiere; & alors ayant tiré des lignes droites SN, SO du sommet S du Cône, on en retranchera les parties *e*N, *d*O pour avoir les points *e* & *d* du contour irrégulier de la Face ondée, & autant d'autres que l'on voudra par la même maniere, en cherchant leur défaut au dedans du Cône circonscrit SLP.

L'UNE & l'autre methode peut avoir ses applications suivant les differentes circonstances; la circonscription qui donne de plus grandes mesures, peut avoir son incommodité dans les grands Ouvrages, & l'inscription pourroit être plus sujette à de petites erreurs d'exécution, mais en elles-mêmes, elles sont également correctes.

CE que nous disons ici des contours irréguliers par leurs ondulations devient plus aisé pour ceux qui sont composez de lignes droites; parce qu'il suffit de tirer des lignes par leurs angles, pour en avoir la position & le contour régulierement; c'est pourquoi on peut, pour plus grande précision, inscrire les contours ondez dans des Poligones.

LA voye de l'inscription & de la circonscription est plus commode

dans les Berceaux, dont les Faces font irrégulieres, parce qu'il ne s'agit que de tirer des lignes paralleles à leur direction, & des perpendiculaires aux extremitez des parties les plus faillantes, pour les infcrire dans des Parallelogrames.

Soit [par exemple, *Fig.* 250.] la projection horifontale d'une Porte fur le Coin AEDPB, dont la face interieure AMB eft arondie; on circonfcrira à cette Figure irréguliere mixte le Parallelograme BAGI, dans lequel on tirera autant de paralleles à AG, comme *g*F, *g*F que l'on voudra avoir de points au Profil. *Fig.* 250.

On formera enfuite fur GI comme diametre le demi cercle GHI pour ceintre de l'arc Droit, que ces lignes prolongées couperont aux points 1, 2, H, 3, 4.

La projection horifontale étant ainfi preparée, on fera pour le Profil un fecond Parallelograme *a*S*di* fur les côtez BA, IG prolongez; enfuite ayant porté les hauteurs *g* 1, *g* 2, DH en aS, a 2, *a* 1, on menera par ces points 1, 2, S des paralleles à la bafe a*i*, fur lefquelles on portera les excés du Parallelograme GABI fur le plan horifontal de la porte EAMBPD, ainfi on portera F 1*q* en 1K, F 2*q* en 2L, CM en S*m*, & par les points *m*LKa, on tracera à la main une courbe qui fera le Profil de la moitié concave de la face interieure de la porte.

Pour tracer le Profil de la moitié de la face exterieure faillante, on portera, de même, l'excés GE du plan horifontal en *ic* du Profil, *g* 1*p* en *e* 1*f*, *g* 2*p* en *e* 2*f*, & par les points *d*, 1*f*, 2*f*, *c* on tracera à la main une courbe qui fera la moitié de la face exterieure.

Pour abreger le tranfport des hauteurs, on peut tracer le quart de cercle *i* 14, 23, *dh* égal à GH du plan horifontal, & également divifé, & par ces divifions 14, 23 mener des paralleles à la bafe *i* a du Profil, lefquelles marquent plus fenfiblement leurs origines.

La raifon de cette operation de Circonfcription, eft que les lignes droites & les perpendiculaires font les termes les plus fimples, d'où l'on puiffe commencer à mefurer les obliquitez & les finuofitez des Faces; par ce moyen on abrege la réduction des Faces courbes en lignes droites, & en triangles rectilignes, dont il faudroit chercher en particulier les angles, les côtez, & leur fituation refpective.

Cette maniere eft neceffaire pour former les Profils qui font des projections verticales; mais pour lever ceux qui font des fections des corps, on peut la rendre plus facile, & l'abreger comme nous l'allons dire.

PROBLEME IV.

Tracer sur un Plan un Contour semblable & égal à celui d'un Corps quelconque supposé coupé par ce Plan,

En termes de l'Art.

LEVER UN PROFIL.

Fig. 246. Soit un corps quelconque, [*Fig. 246.*] dont le contour soit de telle irrégularité que l'on voudra; on donne ici pour exemple un Roson & des Moulures A B C D E, il faut imiter exactement le contour de la section qui seroit faite par ce plan, s'il le coupoit comme pourroit faire une Scie.

On placera le carton ou la planche sur laquelle on veut tracer le Profil dans la situation où l'on veut qu'il soit à l'égard du corps, dont on veut imiter le contour; par exemple, d'un Platfond sous lequel on la mettra à-plomb, ou contre un mur de Niveau; on l'arrêtera & on la tiendra ferme en cette situation, pour qu'elle ne varie pas, car l'obliquité changeroit l'imitation.

On appuyera cette planche contre les parties les plus saillantes, comme en E, ensuite ayant posé une Régle R *r* perpendiculairement sur un des côtez de ladite planche K L, par le moyen d'un Equerre F Q G, on prendra avec le Compas ou une mesure de bois qui servira de jauge le plus grand enfoncement *b* B, qu'on transportera sous la partie la plus saillante E *e*, pour voir si la planche sera assez large pour le contenir de E en *e*, perpendiculairement au côté K L ou H I, que nous supposons droit, & parallele si l'on veut; puis on fera couler une branche de l'Equerre G Q sur le côté K L, en sorte qu'une partie de son épaisseur deborde assez la planche, pour qu'on puisse appuyer la Régle mobile R *r* contre l'autre branche de l'Equerre Q F, à laquelle elle doit toujours être appliquée, & couler le long, en la poussant dans les creux, & la retirant dans les Saillies.

On presentera ainsi la Régle sous chaque enfoncement, comme en B & en D, portant toujours la même ouverture de Compas B *b*, ou la même jauge ou mesure de bois, de B en *b*, & de D en *d*, & l'on marquera sur la planche les points *b* & *d*, de même sous chaque Saillie A *m* C E, marquant les points que la mesure donnera le long de la Régle en M *c* & *e*. On continuera de même en faisant couler l'Equerre & la Régle pour avoir autant de points que l'on voudra, par lesquels on tracera à la main le contour *a b c* M *c d e* sur la planche, de laquelle si l'on retranche la partie superieure avec la Scie ou autrement; on aura le Profil que les Ouvriers appellent pour les Moulures un *Calibre*, lequel s'ajustera parfaitement aux Moulures du Platfond, suivant la même ligne A E; en sorte

que si l'on vouloit y faire une cloison, il en boucheroit exactement les vuides.

On peut même par ce moyen lever les contours des enfoncemens recouverts comme en S; car tirant avec l'Equerre la perpendiculaire RS, & la portant à même distance de BR en *br*, & faisant *rs* égale à RS, on aura l'enfoncement S, ainsi des autres.

Demonstration.

Il est clair par la construction, que la Régle ne change point de situation à l'égard de la ligne KL, à laquelle elle est toujours perpendiculaire, puisqu'elle est toujours une prolongation d'un côté de l'Equerre, & que tous les points du corps sont également éloignez du contour tracé, donc les deux Courbes sont paralleles & égales, puisque leurs abscisses sont communes, & les Ordonnées sont égales par la construction.

Usage.

Ce Probléme de pratique est d'un fréquent usage en Architecture, particulierement dans les réparations des vieux Edifices, où il faut racorder des ornemens saillans, & renfoncez, ou des ceintres corrompus, c'est-à-dire, de courbure irréguliere, ou par faute de construction, ou par l'afaissement qui s'est fait. Faute de sçavoir user de ce moyen, les Ouvriers sont obligez de tâtoner long-tems, en presentant plusieurs fois le Profil qu'ils ont levé pour voir ce qu'il faut ôter d'un côté, & ajoûter de l'autre; en quoi ils consomment beaucoup de tems & de peine, qu'ils pourroient s'épargner par la pratique simple de ce Probléme.

De la supposition des Surfaces planes pour parvenir à l'imitation des Courbes terminées par des sections planes,

Et pour la coupe des Pierres en termes de l'Art.

Des Doeles Plates.

La raison qui nous engage à supposer des lignes droites auprès des courbes pour en connoître les sinuositez; nous oblige aussi à supposer des surfaces planes au devant des courbes, pour en connoître la concavité ou la convexité; particulierement lorsqu'elle est irréguliere, & si leur courbure est réguliere, & leur surface supposée terminée par des plans; la supposition d'une surface plane au devant de la courbe sert à faire connoître la position & la distance de ses angles.

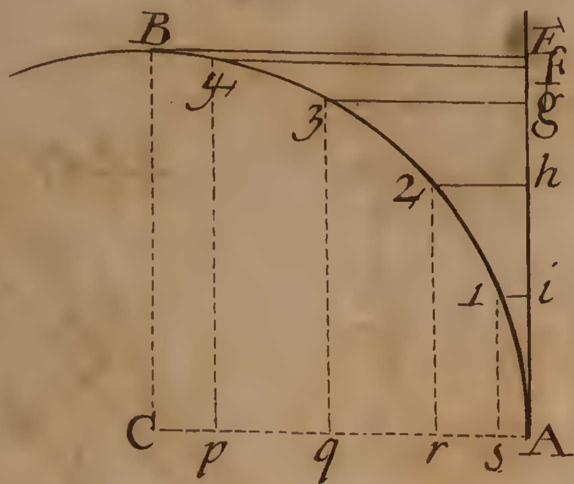
Ainsi avant que d'entreprendre de creuser une portion de Cylindre

[par exemple] terminée par quatre ou plusieurs plans ; il faut former une surface plane pour y situer les quatre angles de cette portion de Cylindre à leur distance respective; le Modele de cette Figure pour les Doeles des voussoirs s'appelle le *Panneau de Doele plate*, c'est un plan passant par la Corde de l'arc du ceintre compris dans le voussoir, lequel touche necessairement trois des angles du voussoir, & ordinairement quatre, & comme les ceintres sont divisez en plusieurs parties dans leur contour, suivant le nombre de voussoirs qui composent la voute, les Doeles sont divisées en autant de surfaces planes ou de Doeles plates qui réduisent le Cylindre en Prisme, le Cône en Piramide, & la Sphère en Polyedre.

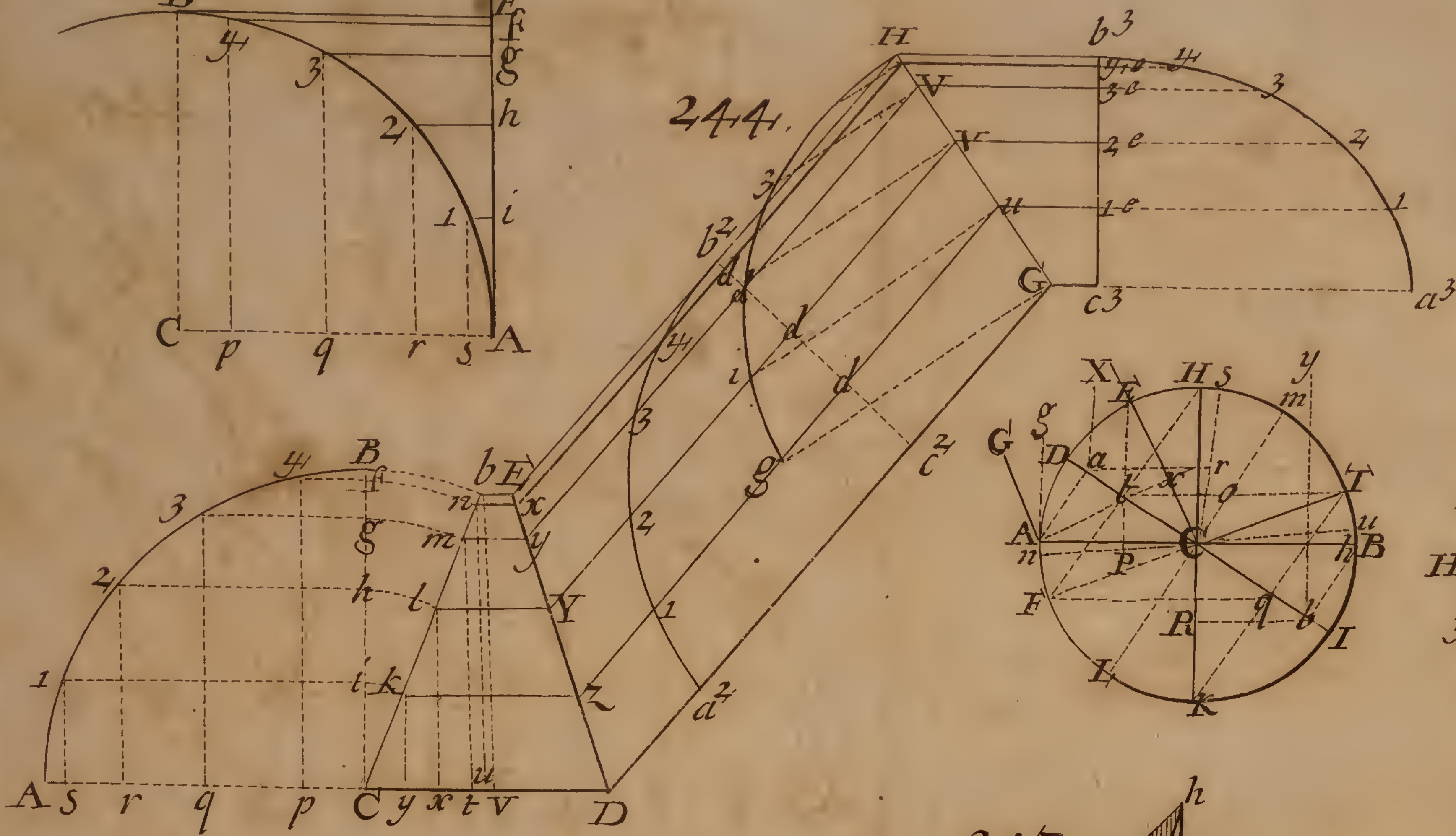
La raison de cette supposition est, 1.° que dans des operations composées, il convient pour la facilité & la sûreté de l'exécution de commencer par des simples; ainsi avant que de creuser une surface courbe, on en doit premierement situer les bornes dans leur juste distance; ces bornes sont les angles solides des voussoirs, desquels il y en a au moins trois qui peuvent être appliquez à une surface plane, & ordinairement quatre. Il arrive de plus que si ces voussoirs sont faits pour une voute conique ou cylindrique, on peut placer sur la même surface plane les côtez opposez qui sont droits; de sorte qu'ayant formé une surface plane, ce qu'on appelle en termes de l'art *dressé un Parement*, on y peut placer une grande partie du contour d'un voussoir, qui doit y rester lors même qu'il sera achevé, il ne reste qu'à creuser celle qui est concave, laquelle est comprise dans ces bornes.

Secondement, cette supposition est necessaire pour trouver l'inclinaison des surfaces planes des joins, avec les courbes des Doeles, ou des Têtes, parce que ces inclinaisons peuvent changer à chaque voussoir, comme il est visible dans les voutes de ceintres Elliptiques surhaussez ou surbaissez, où l'angle de la Doele avec le Lit change continuellement d'ouverture; or il est plus aisé d'appliquer des Biveaux ou des Recipiangles rectilignes sur des surfaces planes, que des Biveaux d'angles mixtes, parce que ceux-là peuvent s'ouvrir & se resserrer par la construction de l'Instrument, & s'adapter à tous les angles, au lieu qu'il faut changer de modele d'angle mixte à chaque position des joins de la courbe du ceintre Elliptique.

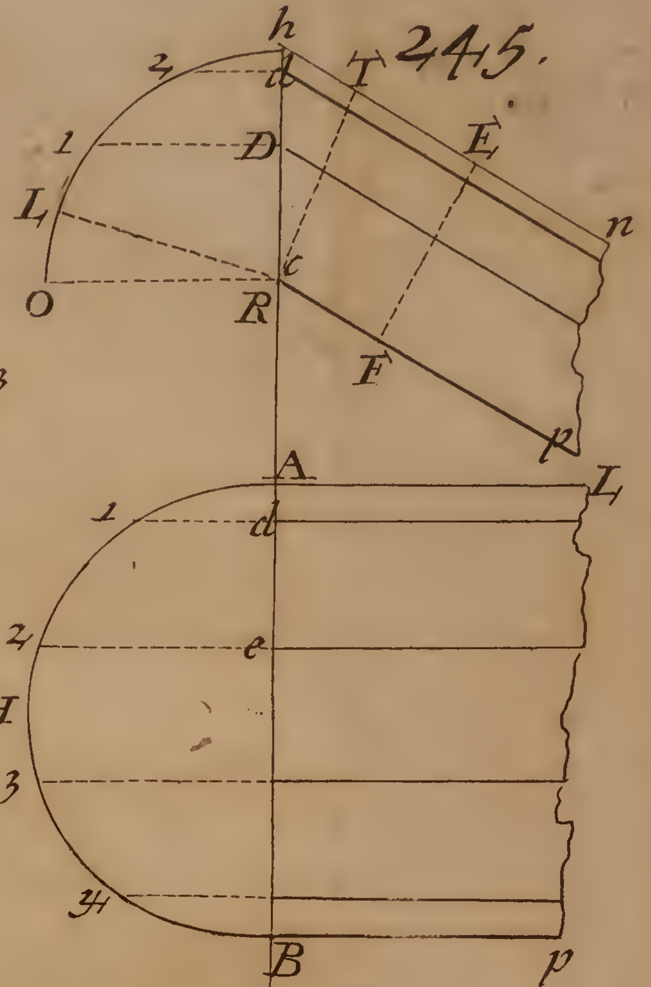
Troisiémement, lorsque les Doeles ou autres surfaces des voussoirs sont *Gauches*, c'est-à-dire, dont les angles ne sont pas dans un même plan, c'est une espece de necessité de supposer une surface plane qui passe par trois de ses angles, pour trouver la position du quatriéme, ou cinquiéme s'il y en a; car de même qu'on ne peut connoître la nature des lignes courbes, que par les proprietez des lignes droites inscrites ou circonscrites, ou ordonnées à quelque diametre, aussi on ne peut connoître les



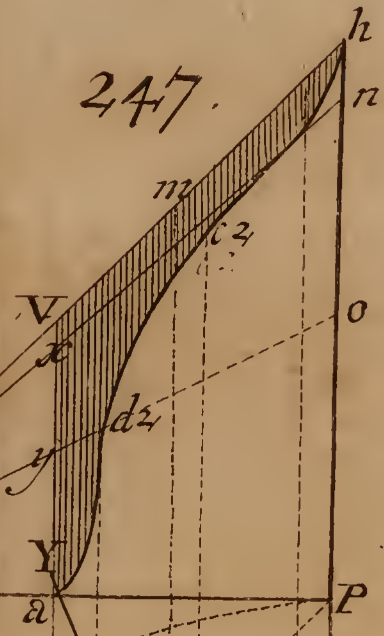
243.

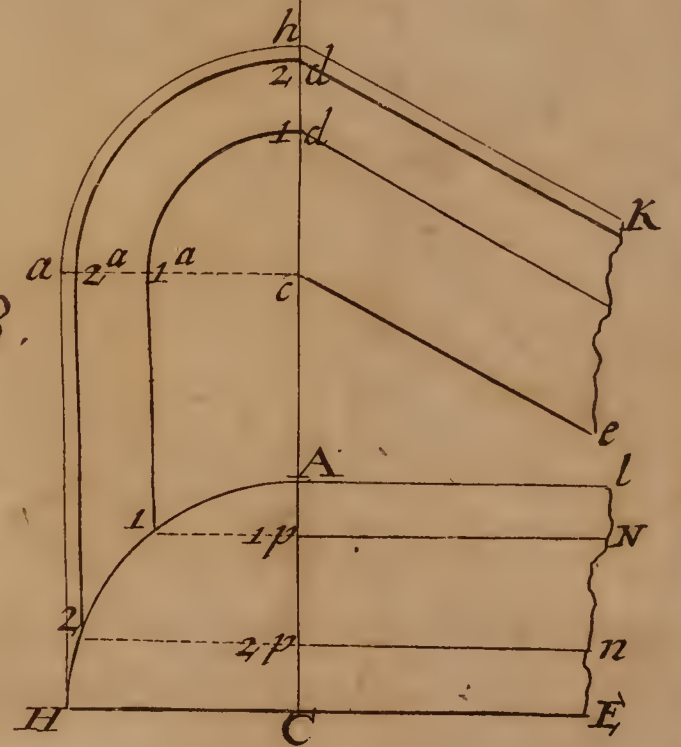


244.

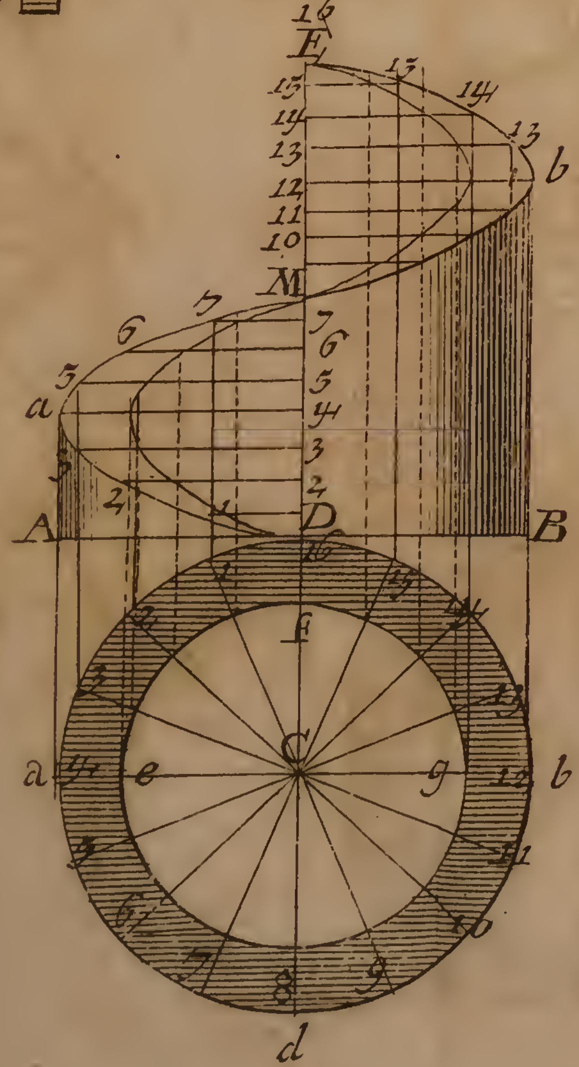


245.

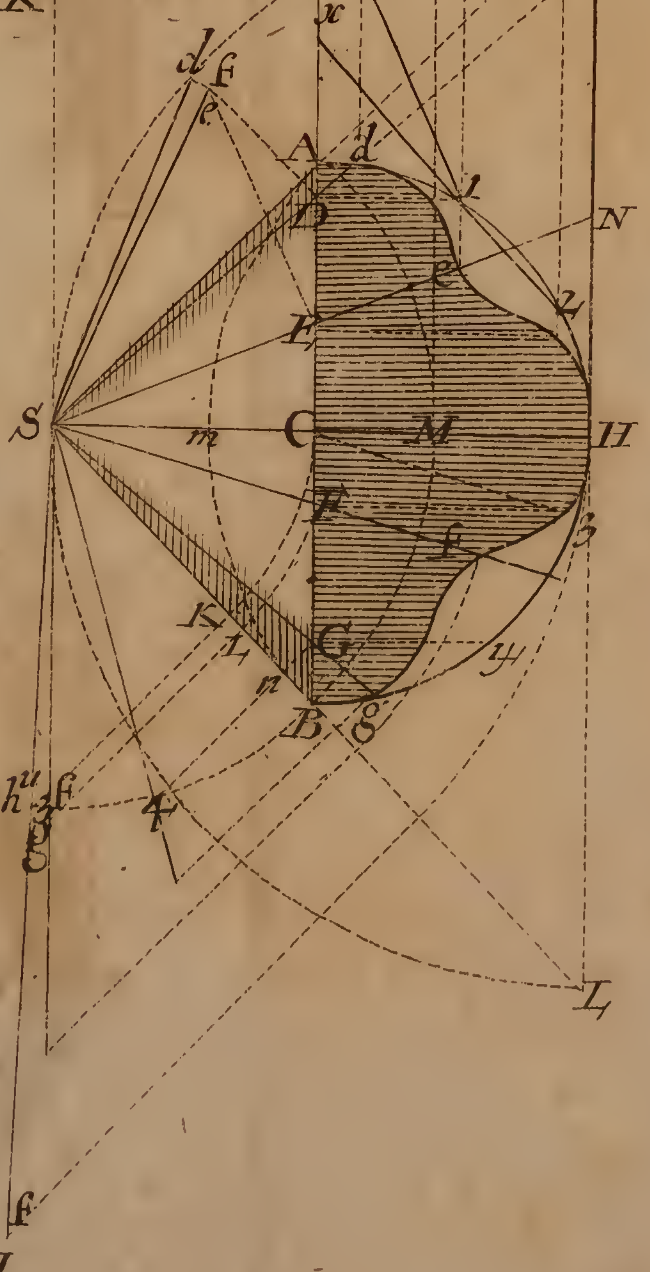


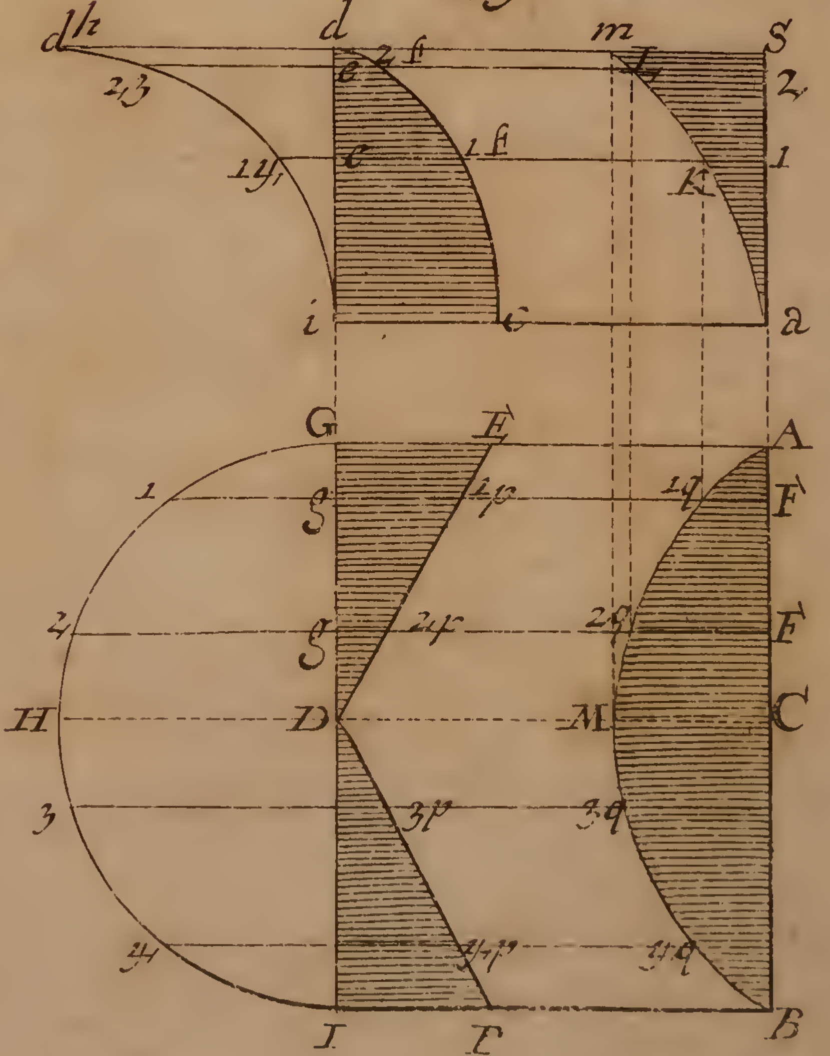


246. 247. 248.



249.





250.

ſurfaces courbes, qui ne ſont pas régulieres, que par leurs diſtances à des ſurfaces planes, en meſurant les longueurs des lignes perpendiculaires à ce plan, ou dont l'inclinaiſon eſt connuë, terminées à differens points de la ſurface courbe, à laquelle on la compare. Et parce qu'il n'y a que le ſeul triangle qui ſoit neceſſairement dans un plan, les ſurfaces de plus de trois côtez peuvent avoir leurs angles en differens plans; puiſqu'elles peuvent être diviſées en triangles; ainſi une Doele plate de quatre côtez peut étre diviſée en deux triangles; celle de cinq en trois, & ainſi de ſuite. Or les ſurfaces courbes irrégulieres peuvent être coupées par pluſieurs plans, de maniere que leurs angles ſoient dans un même plan, une tuile creuſe, quoique d'une courbure Conique, s'adapte ſi bien ſur une planche que ſes quatre angles la touchent. Une portion de Cylindre, une portion de ſphère, telles que ſont celles des vouſſoirs des voutes régulieres, a la même proprieté. Il n'en eſt pas de même d'une portion d'Arriere-Vouſſure de Marſeille ou de St. Antoine, &c. un vouſſoir poſé ſur une planche ne la touchera que par trois de ſes angles, & le quatriéme reſtera en l'aïr. Pour connoître de combien il s'écarte de ce plan, il faut que la diſtance en ſoit meſurée par une perpendiculaire abaiſſée de ſon ſommet ſur cette ſurface plane; donc il importe de ſuppoſer un plan pour trouver la ſituation des parties des ſurfaces irrégulieres, & les faire avec la préciſion neceſſaire.

De la ſuppoſition des Surfaces Cylindriques ou Coniques de baſe quelconque, pour parvenir à la deſcription & formation des Surfaces courbes terminées par des lignes Courbes à double Courbure.

Le moyen des Doeles plates, que nous venons de propoſer, eſt très avantageux dans la pratique de la coupe des Pierres, ſoit pour former avec ſûreté & facilité les vouſſoirs des voutes de ſurfaces régulieres ou gauches, ſoit pour le menagement des materiaux, mais il devient inutile pour la formation des ſurfaces courbes, Cylindriques, Coniques, Sphériques ou Gauches qui ſont terminées par des lignes courbes à double courbure; c'eſt pourquoi il faut avoir recours aux ſuppoſitions de ſurfaces Cylindriques, qui coupent la ſurface donnée ſuivant deux directions, dont la rencontre ſe fait à la Courbe à double courbure qu'on cherche.

Nous entendons par le mot de ſurface Cylindrique, non ſeulement celle d'un Cylindre ordinaire, qui a pour baſe un cercle ou une Ellipſe, mais une Courbe quelconque connuë ou inconnuë, Geometrique ou Mechanique, telle que la donne la projection d'une Courbe à double courbure ſur un plan horiſontal ou vertical.

Il eſt des ſurfaces Gauches dont les Arêtes qui les terminent, ou celles de certaines ſections qu'on y peut faire, ſe trouvent facilement par la ſeule inſcription dans un Cylindre, ou un Cône, à la ſurface duquel cette courbe conſerve une progreſſion connuë, telle eſt celle de la Vis; ſoit qu'elle faſſe ſes révolutions parallelement, ou plûtôt à égale diſtance de ſon axe, ou qu'elle ſe reſſerre en Limace; ainſi ſuppoſant une Vis ordinaire, dont les révolutions ſont toujours équidiſtantes de ſon axe, il eſt clair que le plan de la projection perpendiculaire à cet axe, eſt un cercle, & qu'on la peut inſcrire dans un Cylindre régulier Droit, de la baſe duquel elle s'éleve également, ou ſuivant une progreſſion connuë.

De-la on tire la pratique de faire le Profil ou Elevation de cette eſpece de courbe à double courbure; comme nous l'avons expliqué cidevant en propoſant pour exemple l'Elevation d'un Eſcalier à vis, dont le contour ſur le Cylindre eſt une Helice tangente aux extremitez des marches.

Si le contour de la Vis n'étoit pas toujours équidiſtant de ſon axe, la conſtruction du Profil ſeroit encore la même, avec cette difference que ſi la baſe du Cylindre dans lequel elle peut être inſcrite, eſt Elliptique, il faut choiſir pour la ligne de baſe du Profil un axe, ou un diametre convenable au deſſein qu'on a de trouver les points de ſtation les plus écartez, ou les plus reſſerrez.

Si la Vis ſe reſſerroit en montant, au lieu de l'inſcrire dans un Cylindre, il faudroit l'inſcrire dans un Cône, ou dans une Sphère ou Sphéroïde, & mener toutes les lignes de diviſion au Pole, à quoi nous ne nous arrêtons pas, parce que ce cas arrive rarement en Architecture, au lieu que celui des vis Cylindriques eſt d'un uſage continuel, non ſeulement pour les Eſcaliers, mais encore pour les Appuis Rampans des Tours rondes, Circulaires ou Elliptiques.

La plûpart des Courbes à double courbure ne fourniſſent pas les mêmes facilitez pour être décrites, que la Vis, par deux raiſons; l'une, c'eſt que le Cylindre dans lequel on peut l'inſcrire, eſt très ſouvent irrégulier, c'eſt-à-dire, qu'il n'a pas pour baſe une portion de cercle ou d'Ellipſe; de ſorte qu'il faut commencer par chercher le contour de cette baſe, par le moyen de la projection. En ſecond lieu, parce qu'ayant cette Courbe, & par conſéquent la ſurface du cylindre qu'on peut élever au deſſus, on ne peut déterminer ſur le cylindre aucun point de la courbe à double courbure, parce qu'on ne connoît pas la diſtance des points de la baſe du Cylindre à ceux de la courbe qu'on cherche, comme on la connoît dans l'exemple de la Vis; de ſorte qu'on eſt obligé de conſiderer cette courbe à double courbure par un autre ſituation perpendiculaire

diculaire à la premiere; d'en chercher la projection, & d'élever sur la Courbe qu'elle donnera pour base un second Cylindre perpendiculaire au premier, à la surface duquel cette courbe doit encore se trouver.

Or puisqu'elle est dans chacune des surfaces Cylindriques trouvées, il est évident qu'elle sera dans leur commune intersection; ce qu'il faut remarquer comme un principe de pratique des plus importans que nous ayons à proposer, & dont on verra une application continuelle, lorsque nous parlerons des voutes composées.

Pour éclaircir cette doctrine, & la rendre sensible par un exemple, nous choisirons ici une Arriere-Voussure de St. Antoine biaise & surbaissée, qui est une surface gauche, dans laquelle nous trouverons des Courbes des sections planes, & des Courbes à double courbure très propres à donner une juste idée de la maniere de faire les Plans, Profils & Elevations de toutes sortes de surfaces les plus difficiles à representer, d'où l'on tire la maniere de les former, tant en pierre, qu'en bois.

Soit [*Fig.* 251.] le trapeze AEDB le Plan horisontal d'une voute, dont la surface est Gauche, comme celle que nous donnons pour exemple. Il faut, premierement supposer que l'on en connoît les sections planes & paralleles suivant une direction; car si l'on n'en connoît rien, on ne peut rien deviner, puisque le raisonnement n'est qu'une conséquence tirée de quelque connoissance anterieure, ou suivant les Philosophes *procedere à noto ad ignotum*. Pla. 21. *Fig.* 251.

Supposons donc que l'on connoît les Courbes de toutes les sections paralleles à la ligne du milieu CM, ou par une convenance, ou par une détermination arbitraire, comme on les connoît en effet dans l'Arriere-Voussure de St. Antoine, puisque c'est sur leur détermination que l'on en fait le Trait. Il n'importe que ces Courbes soient portions de cercle ou d'Ellipse, ou d'autre Courbe; nous n'avons pas besoin d'en connoître la nature, pourvû qu'elles soient données, cela suffit.

Ayant mené des paralleles à la ligne du milieu CM en telle quantité qu'on le jugera à propos, pour avoir un nombre suffisant de points des Courbes que l'on cherche, on menera par les points p^1, p^2, C, p^3, p^4, &c. où ces paralleles coupent la ligne AB qu'on prend pour base du ceintre de Face, autant de perpendiculaires à cette ligne, qui couperont le ceintre de Face donné A*b*B aux points ^{1}, ^{2}, *b*, ^{3}, ^{4}, où seront les hauteurs des Profils, c'est-à-dire, des Courbes de toutes les sections planes qui passent par les lignes du plan horisontal Ep^1, np^2, MC, Np^3, &c. paralleles à CM.

Si l'on mene par toutes ces hauteurs des horifontales bH, 33, 22, 11, & qu'on les faſſe égales à leurs correſpondantes qui ſont tirées dans le plan horiſontal $MC = bH$, $Np^3 = 33$, $np2 = 22$, &c. on aura deux points de chacune des Courbes des ſections faites par des plans paralleles entr'eux, & parce qu'on les doit ſuppoſer connuës ou données, comme dans l'exemple preſent, où elles ſont ordinairement des quarts d'Ellipſe, ou des arcs de cercle preſque tous moindres que le quart. Il ſera aiſé de décrire ces ſections; or comme elles doivent être dans des plans perpendiculaires au plan AbB, ce qu'il eſt impoſſible de faire ſur le papier, à moins qu'on n'y applique des pieces découpées volantes, on eſt réduit à les ranger de ſuite ſur le même plan, comme on voit à la Figure, ou toutes d'un ſeul côté, ou pour éviter la confuſion des lignes, partie d'un côté, par exemple vers A, partie de l'autre, vers B.

Toutes ces Courbes ainſi placées, donneront facilement la poſition de tous les points qu'on y voudra marquer, par exemple leur milieu en *m*. Car ſi l'on mene par ces points autant d'horiſontales *mxy* paralleles à AB, elles couperont en *y*, les verticales bC, $3p^3$, $2p^2$, $1p^1$, &c. qui ſont à l'interſection du plan vertical AbB, & des plans qui le coupent perpendiculairement ſuivant ces verticales. La Courbe tracée à la main par tous les points *yy*, ſera l'élevation de celle qui paſſe par le milieu de la Doele de l'Arriere-Vouſſure, quoiqu'elle en ſoit bien éloignée dans cette repreſentation.

Il en ſera de même pour celle qu'on voudroit faire paſſer au tiers, ou au quart, en travers d'une Impoſte à l'autre.

Il eſt encore viſible que cette méthode ſert à tracer des paralleles aux Arêtes de devant AbB, ou du fond EMD; car il n'y a qu'à prendre ſur les arcs des ſections planes des longueurs données égales, comme $1d$, $2d$, $3d$, Hd, &c. pour le haut, & p^1e, p^2e, Ce, p^3e, p^4e, pour le bas, enſuite mener par tous les points *d* & *e* des horiſontales juſqu'à l'interſection des verticales correſpondantes, qu'elles couperont aux points *x*, *x*, *x*, & celles menées par les points *e*, *e*, en *z*, *z*, la ligne courbe tirée par ces points *x*, *x*, *x*; *z*, *z*, *z*, ſera la projection verticale; c'eſt-à-dire, l'élevation des lignes paralleles aux Arêtes qui ne les ſeront cependant pas dans cette élevation.

La même méthode que nous employons pour trouver les points des Courbes projettez ſur un plan vertical, ſervira pour trouver la repreſentation des mêmes points ſur le plan horiſontal; il n'y a qu'à répeter toutes ces ſections planes de ſuite ſur leurs baſes horiſontales Ep^1, np^2, MC, &c. & par les points donnez *d*, *m*, *e*, de toutes ces Courbes leur tirer des perpendiculaires *dx*, *my*, *ez*, & l'on aura ſur le plan horiſon-

tal ABDE d'autres Courbes *xxXxx*, *yyYyy*, *zzz*, qui seront en termes d'Architecture les *Plans*, c'est-à-dire, les projections horisontales des Courbes qu'on cherche; lesquelles representent des paralleles à AB, comme *x*, *x*, *x*, ou à ED, comme *z*, *z*, *z*, ou qui passe par le milieu de la Doele, comme *yyy*.

Pour abreger l'operation, on rassemble toutes ces Courbes sur un Profil M*b*AB, *Fig.* 152. que l'on peut faire differemment suivant les Courbes que l'on veut tracer; par exemple, si l'on vouloit s'en servir pour chercher les points d'une Courbe formée par une section plane G*g* parallele à ED, *Fig.* 253. il faut rassembler les origines de toutes les Courbes des sections planes, que j'appellerai primitives en un seul point M; parce que si l'on porte la longueur MK du plan horisontal, en M*k* sur la base MA du Profil, & qu'on lui éleve une perpendiculaire *k*L, elle coupera toutes les Courbes des sections primitives M 1, M 2, M 3, M*b*, &c. en des points *vuu*, qui donneront les hauteurs de la Courbe plane ou section plane de la voute sur la base G*g*; ainsi il n'y a plus qu'à les porter successivement suivant leur ordre en *iu*, *iu*, *iu*, pour avoir les points *u*, *u*, *u* de cette Courbe. *Fig.* 252. & 253.

Si au contraire on vouloit chercher les points de la Courbe, qui seroit une section plane parallele à AB, comme I*g*; il conviendroit de rassembler l'origine superieure de toutes les sections sur une même ligne verticale C*b*Q, *Fig.* 254. par la même raison que dans l'exemple précedent; ensuite on couperoit ce Profil par la perpendiculaire R*r*, dont la distance CR seroit égale à celle du plan horisontal CR, laquelle donneroit les points S*ss* pour les hauteurs de la Courbe. *Fig.* 254.

Mais si la section étoit oblique à l'une & à l'autre face AB & ED, comme en *g*O; cette abreviation n'a plus lieu, il faut porter à part sur la base du Profil toutes les longueurs EO, *no*, M*o*, & par les points *o*, *o* du Profil élever des perpendiculaires qui couperont les Courbes correspondantes en des points *t*, *t*, *t*, qui seront les hauteurs cherchées, qu'il faut porter sur des perpendiculaires qu'on élevera sur *g*O aux points *o* pour avoir les points *t*, *t*, *t*.

De la maniere dont nous venons de trouver les Courbes planes, & les Courbes à double courbure, qu'on peut imaginer dans une surface gauche par des sections transversales, il sera aisé de tirer celle de trouver les projections de celles qu'on peut imaginer suivant la longueur ou direction de la voute, comme celle d'une ligne parallele à l'Imposte AE, ou BD; telle seroit l'Arête de la longueur d'une traverse de bati de menuiserie, dont l'Arriere-Voussure seroit revêtuë.

Car si on fait à volonté plusieurs sections planes transversales, comme

A*b*B, IS*g*, &c. paralleles entr'elles, & qu'ayant pris sur les Courbes de ces sections une partie égale, comme A *d*, I *d*, &c. on abaisse de ces points des perpendiculaires *d b*, *d e* sur les diametres AB & I*g*, elles les couperont en des points *b e*, &c. par lesquels on tracera à la main une Courbe qui sera la projection de l'Arête *d* d'une section courbe parallele à l'Imposte AE, quoique cette projection ne la soit pas.

Il suit encore de la même méthode, que l'on peut trouver non seulement des Courbes longitudinales & transversales, qu'on peut imaginer sur la surface gauche d'un côté à l'autre, ou d'une face à l'autre, mais encore des projections des Courbes à double courbure, qui rentrent en elles-mêmes, comme si l'on vouloit faire un panneau ou un ornement Circulaire ou Elliptique dans la Doele d'une Arriere-Voussure; ce que l'on exécute tous les jours depuis qu'elles sont devenuës à la mode.

Sur quoi il faut remarquer qu'il est impossible de décrire un cercle, ou une Ellipse parfaite sur une surface courbe irréguliere, mais seulement une Figure qui approchera d'autant plus du cercle ou de l'Ellipse, que la surface sur laquelle on le décrit, sera moins concave ou convexe, nous excepterons seulement les cas des surfaces sphériques, sphéroïdes, coniques, cylindriques & annulaires, où le centre de la Figure qu'on décrit, se trouve au Pole ou dans un axe. Ainsi quoiqu'on trace avec le compas une Figure semblable à un cercle sur la surface de l'Arriere-Voussure qui nous sert d'exemple, ce n'est qu'une apparence de cercle, laquelle en réalité est une Courbe à double courbure, dont on peut trouver autant de points que l'on voudra par la projection sur le plan horisontal ABDE, où elle donnera une Courbe en ovale pointuë, comme on voit Q*xqz*, & sur le plan vertical A*b*B une Courbe resserrée vers le haut, comme Q*bqz*.

Fig. 251. Premierement ayant déterminé la position du centre de ce cercle sur la section primitive du milieu Hm^cC en m^c pour l'élévation, & Mm^cH pour le plan horisontal, & les longueurs égales de ses Rayons sur la même Courbe, l'un vers *d*, l'autre vers *e*; on aura les projections verticales de ces points en X & en *z* sur *b*C, & leur projection horisontale en X*z* sur CM.

Ensuite on fera des sections planes, qui passent par le point Y du plan horisontal en differentes directions à volonté; on prendra sur ces Courbes des Rayons égaux, dont on cherchera les projections, comme nous l'avons dit des autres points *d* & *e*, & l'on aura ainsi autant de points que l'on voudra en projection verticale ou horisontale; c'est-à-dire, qu'on en aura en termes de l'art les *Plans* & Profils; ce qui suffit pour

former la Figure requiſe en Pierre ou en Bois, comme nous le dirons au IV. Livre.

Remarque ſur l'Uſage.

La Régle de pratique que nous venons d'établir, toute ſimple qu'elle eſt dans ſon principe, étant une ſuite naturelle de ce que nous avons dit juſqu'à preſent touchant la projection, eſt le *Précis de toute la ſcience de la coupe des Pierres & des Bois.*

Dans la coupe des Pierres il convient de faire autant que l'on peut des ſections planes pour la commodité de l'appareil & de l'exécution, lorſqu'on en eſt le Maître, comme il arrive ſouvent.

Mais dans la coupe des Bois, pour les revêtemens de Lambris de Menuiſerie, ou pour les incruſtations des Ornemens de Marbre, on ne peut éviter les Courbes à double courbure; parce que les Ornemens qui conviennent à ces ſortes d'Ouvrages, conſiſtent en bandes paralleles, ou en bordures Circulaires ou Elliptiques, ou en Courbes de contour arbitraire. Ainſi on peut regarder l'exemple que nous venons de donner pour tracer les projections des Courbes, qu'on ſuppoſe dans une voute, & particulierement dans celles dont les Doeles ſont Gauches, comme le fondement & le précis de toute la ſcience des Menuiſiers & des Marbriers, dans les Ouvrages les plus difficiles qui ſe préſentent pour les Traits de la coupe, dont ils ont beſoin. Je puis même avancer que ce Problême ſeul, contient tout le Livre de la coupe des Bois du Sieur Blanchard, qui n'en eſt qu'une application à differens cas; car quoiqu'il ne tire pas les lignes de projection depuis leur origine juſqu'à leur baſe naturelle, horiſontale ou verticale, mais ſeulement par des portions paralleles à ces baſes, apparemment pour éviter la confuſion des lignes, ſa pratique ne differe en rien de la notre, comme nous allons le montrer ſenſiblement.

Soit [*Fig.* 251.] une des ſections planes & primitives quelconque, par exemple, Imp^1, dont la baſe horiſontale eſt la ligne droite Pfp^1, & la verticale Ipf. Soit dans cette Courbe Imp^1 les points d, m, e, dont on veut avoir les projections, on menera pour celle du point d l'horiſontale df, qui coupera la verticale $1f$ en f, la diſtance $1f$ eſt celle que les Ouvriers appellent le *gauche de la Courbe* pour l'élevation; enſuite pour avoir celle du point m, on menera mo juſqu'à l'aplomb qui tombera de d, que l'horiſontale mo rencontrera en o, la ligne do ſera le *Gauche* de la Courbe dm; de même tirant $e7$ juſqu'à l'aplomb $m7$, la ligne $m7$ ſera le *Gauche* de la Courbe me, enfin et ſera le gauche de la Courbe ep^1, conſideré ſeulement comme dans les précedentes projections en qualité d'é-

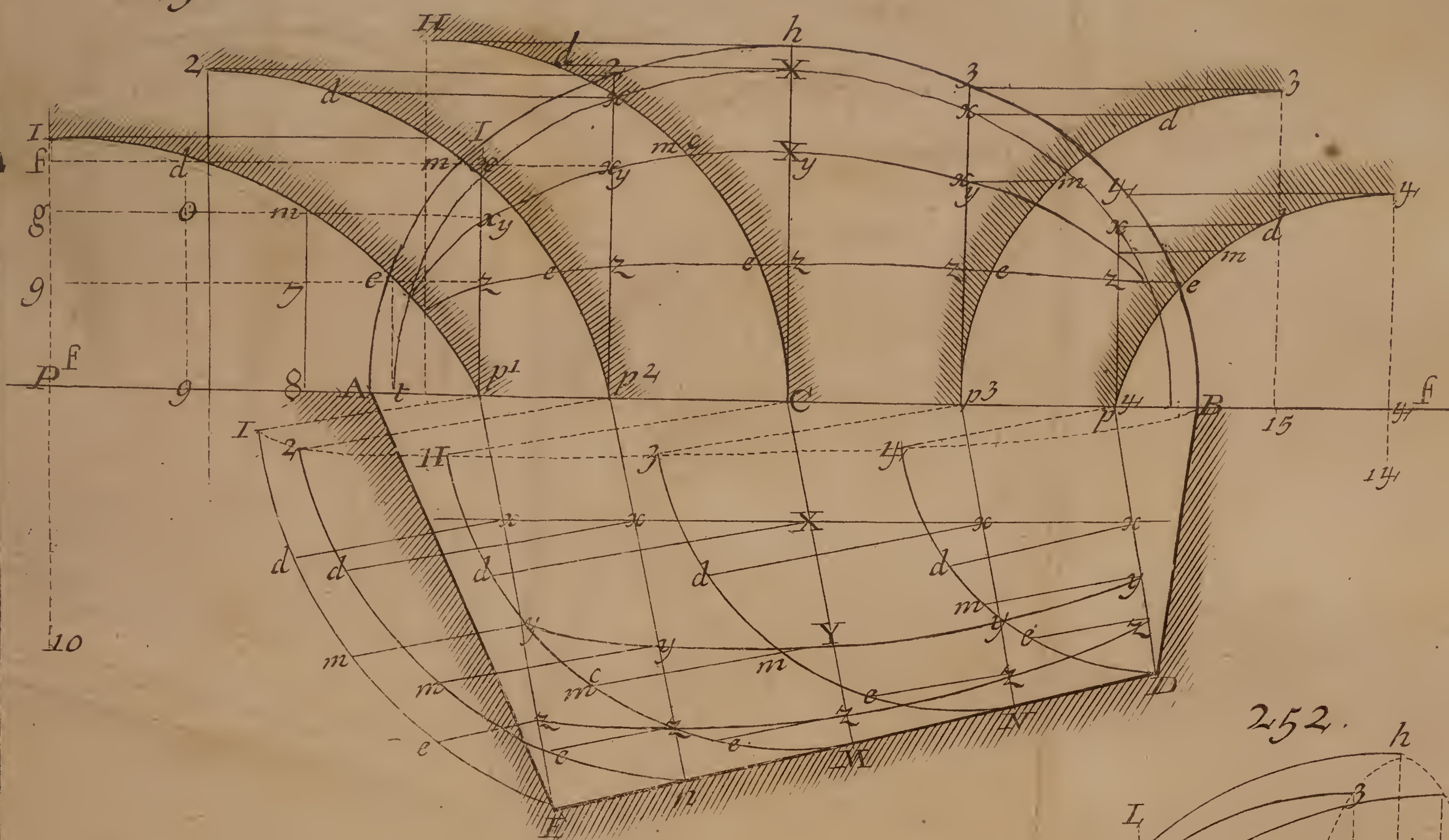
levation, c'eſt-à-dire, de projection verticale, & pour l'horiſontale, ce ſeront les lignes fd, om, $7e$, tp^1, comme on le voit clairement. Or il eſt évident que toutes ces lignes étant paralleles aux lignes 1Pf, & Pfp 1 ſont égales à toutes leurs parties $1f$, fg, $g9$, $9Pf$, pour l'élevation & P$f9$, 98, $8t$, tp^1, ce qui n'a pas beſoin de démonſtration, puiſqu'elles ſont terminées par des lignes paralleles; il eſt donc indifferent de prendre fd pour P$f9$, om pour 98, $7e$ pour $8t$, ſur le plan horiſontal, & do pour fg, $m7$ pour $g9$, & ef pour $9Pf$; ainſi l'on peut reconnoître une entiere uniformité entre la méthode du Sieur BLANCHARD & celle-ci.

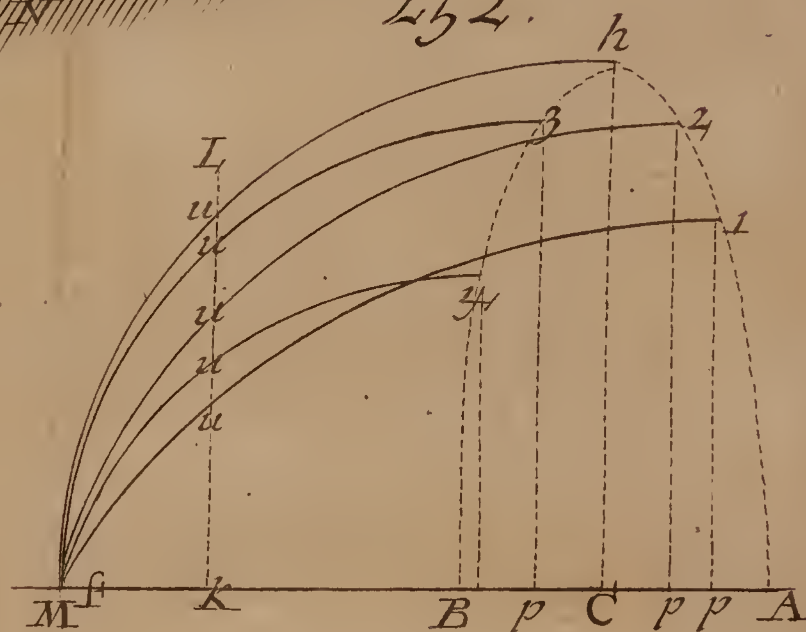
C'EST à celui qui fait le Trait d'une coupe de Bois ou de Pierre à éviter la confuſion des lignes pour ne pas s'embroüiller; mais auſſi on peut dire à la faveur des lignes entieres, qui donnent les points qu'on cherche ſans tranſpoſition, qu'elles guident plus ſûrement; car dans une longue operation, on eſt ſujet à prendre une ligne pour l'autre, ou à les tranſporter où l'on ne doit pas; par exemple, une horiſontale au Profil, ou une verticale au plan horiſontal; c'eſt pour cette raiſon que nous avons cru devoir répeter les ſections planes primitives au plan horiſontal, & à l'élevation, pour que l'œil fut conduit dans la poſition des points de projection depuis leur origine.

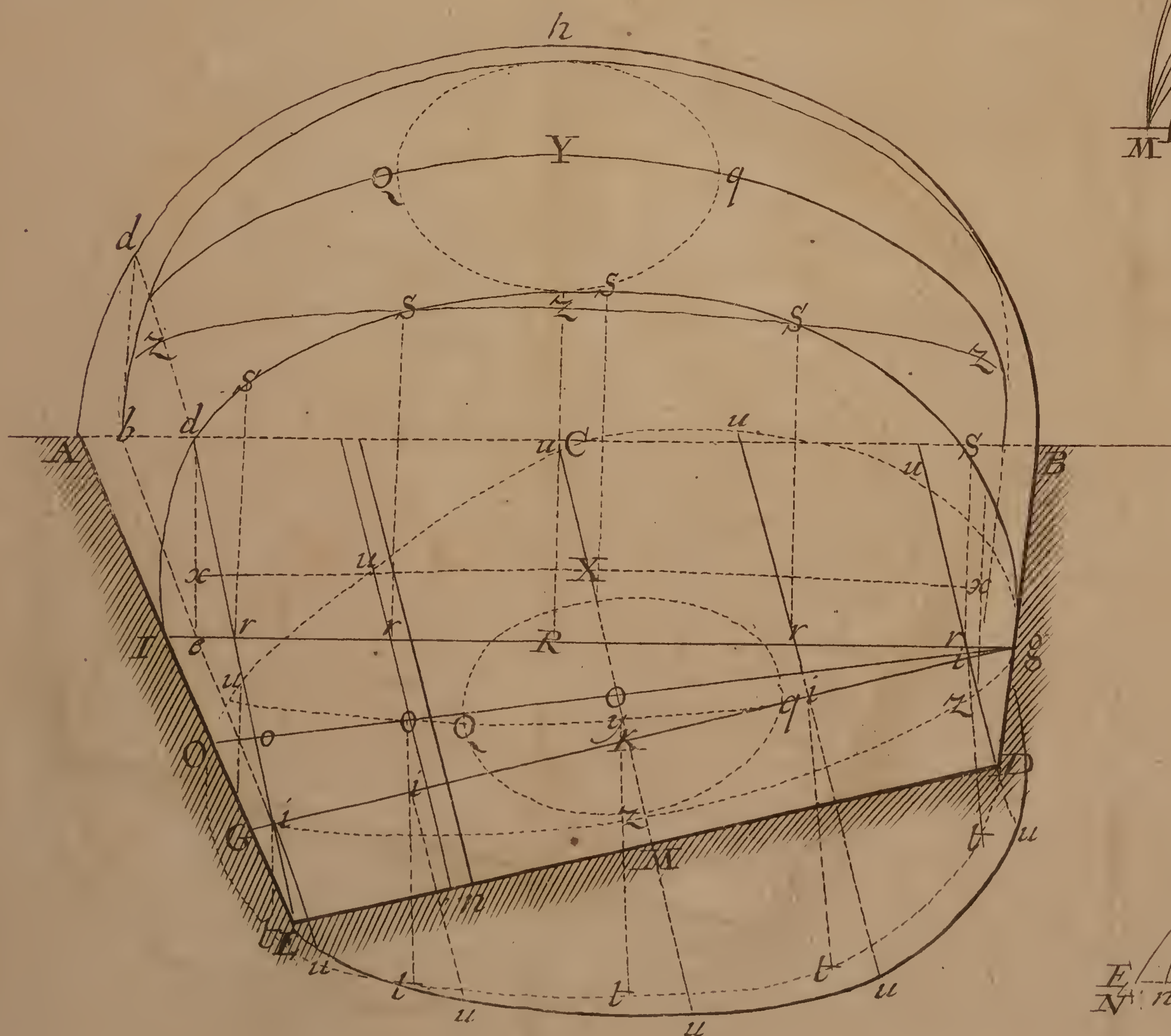
Application à l'Uſage.

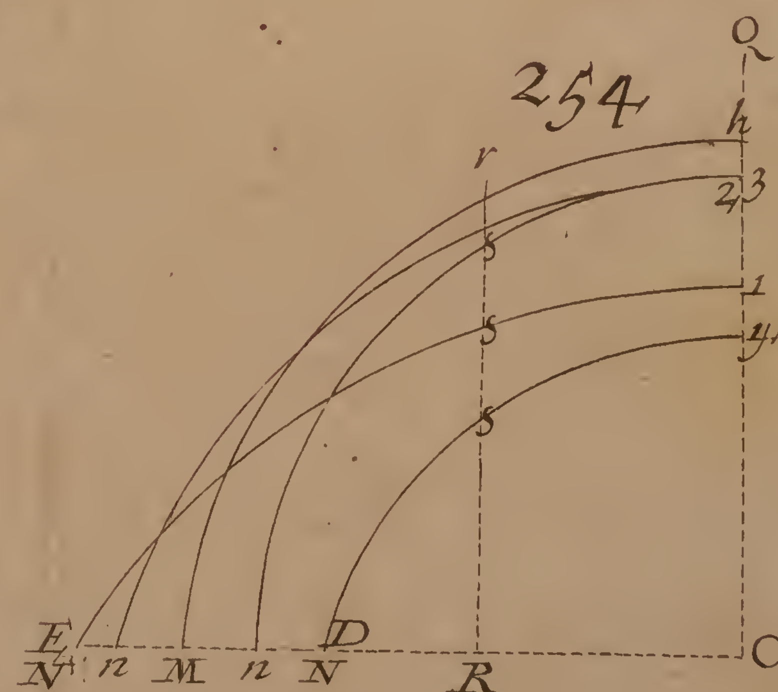
LORSQU'ON a la baſe d'une ſurface Cylindrique, ſur laquelle eſt l'Arête courbe que l'on veut former, on en applique le Panneau ſur un parement, c'eſt-à-dire, une ſurface plane que l'on dreſſe ſur le Bois ou la Pierre que l'on veut tailler, pour en tracer exactement le contour. Enſuite on abat le bois à l'Equerre ſur cette baſe, en ſuivant ſon contour, ce qui fait une portion de cylindre Droit; lorſque cette ſurface Cylindrique eſt formée, on éleve des perpendiculaires à la baſe par les points qu'on a marqué dans ſon contour, par exemple, z, z, y de la Figure; enſuite on porte ſur chacune de ces perpendiculaires la hauteur que l'on a trouvé dans l'élevation, comme $p^{\bar{1}}z$, $p^{\bar{2}}z$, Cz, p^3z, &c. qui donnent ſur la ſurface Cylindrique des points, par leſquels on trace la Courbe de l'Arête du Bois ou de la Pierre qu'on taille; ce que l'on entendra mieux par les Traits particuliers au IV. Livre.

POUR s'épargner cette ſuite d'operations de tirer des perpendiculaires à la baſe, & d'y porter les hauteurs qui leur conviennent; ſoit auſſi pour tracer le contour de la Courbe à double courbure plus régulierement, on fait des développemens des ſurfaces Cylindriques, qu'on trace ſur des corps flexibles, comme du Carton ou du Fer-blanc, des lames de Plomb, & on les applique enſuite ſur les ſurfaces qu'on veut tailler, c'eſt un des grands ſecours de l'art, dont nous allons parler.


251.


252.


253.


254.

CHAPITRE III.

De l'Epipedographie, ou Description des Surfaces des Solides, déployées sur des Plans,

En termes de l'Art.

DU DEVELOPPEMENT.

LES Surfaces des corps qui composent les voutes, sont presque toujours en partie planes, & en partie courbes.

Les planes sont les *Lits* & quelquefois les *Têtes*; les Courbes sont toujours les Doeles, quelquefois les Têtes, & quelquefois aussi les Lits. L'art de faire le développement de toutes ces surfaces consiste à les réduire toutes en planes, même les Courbes, quoiqu'elles ne puissent le devenir sans changer de nature, & que cet artifice soit encore inconnu à la Geometrie, qui ne peut rectifier les cercles, ni les Ellipses qui sont les bases des surfaces courbes.

Nous n'avons pas besoin dans la pratique de pousser cet art à la perfection Geometrique; premierement, parce qu'avant que de creuser ou arondir un corps, on fait, suivant la méthode des suppositions dont nous venons de parler, une surface plane, qui passe par la Corde de l'arc concave de sa base, ou par la tangente d'un arc convexe, réduisant ainsi les corps ronds en Polyedres.

Secondement, parce que, lorsqu'il s'agit de rectifier un arc de cercle ou d'Ellipse, comme il arrive quelquefois, par exemple, aux Portes en Tour Ronde aux Trompes sur une ligne Droite, & à quelques Enfourchemens, on le fait d'une maniere assez juste, quoique Méchanique, pour n'en pas sentir l'erreur dans l'operation. Il ne s'agit que de prendre avec le compas, plusieurs parties à volonté, si petites que les Cordes soient sensiblement égales aux arcs, dont elles sont les soustendantes, & ajoûter ces Cordes de suite sur une ligne Droite pour en avoir la somme.

Cependant, comme il y a une maniere Geometrique de parvenir à une précision plus parfaite que celle où l'operation peut atteindre, nous croyons devoir inserer ici le Problême que nous devons à Mr. Saurin de l'Academie Royale des Sciences, par lequel on peut approcher infiniment de la quadrature du Cercle, dont on parle tant dans le monde, laquelle dépend de la rectification de sa circonference.

PROBLEME V.

Trouver une suite de Lignes Droites qui approchent de plus en plus de la rectification d'un arc de Cercle donné, tant en dessus, qu'en dessous.

PLA. 22.
Fig. 255.
SOIT [*Fig.* 255.] l'arc donné AD, moindre que la demi-circonference ADB. Ayant fait AT perpendiculaire sur le diametre AB, on tirera la Corde BD qu'on prolongera jusqu'à la rencontre de la ligne AT en T, ensuite on divisera l'arc AD en deux également en F, & l'arc AF encore par le milieu en G, & ainsi de suite, autant que l'on voudra approcher de l'exactitude de la rectification de l'arc AD. Après quoi on tirera la Corde AF, qu'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre BT au point H, par lequel on menera HI perpendiculaire à AH: on tirera de même la Corde AG qu'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne H au point K, par lequel on menera aussi KL perpendiculaire à AK; on peut réïterer cette operation jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la plus petite division de l'arc donné.

JE dis que l'arc AD est plus grand que la ligne AH, & plus petit que la ligne AI, plus grand que AK, & moindre que AL, & ainsi de suite. De sorte que dans le cas présent, l'excès & le défaut de la ligne Droite sur la Courbe, est déja dans la difference des lignes AK & AL, qui sont presque sensiblement égales entr'elles, & par conséquent pourroient être prises dans la pratique pour égales à l'arc sans erreur sensible; de sorte qu'il est presque inutile de pousser l'operation plus loin, quoiqu'on le puisse.

DEMONSTRATION.

SI l'on tire par le point D la tangente MDN, on reconnoîtra que les lignes DM, AM, MT sont égales entr'elles; car l'angle MDT, ou son opposé au sommet NDB, qui a pour mesure la moitié de l'arc BD (par la 32. du III. Livre d'EUCLIDE) sera égal à l'angle ATB, puisque les triangles BDA, TDA sont semblables, parce qu'ils le sont au triangle TAB, avec lequel ils ont chacun un angle T & B commun, & un angle Droit en D; par conséquent l'angle BTA sera égal à l'angle BAD; or BAD a aussi pour mesure la moitié de l'arc BD, donc le triangle DMT étant isoscele, le côté MD sera égal à MT, & il sera aussi égal à MA, parce que MD & MA sont des tangentes aux points D & A (par la 3.e du III. Liv. d'EUCL.) donc l'arc AD qui est moindre que ces deux tangentes AM, MD, sera moindre que AT, qui est égal à leur somme.

SI l'on tire ensuite par le point F, moitié de l'arc AD la Corde BF, & qu'on la prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre AT en P, on prouvera de

de même que l'arc AF eſt moindre que AP; or menant du centre C la ligne CE perpendiculaire à la Corde AD, elle diviſera cette corde & ſon arc en deux également, de ſorte qu'elle paſſera par F qui eſt le milieu de l'arc AD par la conſtruction, & il ſe formera deux triangles ſemblables AFE; AHD, & APF, AIH, qui font voir que AH eſt double de AF, & AI double de AP, puiſque AD eſt double de AE, donc la ligne droite AH, qui n'eſt égale qu'aux deux Cordes des deux moitiez de l'arc AD, ſera moindre que cet arc, & la ligne AI ſera plus grande que l'arc, parce qu'elle eſt égale à quatre tangentes de ſa moitié AF, comme AI eſt égale aux deux tangentes du tout AM, MD. On prouvera de même que l'arc AD eſt plus grand que la Droite AK, qui n'eſt égale qu'à quatre fois la Corde de l'arc AG, quart de AD, & que AL eſt plus grande, parce qu'elle eſt égale à huit tangentes aux deux extremitez de cet arc AG, priſes comme AM & MD.

Du développement des Corps compris par des Surfaces Planes.

Developper un corps, c'eſt étendre ſur une ſurface plane toutes celles, dont il eſt enveloppé, pour en voir d'un coup d'œil le rapport & l'étenduë.

D'ou il ſuit qu'il ne ſuffit pas de les aranger de ſuite en toute ſorte d'ordre & de combinaiſon.

1.° Parce qu'on ne pourroit diſtinguer le rapport des côtez qui doivent être communs à deux ſurfaces contigues, & ſe réunir dans l'enveloppement.

2.° Parce qu'etant raſſemblez ſans intervales, lorſque la ſomme des angles des ſurfaces contigues deviendroit égale à quatre Droits, ils compoſeroient une ſurface plane, qui ne pourroit plus être pliée pour envelopper le corps d'où elles ont été tirées, ſans être diviſée & ſeparée en pluſieurs morceaux.

3.° Qu'on ne pourroit connoître la plus grande longueur & largeur que l'arrangement naturel de toutes les ſurfaces doit occuper, par exemple, dans le développement du Cube, (*Fig.* 263. qui eſt une croix) la plus grande longueur du développement eſt de quatre quarrez de ſuite, & ſa plus grande largeur de trois; mais ſi l'on mettoit deux rangs de trois quarrez de ſuite, ils compoſeroient une ſurface plane qui ne pourroit plus être pliée, parce que quatre angles Droits ſeroient raſſemblez aux mêmes points *a*, *b*, *c*, *d*; or il eſt démontré dans les Elemens de Geometrie, (Eucl. Liv. II. pr. 21.) que la ſomme des angles plans qui en compoſent un ſolide, eſt moindre que quatre Droits.

4.° Il pourroit arriver dans l'enveloppement, que deux ſurfaces tomberoient l'une ſur l'autre, & que l'une des deux manqueroit ailleurs, comme ſi l'on rangeoit celles du cube en façon d'Equerre, le dernier quarré d'une branche tomberoit ſur le pénultieme de l'autre; il faut de plus examiner de combien d'angles plans eſt compoſé l'angle ſolide du corps qu'on veut développer, pour voir ſi le développement peut être replié ſans diviſion ni tranſpoſition des ſurfaces; ainſi pour le Tetraedre, qui eſt le premier corps régulier, il ne faut pas raſſembler plus de trois angles des ſurfaces de ce corps en un point; parce que ſi l'on en joignoit quatre comme à la Figure 259. elles formeroient, étant pliées, un angle ſolide qui ſeroit celui de l'Octaedre.

D'ou il ſuit que le développement du Tetraedre ne ſouffre que deux combinaiſons, ou comme à la Figure 257. ou comme à la Figure 258. il en eſt de même du développement du cube, dont l'angle ſolide n'eſt compoſé que de trois angles plans; mais parce qu'on ne peut joindre quatre de ſes ſurfaces enſemble, comme au Tetraedre, ſans joindre auſſi quatre angles égaux à quatre droits; il ſuit que ſon développement ne ſouffre que trois combinaiſons qui forment, l'une la croix Latine comme on voit, [*Fig.* 263.] l'autre un T. Suivant ces principes le développement des corps réguliers ſera très facile; car il ne s'agit que de répeter la même ſurface, dont il eſt compoſé, dans l'ordre qui convient à la nature de leurs angles: mais le nombre de ces corps eſt très petit comme l'on ſçait, il n'y en a que cinq, ſçavoir.

Le Tetraedre, qui eſt enveloppé de quatre triangles équilateraux.

Le Cube, de ſix quarrez égaux.

L'Octaedre, de huit triangles équilateraux.

Le Dodecaedre de douze Pentagones égaux.

Enfin l'Icoſaedre de vingt triangles équilateraux; nous ne donnons point les Figures de ces développemens, elles ſont faciles à faire, après ce que nous venons de dire, & d'ailleurs ſe trouvent dans tous les Livres de Geometrie.

Il eſt d'autres corps ſolides régulierement irréguliers formez par les ſections des angles ſolides des réguliers coupez par des plans, qui les émouſſent, ce que l'on peut faire à tous les corps réguliers & irréguliers, & qui produira differentes Figures par la ſection, & differens Poligones qui ſeront les reſtes de ces ſections. Ainſi en coupant les angles du Tetraedre, on aura un ſolide enveloppé de quatre triangles, & d'autant d'Exagones réguliers, ou irréguliers ſi l'on veut. Le Cube coupé de même deviendra compoſé de ſix Octogones réguliers, ou irréguliers, & de

huit triangles équilateraux. L'Octaedre qui deviendra composé de huit Exagones réguliers ou irréguliers & de six quarrez, &c. Et si l'on coupe encore leurs angles solides, on formera de nouvelles Figures de surfaces & de nouveaux Poligones des restes ; ce qui n'est pas d'usage pour notre sujet, mais qui sert à nous mener à la connoissance de l'impossibilité de faire un développement d'un Polyedre, qui seroit enveloppé d'une infinité de surfaces infiniment petites & differentes, tel qu'on peut se le représenter dans la sphère ; car sans pousser bien loin la section qu'on pourroit appeller *l'Emoussement* des angles solides des Polyedres, si l'on émousse les angles de l'Icosaedre également par des sections planes, qui formeroient dix Pentagones réguliers & des restes quadrilateres, d'où résulte un Polyedre de trente surfaces inégales ; on trouvera déja une Figure qui approchera tellement de la sphérique, qu'on la jugera telle, lorsqu'on la regardera d'un peu loin ; en effet elle est déja propre à rouler comme une Boule.

Les solides qui nous interessent ici pour en faire le développement, se réduisent principalement aux Pyramides & aux Prismes, parce qu'ils nous conduisent à la connoissance de celui des Cônes & des Cylindres, qui sont les Figures les plus ordinaires aux voutes, que nous avons toûjours pour objet dans cet Ouvrage ; d'autant plus qu'ils nous fournissent aussi les moyens de développer la surface de la sphère, quoiqu'imparfaitement, mais suffisamment pour les besoins de la pratique ; comme on l'enseignera au IV. Livre.

Probleme V.

Faire le Développement d'une Pyramide quelconque, Droite ou Scalene.

On suppose premierement, que le Polygone de la base est connu ; secondement, que l'on connoît la hauteur du sommet de la Pyramide sur le plan de la base, & sa projection sur ce plan.

Si la Pyramide est droite, il est évident que la projection du sommet est au centre du Polygone, qu'elle a pour base, parce qu'elle ne panche d'aucun côté, suivant sa définition.

D'ou il suit qu'il n'y a de Pyramide exactement droite, que celle qui a pour base un Polygone régulier ; car si ce Polygone n'a pas tous ses côtez égaux, quoiqu'inscrit dans un cercle, la projection du sommet sera plus près d'un côté que de l'autre ; par conséquent la face qui a pour base le côté qui en approche le plus, sera plus inclinée, & celle qui en approche le moins, sera plus couchée ; c'est-à-dire, en termes de l'art que l'une aura plus, l'autre moins de Talud, ainsi elle paroîtra plus pan-

cher d'un côté que de l'autre, quoique son sommet soit à plomb sur le centre du cercle, dans lequel sa base est inscrite.

Que les côtez d'une telle base approchent plus ou moins du centre; cela est démontré dans la 15.e prop. du III. Livre d'Euclide, puisque ce sont des Cordes inégales d'un cercle.

Ce sera encore pis si la base de la Pyramide est un Polygone irrégulier, qui ne puisse être inscrit dans un cercle, parce qu'alors non seulement les faces, mais encore les Arêtes auront des Taluds inégaux; de sorte que la Pyramide panchera de tous côtez.

Cette observation fournit la raison d'une singularité qu'on fait remarquer aux Voyageurs qui passent à Soleurre en Suisse; une des Tours de l'enceinte qui est en forme de petit Bastion à cinq côtez, & couverte d'un comble en Pyramide extrêmement haute, comme les éguilles des anciens Clochers, paroît toujours pancher du côté où on la regarde; les gens qui ne sont pas Geometres attribuent cette Merveille à la grande industrie de l'Ouvrier, qui en a fait la Charpente. Je fus en effet frappé de cette apparence, mais je reconnus bientôt que c'étoit une suite necessaire de l'irrégularité & de l'imparité du Polygone de la base, où par la nature du Pentagone, un angle est diametralement opposé à une face; ce qui présente un grand Talud d'Arête contre un moindre Talud de la face, si le Spectateur est placé sur la perpendiculaire à ce diametre, & s'il s'en écarte, l'apparence du Talud d'une Arête s'alonge, & l'autre se racourcit. Revenons à notre sujet, si la Pyramide est Droite réguliere, la hauteur étant donnée, il sera aisé de trouver les longueurs des Arêtes
Fig. 260. qui sont les côtez qui comprennent ses surfaces; car, [*Fig.* 260.] il
& 261. n'y a qu'à quarrer le Rayon *cd* de la base, & la hauteur CS, & tirer la racine quarrée de leur somme, on aura le côté S*d*, lequel étant donné, suffit pour tous les autres qui lui sont égaux, alors le développement d'une Pyramide Droite ne consiste qu'à répeter & ranger de suite autant de triangles isosceles qu'il y a de côtez à la base, & ajoûter la surface de cette base, comme on voit à la Figure 261. qui est le développement de la Pyramide pentagone, 260.

Si la Pyramide est scalene, c'est-à-dire, oblique sur sa base, l'operation devient un peu plus composée, parce que les triangles de ses surfaces étant inégaux, il en faut chercher les côtez; & pour y parvenir, ce n'est pas assez d'avoir la hauteur du sommet sur le plan de la base, il faut encore le point de sa projection.

Fig. 262. Soit [*Fig.* 262.] la Pyramide triangulaire ABCS donnée, s'il s'agissoit d'operer sur le solide, il faudroit abaisser du sommet S la perpendiculaire

SP sur le plan de la base prolongée, ou par le moyen de deux Equerres, ou par le Problême de la 11.e prop. du XI. Livre d'EUCLIDE, pour avoir le point P, qui est la projection du sommet S, dans la distance où il doit être à l'égard du côté BC de la base de la Pyramide tracée sur un dessein à part. Puis ayant tiré de ce point une droite PD à volonté, on lui fera une perpendiculaire PS égale à la hauteur donnée; ensuite du point P pour centre & des distances PA, PB, PC pour Rayons, on décrira des arcs A*a*, B*b*, C*c* qui couperont PD aux points *a*, *b*, *c*, par lesquels tirant les lignes *a*S, *b*S, *c*S au point S, on aura les points que l'on cherche. Par le moyen de ces côtez & ceux de la base, on décrira trois triangles de suite qui formeront le développement de la Pyramide, en y ajoûtant pour quatriéme celui de la base.

DEMONSTRATION.

PUISQUE la ligne SP qui doit être supposée en l'air, est perpendiculaire au plan de la base ABC prolongé, elle sera perpendiculaire à toutes les lignes menées dans ce plan par le point P (par la 5.e du 11. d'EUCL.) donc les triangles APS, *a*PS, sont rectangles en P, mais par la construction AP = *a*P & PS est commun, donc l'hypotenuse AS est égale à *a*S, & par la même raison *b*S = BS & *c*S = CS, *ce qu'il falloit faire.*

NOUS pouvons appliquer cette solution à toute autre Pyramide Polygone de quelque nombre de côtez que sa base puisse être, puisqu'il est évident qu'elle pourra être réduite en triangles.

COROLLAIRE.

DE-LA on tire la maniere de *faire le développement d'un Cône quelconque*, droit ou scalene; car on peut le considerer comme une Pyramide, dont la base a une infinité de côtez infiniment petits; ainsi le Cône Droit étant enveloppé d'une infinité de triangles isosceles, il est visible que son développement sera un secteur de cercle par la comparaison de celui de la Pyramide pentagone de la Fig. 261. qui l'imite déja beaucoup, quoiqu'en si petit nombre de côté A*b*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, ce qui est connu de tout le monde.

MAIS si ce Cône Droit étoit coupé par une base oblique à son axe, il est clair qu'il se formeroit une section differente du cercle, & par conséquent qu'il en résulteroit un contour de développement different du secteur.

PAREIL changement arriveroit si le Cône étoit droit sur une base Elliptique, ou scalene sur une base Circulaire; en ce cas si le Cône est scalene, les longueurs de ces côtez étant inégales, donneront, pour con-

tour de la baſe développée une Courbe qui ſera toujours inégalement éloignée du ſommet S, excepté dans les points correſpondans, oppoſez non pas diametralement, mais ſuivant les perpendiculaires menées au diametre qui paſſe par le plus grand, & le plus petit côté du Cône; de ſorte que cette courbe ne peut plus être un cercle, comme elle étoit dans le Cône Droit.

On demandera peut-être comment on peut connoître le plus long & le plus petit côté de la ſurface d'un Cône ſcalene le voici.

Probleme VII.

La Baſe, la hauteur & la projection du Sommet d'un Cône ſcalene étant données, déterminer le plus long & le plus petit côté de ſa Surface.

Fig. 264. Soit [*Fig.* 264.] le cercle ADBR, la baſe du Cône dans le plan de laquelle [prolongé s'il le faut] eſt donné ou trouvé le point P pour la projection du ſommet S, ayant mené de ce point P par le centre C de la baſe ADBR la ligne PC, on fera PS perpendiculaire ſur PCB, & égale à la hauteur donnée; ſi du ſommet S on mene une ligne au point A, où la ligne PB coupe le cercle de la baſe, je dis que SA ſera le plus petit côté du Cône.

Et ſi du même ſommet S on mene SB, où la même ligne coupe le cercle de la baſe, je dis que la ligne SB ſera le plus long côté du Cône.

Demonstration.

Par la 8.e du III. Livre d'Euclide, la ligne PA eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener au cercle du point P; donc le triangle PSA eſt le plus petit de tous les rectangles, qui auront pour côté commun la hauteur PS.

Donc SA eſt l'hypotenuſe qui approche le plus de la perpendiculaire SP, par conſéquent qui eſt la plus courte.

Par la même propoſition d'Euclid. la ligne PB étant la plus longue de toutes celles qu'on peut mener du point P à la circonference concave DB3. il eſt clair que la ligne SB eſt celle qui s'éloigne le plus de la perpendiculaire SP, par conſéquent qu'elle eſt la plus longue de toutes celles qu'on peut mener du point S à la circonference du cercle ADBR, qui eſt la baſe du Cône.

Donc SA eſt le plus petit côté du Cône ſcalene, & SB eſt le plus long; *ce qu'il falloit trouver.*

Cela ſuppoſé, il ſera facile de faire le développement d'une moitié

du Cône ſcalene à laquelle l'autre doit être égale, & abreger ainſi l'operation de moitié; en ſuivant la même pratique que nous avons donnée pour la Pyramide triangulaire.

L'on diviſera le demi cercle ARB en autant de parties égales ou inégales qu'on voudra avoir de côtez du Cône, par exemple, ici en 4, aux points 1, 2, 3, & l'on menera du point P à toutes ces diviſions des droites P1, P2, P3, que l'on tranſportera par des arcs de cercles faits du point P pour centre en $P\,1^b$, $P\,2^b$, $P\,3^b$; ſi du ſommet S on mene des lignes à ces points, il eſt clair, par le Problême précedent que les lignes SA, $S\,1^b$, $S\,2^b$, $S\,3^b$, SB ſont autant de côtez du Cône, qui paſſent par les points donnez à la baſe A, 1, 2, 3, B; ainſi il ne s'agit plus que d'en faire uſage pour le développement.

Ayant porté à part [*Fig.* 266.] la ligne SB de la Fig. 264. en S^d, B^d pour premier côté d'un triangle, on prendra la Corde A1, de laquelle comme Rayon, & du point B^d pour centre, on décrira un arc $3x$; enſuite ayant pris la longueur $S\,3^b$ de la Fig. 264. pour Rayon, & du point S^d pour centre, on décrira un arc $3y$, qui coupera le précedent au point 3, lequel eſt un de ceux du développement de la baſe. *Fig.* 266.

De la même maniere on trouvera le point 2. en faiſant le triangle Sd, 3, 2, ſur le côté $S^d\,3$ pour baſe, avec les deux autres donnez dans la Fig. 264. ſçavoir, $S\,2^b$, & la Corde 1, 2, & en continuant ainſi de ſuite, on formera le Polygone S^d, B^d, 3, 2, 1, a^d, Sd, qui ſera le développement de la moitié de la Pyramide, Octogone inſcrite dans le Cône; & ſi au lieu des lignes droites $B^d\,3$, 3, 2, 2, 1, 1a, on trace à la main une Courbe B^d *efRga*, on aura le contour de la baſe du Cône, laquelle ſera d'autant plus parfaite que le Polygone inſcrit dans la baſe du Cône aura de côtez, ce qui eſt évident, puiſqu'on aura un plus grand nombre de points. Il paroît par exemple, dans la Figure préſente, qu'il auroit été neceſſaire que ce Polygone au lieu de 8. eut eu ſeize côtez pour tracer l'arc $B^d\,e\,3$, parce que la Courbure de l'arc $B^d\,3$ eſt conſiderable à l'égard de la Corde $B^d\,3$, & qu'il auroit été à propos qu'il eut été de 24. côtez pour tracer l'arc $3f2$, pour avoir deux points dans cet arc, à cauſe du changement de la courbure, mais que l'Octogone ſuffit pour la partie 21; dont l'arc differe peu de la Corde, ainſi du reſte, ſuivant le plus ou le moins d'exactitude qu'on ſe propoſe.

Corollaire.

De-la on tire la maniere de *faire le développement de toutes les Courbes des ſections Coniques ſur la ſurface d'un Cône quelconque*, lorſque leurs axes ſont donnez dans le triangle par l'axe, & les plus grand & plus petit

côtez du Cône, ſuppoſant les plans des ſections perpendiculaires à ce triangle par l'axe ASB.

Fig. 264. Car, *Fig.* 264. 1.° *pour l'Ellipſe*, ſuppoſant un des axes donné en Eb, & la baſe du Cône diviſée, comme on l'a dit aux points 1, 2, 3, on menera par ces points des perpendiculaires à la ligne AB, qui la couperont aux points pCq, par leſquels & par le ſommet S on menera les lignes pS, CS, qS qui couperont Eb aux points fgh, d'où menant des paralleles à AB juſqu'à la rencontre des côtez correſpondans S 1^b, S 2^b, S 3^b qui les couperont aux points x, y, z, je dis que les côtez Sx, Sy, Sz ſeront terminez en E, x, y, z, b, à la circonference de l'Ellipſe, & que ſi chacun de ces côtez ſont portez à la Fig. 266. ſur ceux du développement du Cône, qui paſſent par les points B^d, 3, 2, 1, a^d, ils donneront les points b^e, x^d, y^d, z^d, E^d, par leſquels traçant à la main une ligne courbe, on aura la moitié de l'Ellipſe, qui a pour un de ſes axes la ligne donnée Eb [*Fig.* 264.]

On en fera de même pour la deſcription de la Courbe qui eſt le développement d'une Parabole ou d'une Hyperbole, dont l'axe ſera donné dans le triangle par l'axe du Cône ASB.

2.° *Pour la Parabole*, ſoit [*Fig.* 264.] l'axe donné $P^b r$, lequel dans la Figure préſente eſt coupé par quatre lignes SB, Sq, SC, Sr, par le moyen deſquelles on trouvera autant de points de ſa circonference de chaque côté non compris celui du ſommet P^b; or ces points doivent être répandus ſur la ſurface du Cône développé, comme nous venons de le dire pour l'Ellipſe dans l'exemple précedent ſur les lignes SB, S^d3, S^d3, S^d2, S^dR; ainſi portant la longueur SP^b de la Fig. 264. en S^d P de la Figure 266. on aura ſur S^d, B^d, le ſommet P de la Parabole développée. Sx^2 porté en S^d, x^3, ſur S^d3, donnera le point 3. provenant de la diviſion de la baſe 3, à cauſe de la perpendiculaire 3q, ſur AB; de même on portera Sn en $S^d n$ ſur S^d2, qui donnera le point n provenant du point 2. de la baſe, à cauſe de 2C perpendiculaire ſur AB; de même enfin Sr en $S^d R^d$ provenant du point R, à cauſe de Rr perpendiculaire ſur AB; la Courbe P^d, x^3, nR^d ſera le développement de la Parabole propoſée.

3.° *Pour l'Hyperbole*, on operera de même que pour la Parabole, mais dans la Figure préſente où la demi-baſe du Cône n'eſt diviſée qu'en quatre parties, & l'axe de l'Hyperbole eſt donné en Hr, on n'aura qu'un point à ſa circonference entre ſon ſommet H & celui de ſon amplitude Rr à la baſe, parce que l'axe Hr n'eſt coupé que par la ligne pS provenant du point 1. à la circonference de la baſe du Cône. De ſorte qu'on n'aura que trois points pour la moitié du développement de cette Hyperbole;

bole; sçavoir, le sommet H, en portant SH de la Figure 264. en $S^d b$ de la Fig. 266. 2.° On aura le point u en portant Sv en $S^d u$ sur S^d, & enfin le point R à la base comme à la Parabole où on les suppose communs, par hazard.

Nous n'ajoûterons rien ici de la description du cercle produit par une section du Cône coupé par un plan parallele à la base, parce qu'il est aisé de voir que les côtez du Cône qui le coupent, & par conséquent qui en donnent les points sur la surface conique développée, doivent être proportionels à ceux qui sont continuez jusqu'à la base du Cône $S^d B^d : S^d b :: S^d a^d : S^d a$, & de même sur les autres côtez $S^d 3$, $S^d 2$, $S^d 1$. Or ces proportions sont toutes trouvées à la Fig. 264. où la ligne ab coupe proportionellement les côtez SB, Sb, Sq, SC, $S2^b$, St, $S1^b$, SA, aux points b, m, n, o, a; mais si le cercle provenoit d'une section sous-contraire, il tomberoit alors dans le cas du développement de l'Ellipse.

Remarque sur certains Points des Courbes dévelopées sur le Cône.

Puisque le côté SA du Cône est le plus petit de tous ceux qu'on peut tirer du sommet S, comme nous l'avons démontré ci-devant, & que le côté SB est le plus grand; il suit que tous les points de la demi-circonference de la base A 2 B, sont tous inégalement éloignez du sommet S ou S^d de la Fig. 266. au développement de la surface du Cône, *Fig.* 264. & que les points B^d & a^d sont comme les termes du plus grand, & du moindre éloignement de la Courbe B^d, R^d, a^d. D'où vient qu'on les appelle *Points de Station*; car dès qu'elle est parvenuë en a^d, elle cesse de s'approcher de S^d, & dès qu'elle est parvenuë en B^d, elle cesse de s'en éloigner, & recommence à s'en approcher.

Il en sera de même pour toutes les autres sections Coniques, dont les axes Eb, $P^b r$, Hr sont dans le triangle par l'axe ASB.

On peut encore remarquer dans la Courbe de développement de la base du Cône, qu'elle change de contour par une inflexion semblable à celle d'une S; en sorte qu'elle passe du contour concave $a^d g$R, à l'égard du point S^d au convexe R^d, 2, 3, B^d, le point R^d qui est le terme & la jonction de ces deux contours differens, est appellé *point d'inflexion.* Lequel partage inégalement la Courbe, en sorte que la partie concave à l'égard du sommet est toujours la plus grande.

Pour trouver ce point à la base ARB [*Fig.* 264.] il faut tirer du

point P, projection du fommet du Cône S, une tangente PR, le point d'attouchement R fera celui que l'on cherche; ce qui fait voir que la partie A 1 R convexe à l'égard de P eft toujours plus petite que R 3 B concave à l'égard de ce même point; puifque la tangente ne pourroit toucher la bafe au point du milieu 2, que lorfque le point P feroit infiniment loin fur la direction B *p* prolongée.

Du Développement des Prifmes.

Les Prifmes auffi bien que les Cônes peuvent être droits ou obliques fur leurs bafes.

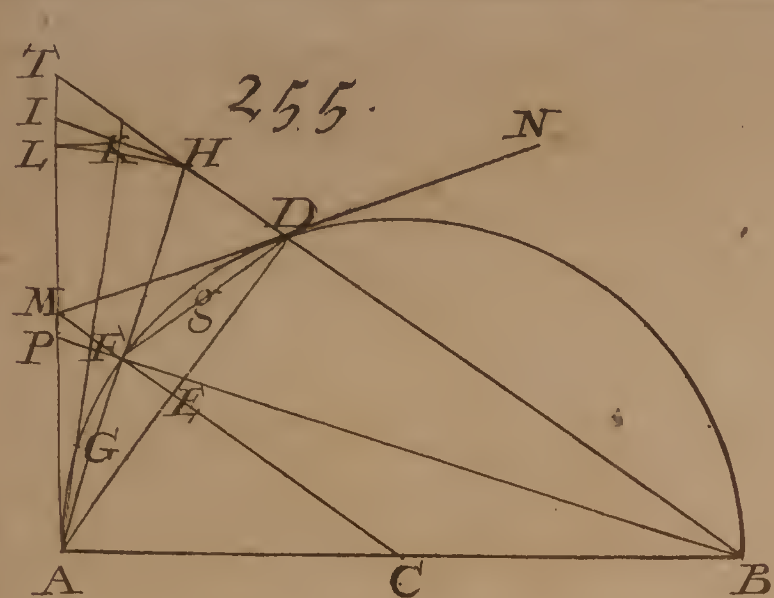
Il eft évident que le développement des Prifmes Droits eft un Parallelograme rectangle compofé de tous ceux des furfaces, dont il eft enveloppé; puifque les parties prifes enfemble font égales à leur tout, & que les bafes étant paralleles, les hauteurs font toujours égales.

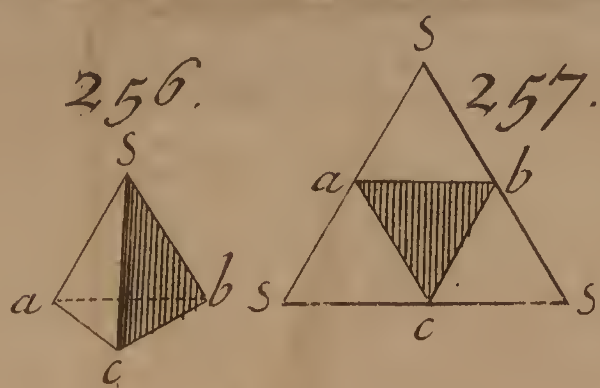
Il n'en eft pas de même des Prifmes fcalenes, dont les côtez ne font pas perpendiculaires au plan de leur bafe; car quoiqu'ils foient compris entre deux plans paralleles, comme nous le fuppofons; premierement, il fuit bien de-là qu'étant paralleles entr'eux, ils font tous égaux, mais non pas qu'ils faffent des angles égaux avec les côtez de leur bafe; d'où il réfulte que chaque furface, dont le Prifme eft enveloppé, peut être un Parallelograme different, excepté ceux qui ont pour bafe les côtez du Polygone de la bafe du Prifme, qui font paralleles & égaux entr'eux.

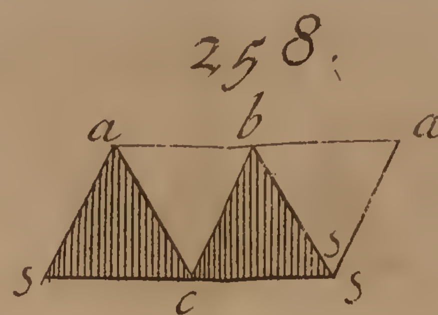
Pl. 23.

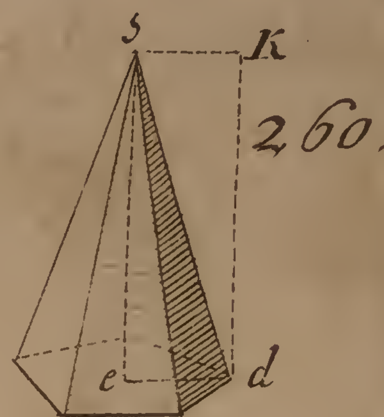
Fig. 268. Soit [*Fig.* 268.] le Prifme AC, oblique fur fa bafe BCDE, de l'obliquité marquée par la ligne PB, diftance d'une perpendiculaire HP abaiffée fur le plan de la bafe prolongée. Ayant pris à volonté fur un de ces côtez, comme fur HB, un point *d*, on lui menera la perpendiculaire *d*K, qui coupera le côté fuivant GC au point K, par lequel on tirera de même une perpendiculaire KL, & ainfi de fuite, jufqu'à ce qu'ayant parcouru le contour, on foit revenu au point *d*.

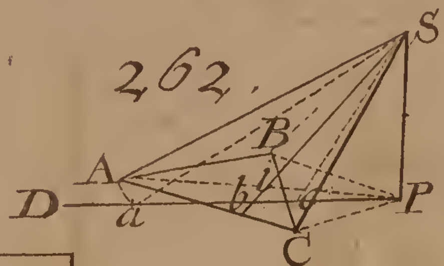
Fig. 269. On fera enfuite à part [*Fig.* 269.] une ligne droite *d*N *d*, fur laquelle on portera de fuite les longueurs *d*K, KL, LM, MN *d* égales à celles des diftances perpendiculaires des côtez du Prifme AC, & par tous les points *d*KLMN *d*, on tirera des perpendiculaires à *d*N *d*, comme *bb*, *gc*, *id*, *ae*, HB, fur lefquelles on portera de part & d'autre de la ligne *d*H *d* les longueurs qui expriment les diftances de cette ligne aux angles du Prifme; ainfi prenant *d*H de la Fig. 268. [on la portera en *dh*] de la Figure 269. KG en *kg*; LI en *li*, &c. d'un côté; & de l'autre *d*B en *db*, KC en *kc*, LD en *ld*, &c. & l'on aura les points *bgia*H vers une bafe, & *bcde*B, vers l'autre; par lefquels menant des lignes droites

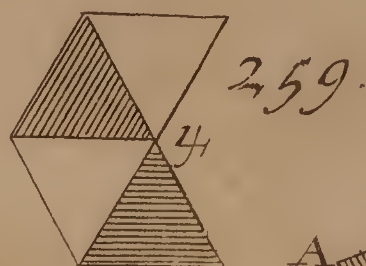

255.

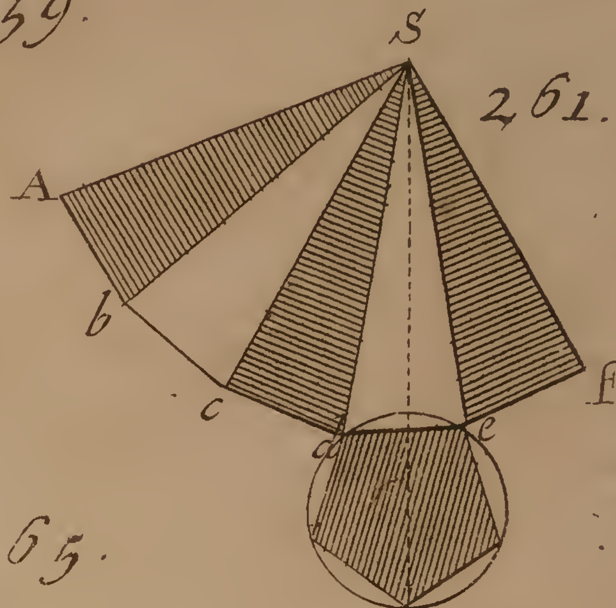

256.
257.

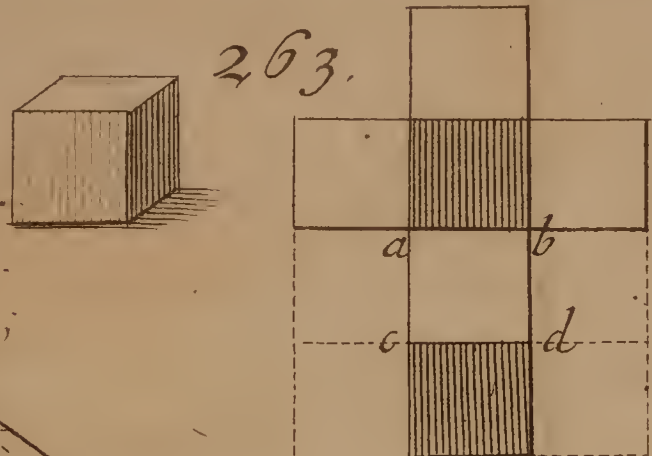

258.

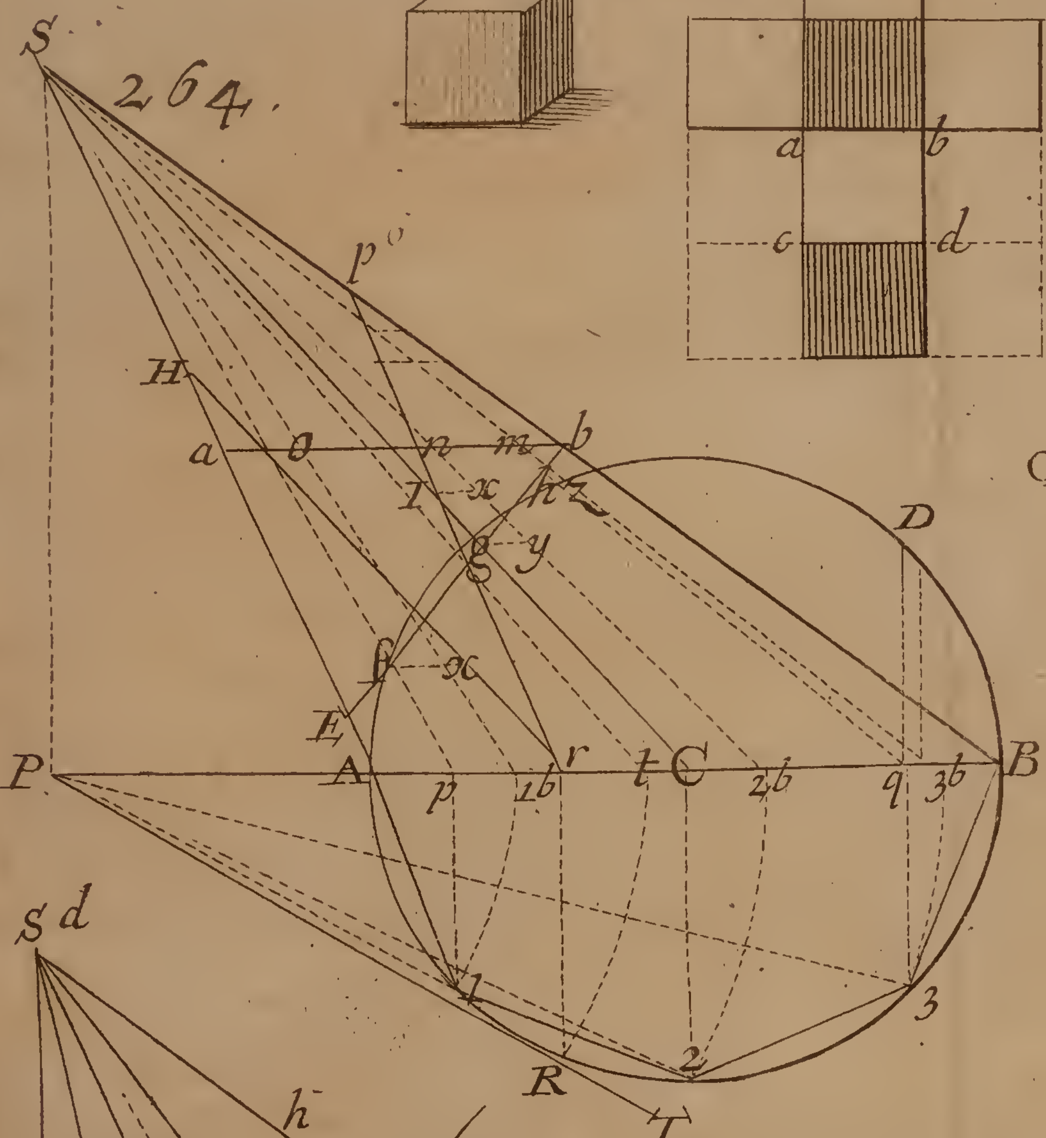

260.

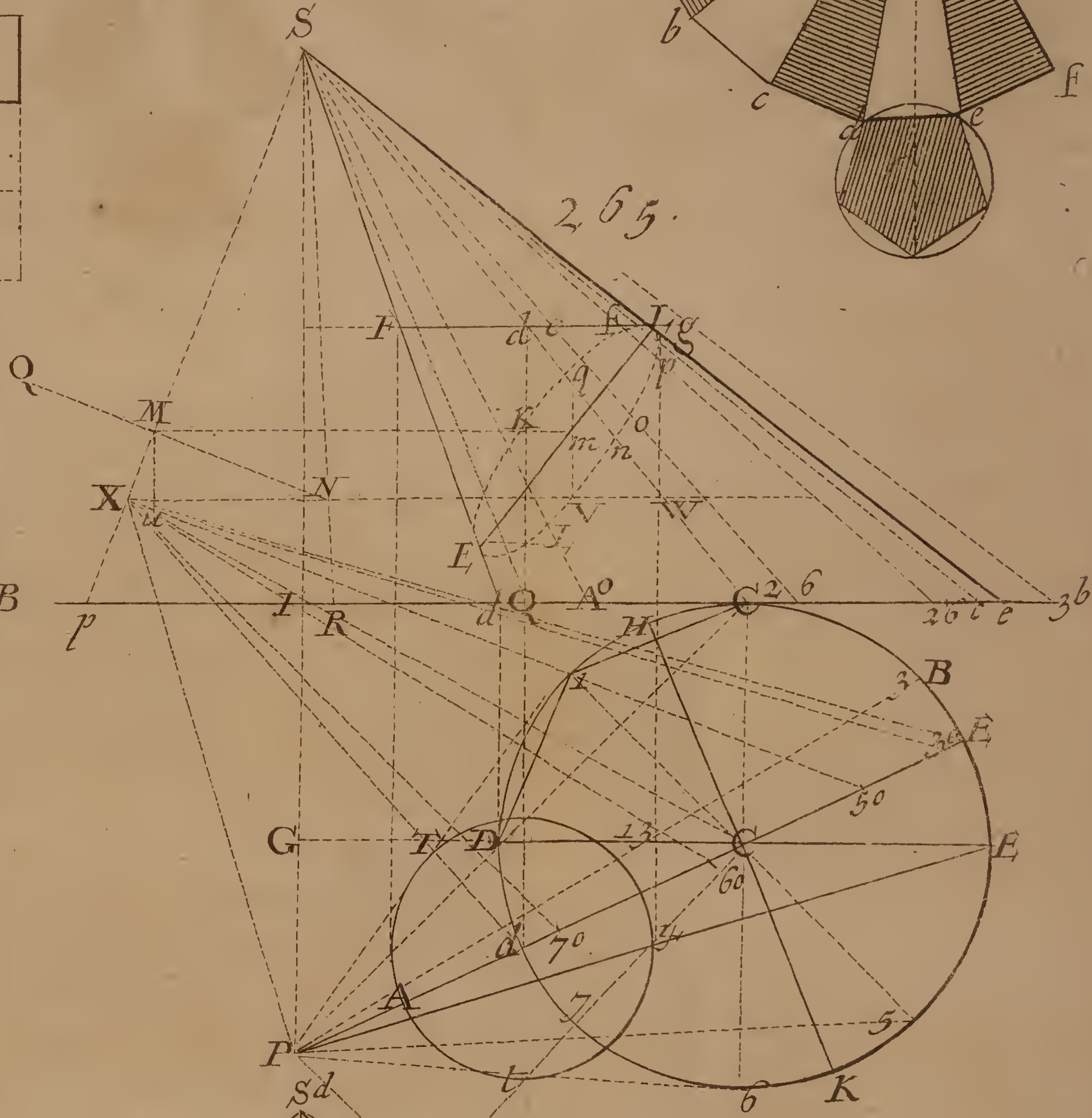

262.


259.

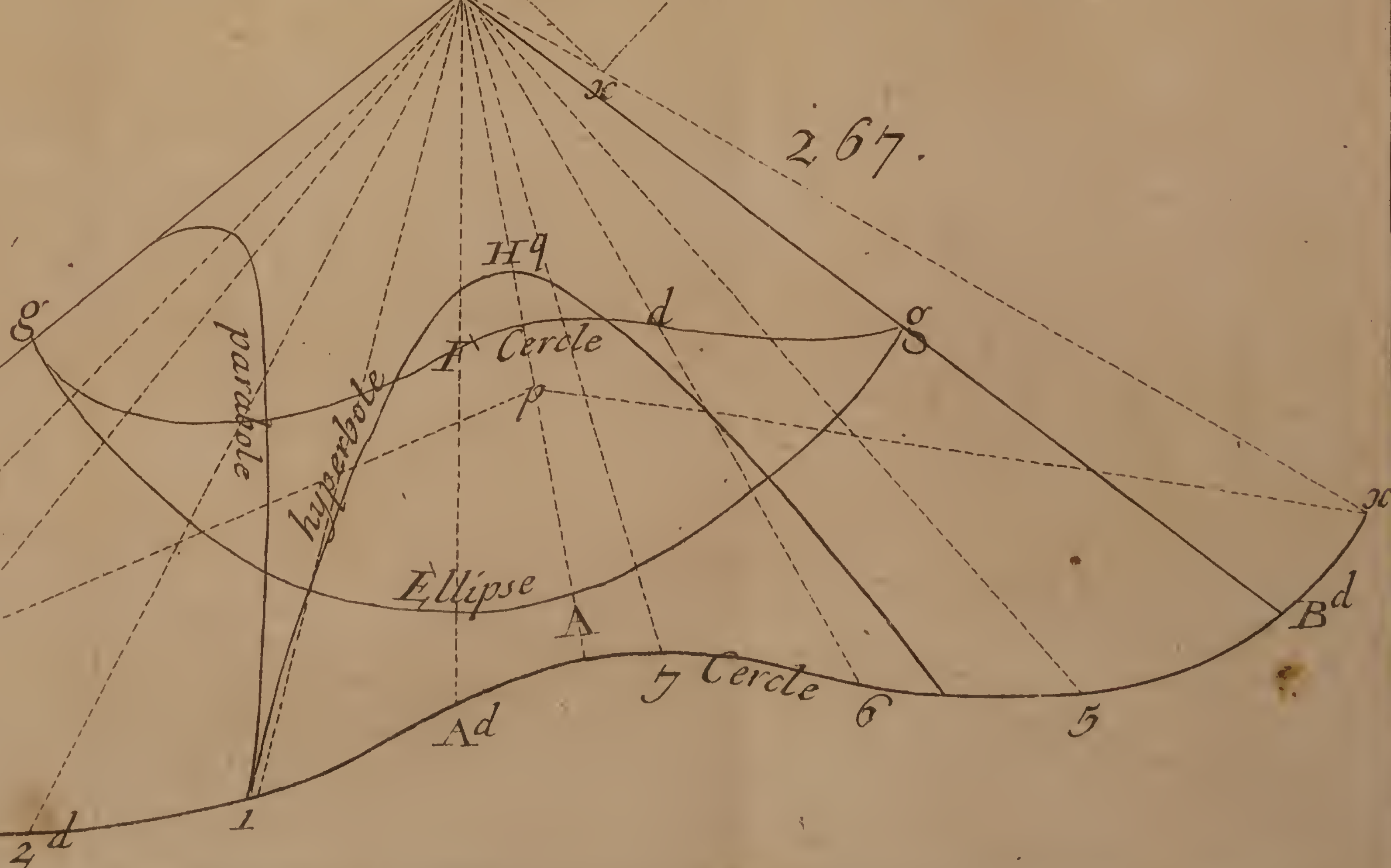

261.


263.


264.


265.


Parabole
Cercle
hyperbole
Ellipse
266.


267.
parabole
hyperbole
Cercle
Ellipse
Cercle

de point en point, on aura la Figure *hiag*FB*edcbh* pour le développement des côtez du Prisme, à laquelle joignant les deux bases X & Q, on aura celui de sa surface entiere, qui est ici celle d'un Parallelepipede obliquangle compris par six surfaces, qui sont autant de Parallelogrames, comme le cube l'est par six quarrez.

Il est clair que de quelques nombres de surfaces que puisse être ce Prisme, le développement se fera toujours de même; fut-il d'une infinité de côtez, ce qui le rendroit alors très semblable au Cylindre scalene, qu'on peut mettre au rang des Prismes en considerant ses surfaces comme infiniment étroites.

Corollaire I.

De-la on tire la maniere de *faire le développement de la surface du Cylindre scalene.*

Soit [*Fig.* 270.] le Parallelograme BAFD la section d'un Cylindre scalene par son axe, & le diametre de sa base dans la plus grande obliquité, comme on voit à la Figure 271. [quoique plus petite] le diametre BA passant par le point R de la perpendiculaire DR abaissée sur le plan de cette base. *Fig.* 270.

Sur ce diametre BA ayant fait le demi cercle B*h*A, on le divisera en tel nombre de parties qu'on voudra égales ou inégales, il n'importe, mais les égales sont plus commodes, & l'on menera par les points de division des perpendiculaires à ce diametre, comme 1*p*, 2*p*, 3*p*, 4*p*, qui le couperont aux points *p* & *p*, par lesquels on menera autant de paralleles au côté BD, comme *p*5, *p*6, *p*7, *p*8.

Ensuite par un point E pris à volonté sur BD, on lui tirera la perpendiculaire ER qui coupe les paralleles à BD aux points *nopq*, qui sont ceux des abscisses de l'arc-Droit ou section perpendiculaire à l'axe qui est ici une Ellipse, dont ER est le petit axe, & BA le grand axe par le moyen desquels on tracera cette Courbe, dont le contour rectifié, sera le développement de celui du Cylindre scalene; mais si l'on se contente du développement des Cordes comprises entre les divisions de l'arc-Droit, on les trouvera en portant; sur les paralleles à l'axe, les hauteurs *p*1, *p*2, *p*3, *p*4 sur les paralleles correspondantes, comme *p*1 en *n*I, *p*2 en *o*K, *p*3 en *p*L, *p*4 en *qm* les longueurs E*i*, 1K, KL, L*m*, *m*R jointes ensemble sur une ligne droite, comme E*e* de la Figure 272. feront le développement du contour du Cylindre, qui sera d'autant plus exact, que les parties des divisions du demi cercle B*h*A seront en plus grand nombre.

Presentement pour avoir le développement du contour des bases, *Fig.* 272.

ayant porté ſur la ligne E*e*, que j'appelle la Directrice, les longueurs des Cordes R*m*LKIE, on menera par tous ces points des perpendiculaires à la Directrice, ſur leſquelles on portera les avances du Profil de la Figure 270. comme RA de ce Profil en RA de la Fig. 272. *qp* en *m*1, *pp* en L2, *op* en K3, *np* en I4, EB en *e*B, & par les points A1234B, on tracera à la main une Courbe qui ſera le développement du contour de la baſe, qu'on répetera de l'autre côté en A*b*, & de même façon au deſſous en D*f*, ou bien ſi les baſes ſont paralleles, on trouvera la ſeconde, en portant ſur toutes les paralleles à AD la même longueur AD en 1 11, 2 12, 3 13, &c. ce qu'on appelle en terme de l'art jauger.

Si enfin on ajoûte de part & d'autre les deux cercles des baſes *b*3A, D3*f*, on aura le développement de la ſurface totale du Cylindre.

Le développement par les Cordes eſt plus uſité dans les Traits de la coupe des Pierres, que celui du contour, parce qu'on commence par les Doeles plates, dont les Cordes ſont les largeurs à l'arc-Droit.

Nous ſuppoſons ici que le Profil qui ſert à faire le développement eſt fait ſur le diametre de la plus grande obliquité de l'axe ſur ſa baſe, pour n'avoir aucun égard aux obliquitez des voutes compoſées de pluſieurs inclinaiſons de biais, deſcente, talud & ſurplomb; parce que nous avons donné la maniere de les réduire toutes à une ſeule, lorſque nous avons donné les Régles du Profil.

Quand nous parlons de l'obliquité de l'axe ſur ſa baſe, il eſt évident que nous parlons auſſi de celle des côtez du Cylindre ſur le même plan de la baſe, par un Corollaire de la 8.e du II. Livre d'Euclide, qui dit que ſi une ligne eſt perpendiculaire à un plan, toutes ſes paralleles le ſont, & ſi elle lui eſt inclinée, toutes ſes paralleles le ſont d'un même angle d'inclinaiſon; mais comme les côtez ſont coupez inégalement par un plan perpendiculaire à l'axe, il réſulte que les meſures de leurs longueurs au deſſous ou au deſſus de ce plan, ſont inégales entr'elles, mais égales à celles du Profil fait ſur le diametre de plus grande obliquité, comme à la Figure 270. au deſſus & au deſſous de la ligne ER.

Corollaire.

D'ou il ſuit qu'au Cylindre ni au Cône les differentes compoſitions d'obliquitez ne doivent rien changer au développement de leurs ſurfaces, mais ſeulement aux termes d'où on les commence, ou auſquels on les termine; par exemple, ſi le développement avoit été commencé ſur le côté 3, 13. les courbures A*b*F & A4B n'auront pas été également

étenduës de part & d'autre; mais ce qui auroit été retranché de la courbure convexe 34B d'un côté, auroit été ajoûté de l'autre; ce qu'il est à propos de remarquer pour sentir la raison des inégalitez que l'on trouve dans les développemens des Doeles, dans les Traits des voutes d'obliquitez composées, qu'on verra au IV. Livre.

COROLLAIRE II.

De la maniere de faire le développement du contour des bases des Cylindres, on tire aisément celles de tracer sur leurs surfaces développées les cercles & les Ellipses qu'on y peut décrire; il ne s'agit que d'avoir les diametres de ces sections (situées comme elles doivent être) dans le Profil ou section du Cylindre par l'axe, comme LE ou *h*G dans le Parallelograme BAFD; lesquels diametres seront coupez par les paralleles à l'axe provenant des divisions du contour de la base 1, 2, 3, 4, comme EL aux points *t*, *t*, *t*, *t*, & les distances *tn*, *to*, *tp*, *tq*, LR étant portées sur les perpendiculaires à la Directrice [*Fig.* 272.] aux points correspondans en dessus ou en dessous de cette Directrice, donneront sur les côtez des points par lesquels on tracera à la main une Courbe FLI, qui sera le développement de l'Ellipse, qui a pour diametre EL, & la Courbe *hg*H celle qui a pour diametre au Profil la ligne *h*G.

COROLLAIRE III.

Il suit de la position des axes donnez dans la section qui est le Parallelograme par l'axe & par le point P, lequel est la projection du sommet de l'axe sur une de ses bases, que l'on connoît les points d'inflexions des Courbes, qui sont les développemens des circonferences des cercles & des Ellipses qu'on décrit à la surface du Cylindre par des sections obliques à l'axe; car prenant pour exemple l'Ellipse, dont le diametre est EL, il est visible que la distance RL étant la plus grande de toutes les autres *qt*, *pt*, &c. lorsque la Courbe EL sera parvenuë au point L, elle commencera à se rapprocher de la ligne E*e*, & qu'étant parvenuë en E où elle la touche, elle commencera à s'en éloigner; il en sera de même des points A & B, *h* & *b*, comme il a été dit à l'égard des développemens des sections Coniques sur la surface du Cône développée. *Fig.* 270. & 271.

DEMONSTRATION.

La raison pour laquelle on prend une perpendiculaire sur les côtez d'un Prisme pour en copier les surfaces, c'est pour en abreger l'operation; car on sçait que pour faire une Figure semblable & égale à une

autre, il n'y a que deux manieres, ou de la réduire en triangles, ou de mesurer les distances de ses angles à une ligne donnée par des perpendiculaires, ce qui est proprement & équivalemment réduire tous les triangles en rectangles; de sorte qu'un angle Droit sert pour tous. Or on peut bien mettre la premiere maniere en pratique pour les Prismes ordinaires, mais non pas pour les Prismes d'une infinité de côtez, tels que sont les Cylindres; car la largeur des Parallelogrames, & par conséquent des triangles qui en sont les moitiez, est réduite à rien; il ne reste donc de leur dimention que la longueur, & l'on ne peut considerer ces surfaces comme ayant de la largeur courbe, sans reconnoître que les Diagonales de ces Parallalogrames mixtes ne seroient plus des lignes droites, mais courbes proportionellement à la courbure de leurs bases, ce qui est évident.

Il est inutile de rendre raison pourquoi on prend une perpendiculaire à l'axe du Cylindre pour avoir le développement de son contour; car il est clair que toute autre section que ER augmentant le diametre par son obliquité, augmente aussi le contour, les circonferences des cercles & des Ellipses étant entr'elles comme leurs diametres; or de toutes les lignes qu'on peut mener entre deux paralleles, la perpendiculaire est la plus courte; donc la circonference est aussi la moindre, laquelle est la somme de l'infinité des perpendiculaires tirées aux côtez, infinis en nombre, du Prisme cylindrique.

Des Développemens composez de deux ou trois especes de Surfaces d'un corps coupé en plusieurs parties dans son épaisseur, comme sont dans les Voutes celles des Doeles & des Lits, & même des Extrados.

Les Architectes & les Auteurs de la coupe des Pierres ont coûtume de rassembler dans un même dessein de leur Epure le développement de la surface interieure de la voute, qu'ils appellent la Doele, & les sections planes qui sont les intervales de son épaisseur entre deux voussoirs qu'ils appellent les *Lits*, pour en voir d'un coup d'œil la difference & le rapport.

Ce genre de representation est un assemblage du développement de la Doele fait sans interruption, comme il convient aux surfaces Cylindriques & Coniques, & de celui de l'Extrados, qui est de même nature, mais interrompu au milieu, où il est divisé en deux parties separées; & enfin couvert en partie de celui des surfaces des Lits de chaque rang de voussoir, lesquelles sont couchées dans toute leur étenduë sur le développement de la Doele, laquelle doit être considerée en ces endroits

comme double, partie en Doele, & partie en Lit, & même si l'on veut, encore comme triple si l'on y considere l'Extrados, dont nous parlerons peu, parce qu'on en fait rarement usage.

Pour rendre cette explication plus sensible, nous donnerons pour exemple un Berceau qui ait une double obliquité, l'une de direction de face sur celle de son axe horisontal, ce qu'on appelle biais, & l'autre d'inclinaison de face à un plan vertical, ce qu'on appelle Talud.

Soit [*Fig.* 274.] ABFE le plan horisontal de la Doele d'un Berceau *Fig.* 274. biais, dont C*x* est la ligne du milieu, c'est-à-dire l'axe, qui est biais à l'égard de la ligne AB, base de la face qui est couchée en Talud sur cette base, suivant une inclinaison connuë ou donnée, par exemple *b*T à l'égard de *ab*, avec laquelle elle fait un angle obtus *ab*T.

Sur AB comme diametre interieur, & *ab* exterieur, on décrira deux demi-cercles *a*H*b*, A*h*B qui comprendront l'épaisseur du Berceau, ausquels on menera par les sommets H & *h* deux tangentes HT, *ht* paralleles à *ab*, qui couperont le Profil du Talud *b*T aux points T & *t*, & pour connoître combien ces points s'écartent de *l'aplomb*, on fera la verticale V*b* perpendiculaire à *ab*, qui coupera ces tangentes aux points V & *u*, les distances VT, *ut* seront celles dont les sommets de la Doele & de l'Extrados s'écartent de l'aplomb aux Arêtes de la face.

Presentement pour connoître combien les *aplombs* de ces points s'éloignent de la base *ab*, diametre de la face, on la prolongera vers L, puis on menera par les points T & *t* des paralleles à V*b*, qui la couperont aux points L & K; les longueurs *b*L & *b*K seront les distances que l'on cherche, & KL l'intervale horisontal des Arêtes de la Doele & de l'Extrados au milieu de la chef que l'on portera perpendiculairement sur le milieu de AB en CK & CL pour avoir les demi-axes conjuguez aux premiers *ab*, AB, par le moyen desquels on décrira (par le Probléme VII. du Livre II.) les demi-Ellipses AKB, *a*L*b* qui seront les projections des Arêtes de la face à la Doele & à l'Extrados.

Cette projection étant faite, on divsera l'arc A*h*B en tel nombre de voussoirs qu'on voudra, comme ici en cinq aux points 1, 2, 3, 4, par lesquels on tirera du centre C les joins de tête 1. 1', 2. 2', 3. 3', 4. 4', & des mêmes points des perpendiculaires à la base *ab* qu'on prolongera jusqu'aux demi-Ellipses de la projection AKB, *alb* qu'elles couperont aux points 11, 12, &c. 21, 22, &c. par lesquels on tirera du centre C les projections des joins de tête ^{11} ^{12}, ^{21} ^{22}, par lesquels on menera des paralleles à l'axe C*x*, ^{11}q, ^{21}q, ^{12}q, ^{22}s, les trapezes ^{12}q, s^{22}, & ^{11}q, s^{21} seront les projections des Lits, dont on veut chercher la

vraye étenduë pour l'appliquer ſur le développement de la Doele.

Il s'agit preſentement de faire ce développement de la même maniere que nous l'avons dit pour la Figure 270. en commençant par former l'arc Droit DR, & étendant ſon contour D 1 ^{r}, 2^r, 3^r, 4^r R ſur
Fig. 280. une Directrice *dd* de la Figure 280. & portant ſur les diviſions *d*D^d, 1, 2, 3, 4 R *d* les longueurs de la projection *i* ^{11}, *d*^{21}; *i*^{12}, *i* ^{22} d'un côté, & les reſtes *iq*, *is*, &c. de l'autre, ce qui donnera les quatre angles des trapezes qui ſont les ſurfaces de chaque Lit, comme *a*^{d} A^d, *d*^{d} E, *e* 1^d QS, *e* 2^d FS, 3^d *e* NG, &c. dont les deux premiers *a*^{d} E & B K ſont égaux en tout à ceux des Impoſtes de la Figure 274. marquez des Lettres *a* E, BN.

Si l'on joint les extremitez exterieures de ſes trapezes par une ligne courbe, on aura le développement du contour de l'Arête de la Doele, & de la face, telle eſt la ligne A 1^d, 2^d, 4^d B, & la ligne EQFGHI pour le développement du contour de la Doele de la face poſterieure qu'on ne ſuppoſe pas parallele à la premiere AKB qui eſt en Talud, mais à plomb ſur la ligne *d*N; ce qui fait que ces contours courbes du développement ſont inégaux, provenant de celui de deux Ellipſes inégales.

Pour éviter la confuſion de ce développement, on a coûtume de diſtinguer les Lits par une hachure laiſſant le développement de la Doele en blanc. La même Figure donnera le développement de l'Extrados ſi l'on joint par une ligne courbe les angles exterieurs des Lits comme *aee*, *b*^{d}, *oo*, mais non pas entierement dans ſes meſures, car il reſte au milieu un intervale *eo* qui eſt beaucoup plus grand que celui de la clef, parce que les Lits prennent leurs origines exterieures, partie d'un côté de la clef, partie de l'autre. Pour en faire un contour ſuivi, il faudroit les ranger tous de ſuite ſur un même côté, comme on a fait à la Figure 280. en tranſportant le point *a*^{d} en Æ, *c* en *e*, &c. alors on auroit une courbe d'Extrados qui croiſeroit celle de la Doele Æ 1e, 2e *oob*^{d}; ce qui n'eſt point uſité dans les Traits, n'étant d'aucune utilité.

Nous ne nous arrêterons pas davantage à l'explication de cette eſpece de deſſein, parce qu'on en trouvera pluſieurs exemples dans la conſtruction des Traits au IV. Livre, il ſuffit d'en avoir donné une bonne notion pour établir les princiqes de *l'Epure*.

Remarque ſur les Développemens compoſez.

Les Auteurs des Traitez de la coupe des Pierres ont accoûtumé d'accompagner preſque tous les Traits d'un développement des *Doeles* joints à ceux des *Lits* dans l'ordre que nous venons de l'expoſer. Ce genre de deſſein

deſſein n'eſt pas inutile dans les Traits en petit ſur le papier pour voir d'un coup d'œil la Figure & la grandeur des Panneaux de Lit & de Doele; mais comme il ſeroit trop incommode & de peu d'utilité de les tracer en grand dans toute l'étenduë de l'Epure, particulierement lorſque les voutes. ſont un peu grandes, on peut dire que cette pratique n'eſt pas neceſſaire pour l'exécution. Il ſuffit de ſçavoir faire les Panneaux de chacun des Lits en particulier ſans les aſſembler, ce qui cauſeroit infalliblement de la confuſion, lorſqu'il y a beaucoup de Lits plus larges que les Doeles, parce qu'ils croiſeroient les uns ſur les autres; c'eſt pourquoi nous n'avons pas imité ces Auteurs dans notre IV. Livre, pour ne pas multiplier les lignes inutiles, & donner trop d'étenduë aux Figures des Planches, où il ne s'en trouve déja que trop qui embaraſſent & fatiguent l'attention du Lecteur.

On trouvera peut-être une difference conſiderable entre le contour de ce développement de la Figure 280. & de celui de la Figure 272. mais ſi l'on y fait attention, elle n'eſt qu'apparente, parce qu'à cauſe de la double obliquité du Berceau de la Fig. 274. le point de Station ne ſe trouve pas au milieu du développement, comme à la Figure 272. provenant du Cylindre oblique 270. où l'on n'a conſideré qu'une ſeule obliquité de *biais*; pour s'en convaincre, il faut réduire la double obliquité du Berceau 274. en une ſeule, ce que l'on peut faire comme il ſuit.

On menera par le point *x* extremité de l'axe, une perpendiculaire *x* Y ſur AB, ſur laquelle on portera la diſtance du Talud VT de Y en *z*, ſi l'on tire du centre C la ligne C*z*, elle donnera la direction de la plus grande obliquité, qui réduit celle du biais CY, & celle du Talud YZ en une ſeule CZ, ce qui eſt clair.

Pour en concevoir la raiſon, il faut ſçavoir; 1.° Que l'axe d'un Cylindre ſcalene, de même que celui du Cône ſcalene, dont nous avons parlé, n'eſt pas incliné également à tous les diametres du cercle de ſa baſe; 2.° Que la ſection par l'axe faite par un plan perpendiculaire à celui de la baſe, forme le Parallelograme le plus oblique; 3.° Qu'une autre ſection perpendiculaire à celle-ci forme un Parallelograme rectangle, & par conſéquent que les autres ſections ſont des Parallelogrames plus ou moins obliques, ſelon qu'ils s'approchent ou s'éloignent de ces deux premiers; ainſi le Parallelograme ABFE n'étant pas dans un plan perpendiculaire au plan de la baſe *adb*, n'eſt pas le plus oblique de toutes les ſections par l'axe, c'eſt celui qui paſſe par C*z*, où eſt le plus grand biais; ce que l'on peut démontrer comme il ſuit. Pour éviter la confuſion des lignes dans la Figure, on tranſportera la longueur Y*z* en YZ, comme ſi, à talud ou plûtôt à pente égale, le Berceau étoit incliné en ſur-

plomb, & ayant tiré CZ, on lui menera la perpendiculaire Z8; enſuite ayant pris la longueur Cx de l'axe pour Rayon d'un arc 98, qui coupera Z8 au point 8, on tirera 8C, qui repreſentera la poſition de l'axe à l'égard d'un plan qui couperoit le Cylindre par l'axe, & le diametre 7Z, lequel repreſente, par notre ſuppoſition dans le changement de la Figure, celui qui paſſeroit par Cz. Il faut démontrer que l'angle 8CZ que fait l'axe avec ce diametre, eſt plus aigu que celui que ce même axe conſideré en Cx fait avec un autre diametre AB.

Les deux triangles CYz & CZ8 ſont tous deux rectangles, l'un en Y, l'autre en Z: ils ont tous deux une hypotenuſe égale [par la conſtruction C8 = Cz] & le côté Cz plus grand que CY; donc l'autre côté Z8 ſera plus petit que xY, par conſéquent l'angle oppoſé 8CZ, ſera plus petit que xCY; *ce qu'il falloit démontrer.*

D'ou il ſuit que le point de Station de la Courbe du développement qui repreſente le cercle de la baſe *adb*, ou *a*H*b* étant au point Z, comme nous l'avons dit de la Figure 272. les parties de cette Courbe ne ſont pas égales de part & d'autre du milieu, qui repreſente la clef, comme lorſqu'il n'y a qu'une ſeule obliquité de biais ſans Talud; mais elles pourront l'être ſi on les conſidere à égale diſtance du point de Station correſpondant au point z, où eſt la plus grande obliquité du Cylindre ſur ſa baſe.

Du Développement des Polyedres & de la Sphère.

Parmi les cinq Corps réguliers le Dodecaedre qui eſt compris par douze ſurfaces égales qui ſont des Pentagones, eſt le premier qui commence à approcher de la ſphère, enſuite l'Icoſaedre qui eſt compris par vingt triangles Equilateraux, eſt déja aſſez rond pour être propre à rouler comme une boule; mais on ne ſçauroit augmenter le nombre de ſes ſurfaces, & en conſerver l'égalité entr'elles; de ſorte qu'il n'eſt point de plus gros Polyedre régulier que l'on puiſſe comparer à la ſphère; mais il n'eſt pas difficile d'en faire d'irréguliers qui en approchent infiniment, car ſi l'on diviſe par la penſée un demi cercle en un Poligone d'une infinité de côté, la révolution qu'il fera ſur ſon diametre formera un ſolide, qui ſera compoſé d'une infinité de Cônes tronquez formez par la révolution des Cordes de ce demi cercle, qui ſont inclinées à ſon diametre, comme les côtez du Cône ſont inclinez à leur axe. Et ſi l'on diviſe les baſes de chacun de ces Cônes tronquez en Polygones, on aura des Pyramides tronquées inſcrites dans ces Cônes tronquez; de ſorte que leurs côtez feront autant de Trapezes qui viennent
Fig. 276. en ſe rétreciſſant vers les Poles, comme on voit à la Figure 276. & ſe

réduisent enfin en triangles aux deux Poles de la sphère, où les Pyramides sont entieres, comme 2P3.

L'ARRANGEMENT de cette suite de Trapezes qui forment une superficie de Polyedre comparable à celle de la sphère circonscrite, peut se faire de deux manieres, ou suivant les Meridiens, c'est-à-dire, les plans coupans la sphère par ses Poles, comme à la Figure 277. & alors les Trapezes de ces surfaces deviennent tous inégaux de part & d'autre de l'Equateur jusqu'au Pole P, où ils finissent par un triangle 2*p*2, & parce que cette Figure approche de celle d'un Fuseau à filer, on appelle ce développement de la sphère en *Fuseaux*. *Fig.* 277.

L'AUTRE maniere d'arrangement des Trapezes, dont nous faisons un plus grand usage, est suivant les paralleles à l'Equateur en forme de Zones, & alors tous les Trapezes égaux sont rangez de suite, comme à la Figure 278. où l'on suppose la circonference du parallele divisée en dix parties; en sorte que la Zone de cercle AB étant pliée, & le Trapeze A étant joint au Trapeze B par leur côté O 1, O 1, il se forme une Pyramide peu differente d'un Cône tronqué, dont le sommet est en S [*Fig.* 276.] parce que le point S est la rencontre de l'axe *x*S du Cône, & des Cordes O 1, 5 4 prolongées, lesquelles Cordes sont les côtez du Polygone inscrit dans les quarts de cercle C*o*P, C5P, dont la révolution a formé l'Hemisphère *o*P5; de sorte que si l'on prend la longueur S*o* pour Rayon, & que d'un centre *x* pris à volonté, on fait deux arcs de cercles concentriques *o*5O, 141 éloignez de l'intervale de la Corde O 1 de la Fig. 276. & que l'arc *o*5O soit fait égal à la circonference du cercle, qui a pour diametre *o*C5, & l'arc 141 égal à la circonference du cercle, qui a pour diametre 14, on aura le développement de la Pyramide tronquée *o*145 en dix Trapezes égaux, rangez sur une même Zone de sphère, ou plûtôt sur une portion de Couronne de cercle, comme on voit dans la Figure 278. la même chose se fera pour le Cône tronqué 1, 2, 3, 4 inscrit dans la sphère par la révolution de la Corde 1, 2 autour de l'axe S^2C, & l'on aura la portion de Couronne de cercle $1^a 4\ 1^b 2$, 3, 2, laquelle étant pliée en rond, faisant joindre les Trapezes *a* & *b* formera la Zone du Cône tronqué 1, 4, 3, 2 inscrit dans la sphère. Enfin, parce que la Corde 2 P aboutit au Pole P, elle décrira un Cône, dont le sommet sera en P, & dont le développement sera le secteur $2^a\ 3\ 2^b$, dont la circonference approchera beaucoup de celle du cercle entier, parce qu'elle doit être égale à celle du cercle qui a pour diametre 2, 3 de la Fig. 276. par où l'on voit que chacune des Couronnes de cercle doit contenir le même nombre de Trapezes, quoique leur circonference diminuë à mesure qu'on approche du Pole, parce qu'ils diminuent aussi de largeur. *Fig.* 278.

Remarques sur l'Usage de ce Développement.

L'on fait usage de tous ces arrangemens de développemens des Polyedres inscrits dans la sphère, soit en la réduisant simplement en Cônes tronquez, soit en subdivisant ces Cônes, & y inscrivant dans chacun une Pyramide tronquée, alors on range leurs surfaces qui sont des Trapezes sur les paralleles à l'Equateur de la sphère, comme à la Figure 278. en forme de Couronne de cercle, ou sur les Meridiens, comme à la Fig. 277. ce qui forme une Figure de Fuseaux.

L'on peut dire que ce principe est celui de la coupe de toutes les voutes sphériques faites par Panneaux.

Mais parce que les Cordes des premieres divisions en voussoirs à la naissance des voutes, comme *o* 1 donnent des lignes si peu inclinées à l'axe de la sphère, que le sommet du Cône formé par leur prolongation jusqu'à la rencontre de l'axe, est situé fort loin de sa base; il arrive que le Rayon qui sert à faire le développement du Cône tronqué devient extrêmement long & incommode pour tracer un arc de cercle; j'ai pourvû à cet inconvenient par le Problême suivant.

Probleme VIII.

Le Diametre AB de la base d'un Cône Droit tronqué, & l'inclinaison du côté EB sur ce Diametre étant donnez, trouver autant de points que l'on voudra à la circonference de la Couronne de cercle qui en exprime le Développement, sans en avoir le centre, ou ce qui est la même chose, le sommet du Cône.

Fig. 275. Soit [*Fig.* 275.] AB le diametre de la base inferieure du Cône tronqué, DE celui de la superieure, qui est donné par l'inclinaison du côté BE vers l'axe SC, lequel est perpendiculaire sur le milieu du diametre donné AB; & EB, DA les côtez qui sont partie de ceux du triangle par l'axe ASB, si l'on acheve le Cône en prolongeant ses côtez, CX sera une partie de l'axe CS.

Ayant pris à volonté le point F sur le côté EB, on menera FG parallele à XC, ou perpendiculaire à CB, & l'on divisera l'angle EFG en deux également par la ligne FL, à laquelle, par le point B, on menera la parallele BY, qui rencontrera XC prolongée en Y. Je dis que le point Y sera la circonference de la base de la Couronne de cercle qui donnera le développement du Cône tronqué.

De même ayant pris à volonté sur CB le point H, & mené par le Problême I. du III. Livre la ligne HN, laquelle étant prolongée con-

courre au même point S que la ligne BE; ſur cette ligne HN ayant pris un point K à volonté, & mené, comme ici-devant, KI parallele à SY, on diviſera de même l'angle NKI en deux également par la ligne MK, à laquelle par le point Y on menera la parallele Y*y*; le point *y* ſera à la même circonference que le point Y. On trouvera en répetant une pareille operation, autant de points que l'on voudra, dont on pourra placer les correſpondans entre YA, ſans le ſecours du centre ou ſommet S.

Ce que l'on dit de la baſe AB du Cône tronqué pourra s'appliquer à la baſe ſuperieure DE du même Cône.

Demonstration.

Soient prolongez les côtez BE, AD juſqu'à ce qu'ils concourrent au point S, où ſera le ſommet du Cône.

A cauſe des paralleles FG, SY les angles GFB, YSB ſont égaux entr'eux; & à cauſe des autres paralleles LF, YB, les alternes LFG, FGB, & XYB ſont auſſi égaux, de même que LFE & YBE; donc les triangles SYB, SYA ſont iſoſceles, donc SY peut être le Rayon du même cercle, que celui qui aura pour Rayon les côtez SB & SA, donc le point Y eſt à la circonference du cercle, *ce qu'il falloit démontrer.*

On démontrera de la même maniere que le triangle SY*y* eſt iſoſcele, par conſéquent que le point *y*, eſt à la circonference du même cercle, qui paſſera par B & par *y*, & qui aura pour Rayon la ligne SB ou SY; donc on pourra trouver autant de points que l'on voudra à cette circonference ſans le ſecours du centre, *ce qu'il falloit faire.*

Usage.

Ce Problême ſert à rendre praticables quelques Traits de la coupe des Pierres, que le P, Deran & M. de la Rue ont donné ſans rémedier aux inconveniens de la Pratique; par exemple, pour faire le développement de la baſe d'une Porte en Tour ronde, & en Talud, parce qu'une telle Tour eſt un Cône tronqué, dont le ſommet eſt très loin; car ſuppoſant qu'elle n'eût que trente pieds de diametre, & un ſixiéme de Talud, qui eſt un des plus grand qu'on leur donne, ſi elle eſt à trente pieds de haut, elle ne ſera rétraiſſie à ſon ſommet que de dix pieds; ſçavoir, cinq de chaque côté; ainſi les côtez du Trapeze par l'axe ne ſe rencontreront qu'à la hauteur de 90. pieds, laquelle ne ſera pas encore égale à la longueur du Rayon, qui eſt le côté du triangle par l'axe du Cône entier, puiſque cette hauteur eſt verticale, & que le côté eſt incliné à l'horiſon. Or une longueur de 93. pieds ou environ, demande une

grande place commode pour y tracer un arc avec une corde ou une chainette, qui ne peuvent donner un contour juste, à cause de leur extension qui varie, soit en s'alongeant, lorsqu'on tire plus ou moins, soit à cause du frotement sur une étenduë de surface aussi grande, sur laquelle il y a toûjours quelques inégalitez; cette longueur étant d'ailleurs trop considerable pour faire avec une perche un compas à verge, il en faudroit joindre plusieurs bout-à-bout, & les faire soûtenir par plusieurs hommes, qui se meuvent d'un mouvement de Rayon, chacun plus ou moins vite, comme il convient à leur distance du centre.

L'autre cas où ce Problême seroit encore très necessaire, est pour la formation des Panneaux de développement des Doeles, des premieres retombées des voussoirs des Voutes sphériques, dont les divisions du ceintre de hauteur sont d'un petit nombre de degrez de son contour; c'est-à-dire où il y a un grand nombre d'assises ou rangs de voussoirs; mais alors le moyen le plus court est de les tailler par supposition de Doeles plats, comme nous le dirons au IV. Livre.

Apre's avoir trouvé trois points de la circonference de la base du Cône tronqué, suivant ce Problême on peut prendre l'angle que font les lignes menées de l'un à l'autre, & par le Problême I. du II. Livre s'en servir pour tracer, par un mouvement continu, le segment du cercle, dans lesquels ils sont.

Du Développement des Helices.

Nous avons expliqué au II. Livre ce que nous entendons par le mot d'Helice. Il convient d'ajoûter ici qu'on peut en distinguer differentes especes, rélativement aux corps sur lesquels on peut les décrire.

Suivant ce sisteme, nous appellerons Helice *Cylindrique Droite*, celle qu'on pourra décrire sur la surface d'un Cylindre Droit; *Cylindrique scalene*, celle qui sera décrite sur un Cylindre de base Elliptique, ou incliné à sa base. Helice conique ou sphérique celle, qui sera décrite sur la surface d'un Cône ou d'une sphère; nous comprendrons ces deux dernieres sous le nom de Limace, parce qu'elles approchent de plus en plus de leur axe.

Nous diviserons encore les Helices Cylindriques en régulieres & irrégulieres.

Par le mot de *Réguliere*, nous entendons la Courbe qui s'éleve au dessus de sa base d'un mouvement oblique toûjours égal, sans s'approcher ni s'éloigner de l'axe, autour duquel elle fait des révolutions égales, comme une vis de Pressoir.

Par le mot d'irréguliere, nous entendons celle qui fait des révolutions inégales autour de ſon axe.

Cette inégalité de révolutions peut encore être conſiderée de deux manieres; 1.° En ce que la Courbe s'éloigne & s'approche de ſon axe, comme lorſqu'elle eſt à la ſurface d'un Cylindre de baſe Elliptique, ou de quelqu'autre Courbe qui rentre en elle-même; 2.° Ou en ce que l'intervale de la hauteur de ſes révolutions augmente ou diminuë.

Lemme.

Le Développement d'une Helice Cylindrique réguliere ſur la ſurface du Cylindre Droit développé, eſt une ligne Droite; celui des irrégulieres de la ſeconde eſpece, & des Limaces, eſt une ligne courbe.

La premiere partie de ce Theoreme eſt claire par la définition; car puiſque nous ſuppoſons le mouvement de l'Helice autour de ſon axe d'une obliquité toûjours égale ſur la ſurface d'un Cylindre, elle n'eſt pas plus inclinée en un endroit au plan de la baſe, qu'en un autre.

Pour rendre cette verité plus ſenſible, on doit conſiderer le Cylindre comme un Priſme d'une infinité de côté, dont le développement forme un Parallelograme rectangle, ſi le Cylindre eſt droit, lequel Parallelograme eſt compoſé de tous les petits rectangles infiniment étroits, qui enveloppent le Priſme, parce que les parties priſes enſemble ſont égales à leur tout.

Soit, par exemple, [*Fig.* 281.] une demi-révolution d'Helice A*h* ſur le Cylindre AE, dont la moitié de la baſe eſt le demi cercle A 1 2B, ayant rectifié ſon contour en une ligne Droite AK ſur le diametre BA prolongé; ſi l'on diviſe cette ligne en parties égales, par exemple, ici en trois, & la hauteur de la demi-révolution B*h*, ou ſon égale AI, auſſi en trois parties égales, & qu'on méne par chacune de ſes diviſions des paralleles aux côtez AK & AI; il ſe formera neuf rectangles égaux entr'eux, & ſemblables au grand AH, qui exprime le développement de la moitié du Cylindre, dont la Diagonale eſt commune à celles des petits A*y*, *yx* & *x*H, leſquelles expriment chacune l'obliquité de l'Helice qui ne change point, ſuivant la définition. Or la Diagonale AH eſt une ligne Droite, par conſéquent la ſomme ou l'addition de toutes les parties de l'Helice infiniment petites rangées ſur la ſurface du Cylindre développé, forme une ligne Droite; *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 281.

La démonſtration de la ſeconde partie de ce Theoreme ſuit naturellement de la premiere; car ſi les révolutions ſe font d'un mouvement inégal en direction d'inclinaiſon qui augmente ou diminuë les intervales

de chaque révolution, les contours & les hauteurs n'étant plus proportionels, les petits Parallelogrames ne seront plus semblables au grand A 6, *Fig.* 282. qu'on peut considerer comme un développement de Cylindre, & par conséquent que sa Diagonale ne sera plus commune à celles des petits, infiniment petits, lesquelles faisant aussi par la supposition des angles inégaux avec la base AB, où ses paralleles 1 *x*, 2 *y*, 3 *z* feront aussi des angles eutr'elles, & par conséquent seront rangées en ligne courbe; *ce qu'il falloit secondement démontrer.*

Corollaire I.

D'ou il suit qu'autour du même Cylindre, on peut former une infinité d'Helices differentes, dont les développemens seront toûjours des lignes courbes, soit que le Cylindre soit droit ou scalene; car les révolutions peuvent augmenter ou diminuer en hauteur, suivant telle progression que l'on jugera à propos, ou laissant les hauteurs égales, on peut augmenter ou diminuer la vitesse du mouvement parallele à la base; ce qui est representé à la Fig. 282. par la difference des longueurs des Parallelogrames AK, K*l*, *lm*, *mn*, &c.

Corollaire II.

Secondement, que le développement d'une Helice Cylindrique scalene, quoique réguliere sera encore une ligne courbe, parce que le développement de la base du Cylindre scalene n'étant pas une ligne droite, comme celle du contour de la base du Cylindre Droit, mais une Courbe comme on voit à la Figure 272. il suit que les divisions qui donnoient des Parallelogrames sur le développement de sa surface, en tirant des paralleles à la base & à la hauteur, ne donneront pas des Figures rectilignes, mais des quadrilignes mixtes, dont les paralleles à la base seront courbes, & leurs Diagonales de même, mais un peu moins en ce qu'elles participent de la courbure parallele à la base, & de la ligne droite du côté parallele à l'axe; c'est pourquoi nous demandons pour le développement en ligne droite, que le Cylindre soit Droit sur sa base. Je n'ai point ajoûté dans l'exposé du Theoreme, que la base fut Circulaire ou Elliptique, parce que de quelque courbe qu'elle soit, il est toûjours évident que si l'axe du Cylindre est perpendiculaire au plan de la base, le développement de la surface Cylindrique sera toûjours un Parallelograme rectangle, qui pourra être divisé en une infinité d'autres semblables, comme AH de la Figure 281. par conséquent, dont la Diagonale sera le développement d'une Helice.

Corollaire III.

De ce que nous venons de dire au Corollaire précedent, on tire naturellement la démonſtration de la troiſiéme partie du Theoreme, qui dit que les développemens des Helices en Limaces ſont toûjours des lignes courbes, ſoient qu'elles ſoient coniques, conoïdes, ſphériques ou ſphéroïdes ; car toutes ces Figures ne pouvant être développées qu'en les prenant par parties de Cônes tronquez inſcrits dans leur ſurface, & les développemens des Courbes quelconques tracées ſur la ſurface du Cône développée étant neceſſairement des lignes courbes, comme nous l'avons démontré aux Figures 266. & 267. il eſt évident que toutes les eſpeces de Limaces qu'on y pourra décrire, étant développées ſur la ſurface du Cône, ſeront des lignes courbes, parce qu'en diviſant le contour du Cône développé en parties égales, & la hauteur de même, on aura au lieu de Parallelogrames mixtes, comme nous venons de le dire ſur le Cône ſcalene, des Trapezes mixtes, dont les petites parties de l'Helice ſeront les Diagonales, participant de la courbure du cercle de la baſe développée ſur le Cône, & de la Droite qui eſt le côté du Cône.

Probleme IX.

Faire le Développement d'une Helice quelconque ſur une Surface Cylindrique ou Conique développée.

Premierement, ſi l'Helice eſt cylindrique réguliere, ce développement eſt très facile, puiſqu'il ne conſiſte qu'à trouver les extremitez d'une ligne Droite.

Soit [*Fig.* 281.] une Helice A*b*GE qui fait une révolution & demie autour du Cylindre droit DB, on rectifiera le contour du cercle de ſa baſe, qu'on portera une fois & demi ſur le diametre AB prolongé en A^2, ou ce qui eſt la même choſe, on prendra trois fois le contour du demi cercle A 1 2 B de B en A^2, & par le ſommet du Cylindre E, on tirera au point A^2 la ligne Droite EA^2, qui ſera le développement demandé.

Il eſt viſible que ſi on n'avoit propoſé que celui d'une demi-révolution, on auroit tiré *ba* du point *b*, tiers de la hauteur BE au point a, qui eſt à diſtance de B, de la longueur de l'arc A 1 2B développé.

Si on avoit demandé une révolution entiere, la ligne F*b* y auroit ſatisfait ; d'où on peut inferer, 1.° comment on doit faire le développement de telle partie qu'on voudra; 2.° que ſi l'on enveloppe le Cylindre d'un triangle iſoſcele comme AHG, il y tracera deux Helices qui ſe croiſeront en *b*.

SECONDEMENT, si l'Helice est cylindrique irréguliere ou conique; ayant rectifié le contour de la base, auquel elle répond, on divisera la hauteur de chaque révolution en parties proportionelles à la difference qui regne de l'une à l'autre, en croissant ou en diminuant, & l'on divisera le développement du contour de la base en un même nombre de parties égales, qu'on a divisé la hauteur de révolution, que nous avons supposé inégales, puis on menera par chaque division des paralleles à la base, qui seront droites, au Cylindre Droit, & courbes au Cylindre scalene, lesquelles seront croisées par des lignes droites, paralleles à l'axe dans le Cylindre, & tendant au sommet dans le Cône, la ligne courbe menée d'une intersection à la suivante en Diagonale sera le développement de l'Helice demandée.

LA même chose se fera pour avoir le développement de l'Helice en Limace sur un cône. Mais si la Limace comme une Loxodromie sur une sphère, étoit proposée à développer, on ne le pourroit sans interruption; parce que la sphère ne pouvant être développée que des deux manieres, dont nous avons parlé, ou comme à la Figure 277. en Fuseaux; ou comme à la Figure 278. en portions de couronnes de cercle, qui laissent des intervales entr'elles, encore plus grand que les Fuseaux; on ne pourroit avoir le développement de l'Helice en Limace, que par petites parties qui feroient les Diagonales des Trapezes mixtes formez dans differentes Zones coniques inscrites à la surface de la sphère.

VOILA ce me semble les principales Régles pour faire les *Plans*, Profils, Elevations & Développemens des corps comparables aux voutes usuelles; il nous reste à faire voir de quel usage elles sont pour leur construction, c'est ce que nous allons montrer par deux Problémes Generaux.

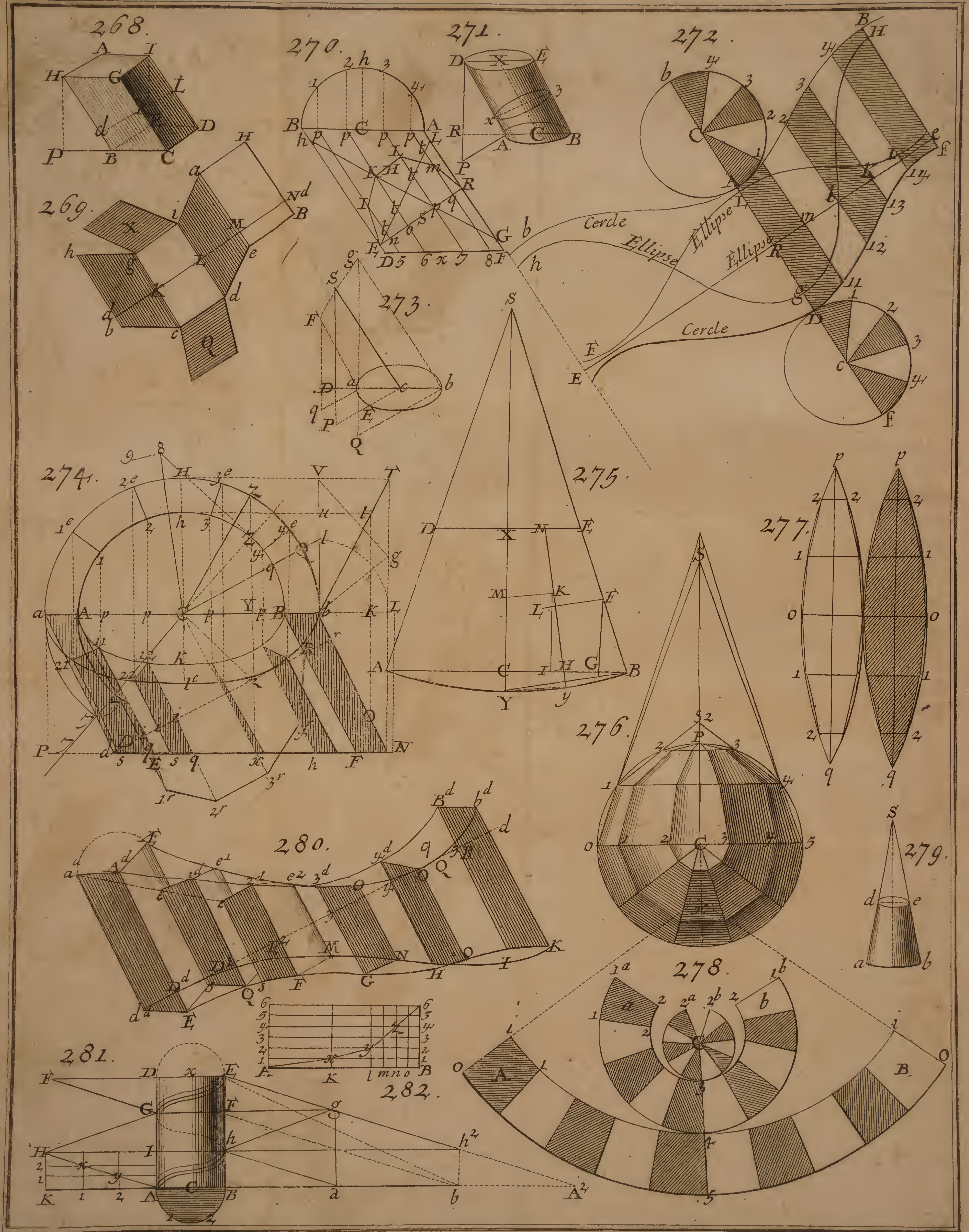
PROBLEME X.

Les Elevations de deux Faces opposées dans des Plans paralleles entr'eux, étant données en projection sur un même Plan vertical, & la projection Horisontale de leurs intervales étant donnée, trouver la Figure de chaque partie de Développement des Surfaces d'une voute divisée en plusieurs Voussoirs, tant apparente, qu'interieure.

En termes de l'Art.

UNE double élevation de face anterieure & posterieure, le Plan & le Profil d'une voute réguliere étant donnez, *trouver les panneaux de Lits, de Doele & de Tête.*

SI les faces opposées de l'entrée & de la sortie d'une voute, sont


268.
269.
270.
271.
272.
273.
274.
275.
276.
277.
278.
279.
280.
281.
282.
Cercle
Ellipse
Ellipse
Ellipse
Cercle

égales & perpendiculaires à une même direction; il est évident qu'elles seront confonduës dans l'élevation qui sera réduite à un même ceintre Circulaire, Elliptique surhaussé ou surbaissé, telles sont les deux faces d'un Berceau droit, projettées sur un même Plan vertical; alors une seule élevation est équivalente à deux; sçavoir, à l'anterieure & à la posterieure, si les faces sont inégales, ou inégalement situées à l'égard du plan Horisontal, comme sont celles des descentes, dont l'une est plus haute que l'autre, ou inégalement situées à l'égard du plan vertical, comme dans les voutes biaises, ou qu'elles participent de l'un & de l'autre, comme les descentes biaises, l'élevation commune aux deux faces sera exprimée par des contours differens qui se croiseront, ou qui ne seront paralleles que dans les voutes coniques droites, quoique les Cordes de leurs arcs correspondans aux mêmes divisions puissent être paralleles, mais soit que les contours soient paralleles ou non; s'ils sont tracez par la même projection verticale sur un même Plan, ils conserveront toûjours un certain rapport de distance entr'eux, qui servira à trouver tous les côtez des surfaces planes qui terminent les parties de la voute divisée en ses voussoirs.

Pour faire voir l'étenduë, & pour ainsi dire la generalité de ce Problême, nous choisirons deux exemples de voutes coniques, l'une droite, l'autre oblique, lesquels étant bien entendus, serviront à la construction de toutes les voutes. Premierement à celle des Cylindres qui sont plus simples, & plus faciles que les coniques; secondement aux coniques, dont ils exposent toutes les difficultez, & en troisiéme lieu, aux sphériques, lesquelles doivent être réduites, ou en portions de Cônes tronquez, ou en Polyedres, qui sont plusieurs parties de Pyramides tronquées, dont nous donnons ici les exemples par la réduction des Cônes en Pyramide.

Premier exemple des Voutes Coniques droites.

Soient [*Fig.* 283.] les deux ceintres de face pris à la Doele BLD exterieur, GKH interieur, que nous appellons face anterieure & posterieure, réunis par la même projection sur un même plan avec leurs Extrados ALE & FKI, décris du même centre C. Ayant divisé ces ceintres en leurs voussoirs, par exemple en cinq *q* aux points 1, 2, 3, 4, & tiré les joins de Tête par ces points du centre C, 1 : 5, 2: 6, 3: 7, 4: 8, on fera la projection horisontale de la voute & de ses joins de Lit, suivant les Régles ordinaires, laquelle sera le Trapeze *afie*, dans lequel les deux Parallelogrames *afgb* & *dhie* seront les surfaces Horisontales des Piedroits à l'Imposte, dans leurs justes mesures; il n'en sera pas de même des autres lignes qui sont la projection des joins de Lit elles se- Plan. 24. *Fig.* 283.

ront plus courtes que ces joins, parce qu'elle eſt horiſontale, & que ces joins ſont inclinez à l'horiſon dans le même plan vertical.

Il faut commencer par chercher la veritable longueur des joins de Lit, parce qu'ils ſont les côtez communs aux portions des ſurfaces de la Doele, & aux ſurfaces des Lits. Ce qui ſe fait par des Profils particuliers qu'on peut faire de differentes façons, qui donnent toûjours la même longueur, on peut choiſir la plus commode.

Premierement, on peut élever ſur la projection horiſontale d'un joint de Lit donnée comme $1p^1$ un plan vertical de toute la hauteur du vuide qui eſt entre la projection ſur le plan horiſontal & le veritable joint, ainſi on élevera ſur la ligne $1p^1$ au point 1 une perpendiculaire 1 T, égale à la hauteur $1t$, de l'élevation qui eſt celle de la *Retombée*, & au point p^1 la perpendiculaire p^1V égale à celle de la retombée oe^1, la ligne VT ſera le Profil & la veritable longueur du joint de Lit, dont $1p^1$ eſt la projection.

Secondement, on peut faire le même Profil en ſupprimant la hauteur de la retombée du point le plus bas, par exemple, 2 du joint de Lit, dont la projection verticale eſt la ligne $2\bar{e}^2$, & mettant ſeulement à un des bouts $\bar{p}^2$ de la projection horiſontale $2\bar{p}^2$ la hauteur $\bar{e}^2n$ au deſſus du point 2, qu'on portera de $\bar{p}^2$ en 2e perpendiculairement à la projection horiſontale donnée $\bar{p}^2 2$.

Troisie'mement, on peut faire le même Profil, en tranſportant toutes les hauteurs par des lignes paralleles à la baſe AE de l'élevation, ſur une ligne qui lui ſoit perpendiculaire comme fL, fC, que toutes les paralleles menées par les points 2 & 1 de l'élevation de la face poſterieure, & e^1, e^2 de la face anterieure, couperont en des points f^2, f^1, u qui donneront les hauteurs ſuperieures & inferieures des joins de Lit, dont il ſera facile de trouver les inclinaiſons, en portant ſur ces paralleles les projections horiſontales données, par exemple, $1p^1$ en $u41$, & $2p^2$ en $f^1 3^2$, les lignes inclinées menées par les points 4^1, f^1, 32, f^2, feront les Profils & les vraies longueurs des joins de Lit.

Il faut remarquer que ſi la voute eſt portion d'un Cône Droit tronqué, dont les faces anterieure & poſterieure ſont paralleles entr'elles, comme dans cette exemple, il eſt inutile de faire des Profils pour trouver les longueurs des joins; parce qu'en ce cas ces joins ſont tous égaux à ceux des Impoſtes, comme ici à bg ou hd; ainſi dans cette derniere conſtruction de Profil, par le moyen des paralleles à la baſe AE, il ſuffira de prendre la longueur gb d'un point à l'Impoſte avec un com-

pas, & des points f^1 & f^2 pour centres, faisant des arcs de cercle, qui couperont les paralleles 1 *u* & 2 f^1 prolongées, aux points 41, 32, on aura les mêmes longueurs, que par la maniere précedente; mais si la voute est biaise, c'est-à-dire, portion d'un Cône scalene, on ne peut les trouver que [comme on vient de le dire] en portant les longueurs de la projection horisontale sur les paralleles correspondantes.

Les longueurs des lignes inclinées aux plans des élevations des faces anterieures & posterieures étant trouvées, la résolution du Problême ne consiste *qu'à faire des triangles rectangles, dont une jambe est donnée par l'élevation, & dont l'hypotenuse trouvée, doit être adaptée à l'autre jambe inconnuë* par une section d'arc de cercle qui en est le *lieu*, & qui en détermine la position; ce qu'on concevra mieux par des exemples.

Pour former un panneau de Doele plate par exemple, du second voussoir, laquelle est marquée dans l'élevation par le Trapeze 1. *e*1. *e*2. 2. ayant tiré la Corde 1, 2; on la prolongera de part & d'autre vers *y* & vers *z*, & des points de division de la face anterieure *e*1 & *e*2, on abaissera sur cette Corde les perpendiculaires *e*1 *y* & *e*2 *z*, ensuite on transportera à part où l'on voudra la ligne *y*, *z* par exemple, ici à la Fig. 284. & ayant élevé aux points *y* & *z* deux perpendiculaires indéfinies *y* 21, *z* 22, on prendra la longueur d'un des joins de Lit, comme *bg* ou *dh* ou au Profil 41, *f*1, ou 32, *f*2; car toutes ces lignes sont égales, parce que le Cône est Droit; mais s'il ne l'étoit pas on prendroit la longueur de la ligne 41, *f*1, & du point 1 pour centre, on fera l'arc 8^{21}, qui couperoit la ligne *y* 21 au point 21, & ensuite la longueur de la ligne 22, *f*2, & du point 2 de la Fig. 284. pour centre on fera l'arc de cercle 9 22, qui coupera la perpendiculaire *z* 21 au point 22; enfin par les points trouvez, on tirera les lignes 21 1, 21 22, 22 2, & l'on aura le panneau de la seconde Doele representée au plan horisontal par le Trapeze, 1 p^1, p^2 2, & à l'élevation par 1 *e*1, *e*2 2; il en faudroit faire autant pour les autres Doeles, si elles n'étoient pas égales, comme elles sont dans le cas present. *Fig.* 284.

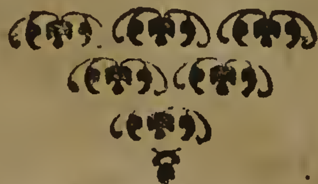
A l'égard des panneaux de Lit, puisqu'ils sont tous égaux à ceux de l'Imposte *afgb* ou *dhie*, il est inutile de les chercher, on verra dans l'exemple suivant la maniere de les trouver, lorsqu'ils sont inégaux.

Il reste à faire voir comment on peut appliquer cette méthode aux voutes, dont les faces sont inclinées aux plans verticaux, sur lesquels on doit faire l'élevation, comme par exemple, s'il s'agissoit d'une voute *sur le Coin* ou *dans l'angle*, dont le plan horisontal seroit *amd*, *o*M*z*, ou composée de deux portions droites, comme *am* & *o*M, ou de deux arcs de cercle, comme M*z* & *md*.

Il faut par le Chapitre IV. de ce III. Livre circonſcrire à la Figure irréguliere du plan horiſontal un Trapeze *afie*, dont les côtez oppoſez *ae* & *fi* ſoient paralleles entr'eux, & operer comme ſi la voute étoit réguliere, ſuivant ce que nous venons de dire, pour trouver les panneaux réguliers des Lits & des Doeles, & retrancher de leurs côtez ce que la projection horiſontale du plan irrégulier retranche des parties du régulier, ſuivant la Régle que nous avons donné.

Fig. 283. & 284. Ayant donc fait le panneau de Doele de la voute Conique réguliere 21, 22, 2 1, [*Fig.* 284.] pour le ſecond vouſſoir, on élevera des perpendiculaires ſur les points *s*, *q*, *r*, *t*, où les projections des joins de Lit 1*p*1, 2*p*2 ſont coupées par celles des faces *o*M, *am*, leſquelles perpendiculaires *q*Q, *s*S, *r*R, *t*T, couperont les Profils VT & 2*e* 2 aux points QS & RT qui donneront les excès VS, QT, 2*e*T, R2 des côtez du panneau de Doele réguliere ſur l'inſcrite irréguliere; ainſi on portera la longueur VS en S 21 de la Fig. 284. Q1 en Q1 de la même Figure, 2R en 2R, T 2*e* en T 22, & par les points trouvez STQR, on tirera des lignes droites ST, QR, qui formeront le Trapezoïde QSTR, lequel ſera le panneau de Doele du ſecond vouſſoir de la voute Conique biaiſe ou dans un angle, ſuivant qu'elle eſt déſignée dans la projection horiſontale de la moitié *ao*M*m*, ou P*p*M*m*.

On en feroit autant pour la voute Ebraſée, qui ſeroit dans une Tour ronde, dont la projection eſt déſignée par ſa moitié MY*dm*. La ſeule difference qu'il y auroit, c'eſt qu'au lieu des lignes droites ST, QR que nous avons tiré au panneau de Doele, *Fig.* 284. pour les faces anterieures & poſterieures; il faudroit tirer des portions de ces Courbes, qui ne ſont pas planes, c'eſt-à-dire, qui ne peuvent être décrites dans un plan, deſquelles on pourroit approcher par la circonſcription d'un Polygone dans le cercle de la projection de la Tour ronde & creuſe; mais parce que nous devons donner ce Trait dans le Livre ſuivant, nous ne nous étendrons pas davantage ſur cette difficulté, il ne s'agit ici que de donner une méthode generale pour tous les Polyedres, ſans entrer dans le développement des Corps ronds Cylindriques, Sphériques ou Coniques conſiderez comme tels, mais ſeulement comme compris & enveloppez par un grand nombre de ſurfaces planes inſcrites dans les Courbes convexes, ou circonſcrites aux convexes.



Second exemple des Voutes Coniques, Scalenes à double Obliquité,

Comme en termes de l'Art.

Descente Biaise Ebrasée en Canoniere.

Soit [*Fig.* 285.] le Ceintre de face anterieure à l'Aréte de la Doele G F *g*, & celui de la face posterieure I E 9, avec leurs Extrados A B *b*, & H D *z* divisez en leurs voussoirs L R 3 4 & P S 7 8 projettez sur la méme surface verticale, ce que nous pouvons supposer comme fait, & donné, suivant l'énoncé du Problême; mais parce que la construction de cette projection est la méme que celle de la solution du Problême, pour trouver chaque surface des Voussoirs en particulier, il est à propos de la mettre ici tout au long pour rendre la chose plus facile à comprendre; parce que la construction tient lieu d'explication.

Soit le Trapeze *a b z y* le plan horisontal de la voute Æ *x* la projection de son axe ou ligne du milieu C c^2, p^1, l^1 la projection horisontale du joint de Lit L P, S^2 R^2, celle du Lit R S; nous ne prendrons que cette moitié de voute pour éviter la multiplicité des lignes dans la Figure.

On commencera par tirer du point X une perpendiculaire X C sur A Æ *z*, & ayant porté sur la même A Æ la hauteur Æ c^2 de la descente ou montée; c'est-à-dire, de la difference du niveau de la face anterieure A Æ, & de la posterieure H c^2, du point C pour centre & des intervales C G, C A ou X C *p*, X *a*, on décrira les cercles concentriques G F *g* & A B *b*, l'un pour la Doele, l'autre pour l'Extrados de la face anterieure. Ensuite par le point c^2 ayant mené H 2 parallele à A *b*, du point c^2 pour centre, & pour Rayons les longueurs Æ *i*, Æ *h*, on décrira les deux cercles concentriques I E 9, H D Z, l'un pour la Doele, l'autre pour l'Extrados de la face posterieure, laquelle sera ainsi projettée sur le même plan vertical que l'anterieure. Ensuite ayant divisé ces ceintres en nombre de voussoirs égaux, par exemple en 5 aux points L R 3 4 & P S 7 8, on joindra les points correspondans par des lignes droites, qui exprimeront sur l'élevation les joins de Lit, telles sont G I pour celui de l'Imposte L P pour le premier au dessus, & R S pour le second.

On tirera aussi à l'ordinaire les joins de tête L *m*, R *t*, de leur centre C, de même que P *q* & S T de leur centre c_2.

Cette préparation étant faite, il sera aisé de trouver tous les côtez des surfaces, qui comprennent chaque voussoir.

Premierement pour les panneaux de Tête, il n'y à point de difficulté, ils se prendront sur les élevations. Par exemple, ceux du second

voussoir seront les portions de Couronnes de cercles *m* L R *t* pour la face anterieure, & *q* P S T pour la face posterieure.

Secondement, pour les panneaux de Lit, par exemple, pour le premier à l'Imposte marqué au plan horisontal par le Parallelograme *abi* G *p*, & à l'élevation par le Parallelograme AHIG, on commencera par en chercher la veritable longueur par le Profil, comme nous l'avons dit à l'exemple précedent, parce que les côtez AH & GI de l'élevation ou projection verticale sont trop courts, puisqu'ils le sont encore plus que ceux de l'horisontale A *bi* G *p*, laquelle est plus racourcie que la descente qu'elle represente. Pour y parvenir, on y élevera une verticale ÆE sur la base horisontale AÆ où l'on voudra. Nous faisons ici servir la ligne du milieu de la face posterieure, ensuite menant des paralleles indéfinies à cette base par les points de division des Doeles LP, RS, qui couperont la verticale aux points 1, *p*, 2, *s*.

On portera sur les lignes provenant des joins inferieurs LR, comme L *l*, R *r*, les projections des joins de Lit; sçavoir, *i* G *p* en Æ *z*, p^1, l^1, en 1 *l*, S^2 R^2 en 2 *r*, & par les points trouvez *z*, *l*, *r*, on tirera les inclinées *z* c^2, *lp*, *rs* qui seront les veritables longueurs des joints de Lit. Si l'on avoit un grand nombre de ces joins, on pourroit trouver tous les points des bases intermediaires, en faisant seulement Æ *z* égal à *i* G *p*, & E *e* égal à ÆX, en tirant la ligne *ze*, elle couperoit toutes les bases aux points *l* & *r*, qui se trouveroient entre deux; ce qu'il est facile d'appercevoir par la seule inspection du plan horisontal, où elles sont comprises & terminées par deux lignes droites *i* Æ, G *p* X.

Apre's avoir trouvé, par les Profils, les lignes inclinées qui sont égales aux joins de Lit, il ne s'agit plus que de les adapter aux triangles rectangles, dont elles doivent être les hypotenuses, pour trouver les angles qu'elles font avec les joins de Tête.

On prolongera les joins de Tête du petit ceintre du côté de ceux du grand ou au dehors comme P *q* en *n*, ou au dedans comme TS en V, & par les points *m* & L, *t* & R des divisions de la face anterieure, on tirera aux joins prolongez des perpendiculaires *mn*, LN, *tu*, RV qui formeront plusieurs rectangles, dont cette construction donnera un côté dans sa juste mesure; sçavoir, celui qui sera sur le joint de Tête prolongé, les autres deux côtez demeurant raccourcis par la projection; mais parce qu'on a déja trouvé la valeur de l'hypotenuse par le Profil, on a de quoi achever les triangles que ceux de la projection representent, comme on le verra dans les exemples.

Pour le premier joint de Lit, qui est celui de l'Imposte, on transportera

portera la ligne *i* A ou ſon égale IQ avec ces diviſions H & *o* où l'on voudra, comme à la Figure 288. en *ih*, *o*Q, & l'on tirera les perpendiculaires indéfinies Q*x*, *ou* par les points *o* & Q, enſuite des points *h* & *i* pour centres, & de l'intervale *c* ^{z} *z* du Profil, on fera deux arcs de cercle qui couperont ces perpendiculaires aux points *x* & *u*, par leſquels ayant tiré les lignes droites *xh*, *ui* & *xu*, on aura le Parallelograme *xhiu* pour le premier Lit de l'Impoſte, lequel eſt non ſeulement plus grand que celui de la projection horiſontale *abi*G*p*, mais encore inégal dans ſes angles qui ſont un peu moins aigus, comme il paroît dans cette Figure, où celui de la projection horiſontale eſt ponctué en *h a* ^{1} *g* ^{1} *i*.

Le ſecond & le troiſiéme panneau de Lit ſe trou veront de même en changeant les triangles rectangles *mn*R, LNP, *tu*T, RVS, en d'autres triangles rectangles plus alongez ſur les mêmes baſes *n*R, NP, *u*T, VS. Par le moyen des hypotenuſes trouvées *pl*, S*r*, ainſi ayant tranſporté où l'on voudra la ligne P*n* avec ſes diviſions N*q*, comme à la Figure 286. on lui fera les perpendiculaires *n*M, NL, & des points *q* & *p* pour centres & de l'intervale *p l*, pris au Profil, on fera des arcs de cercle en M & en L qui couperont ces perpendiculaires aux points M & L, par leſquels on fera paſſer des lignes droites qui ſont les côtez du Parallelograme M*qp*L, lequel ſera égal à la ſurface du ſecond Lit marqué dans l'élevation par le Parallelograme raccourci *mq*PL.

La Figure 287. fait auſſi voir le troiſiéme Lit formé ſur la baſe VS*u*T tranſportée pour établir deſſus un Parallelograme plus alongé que celui de l'élevation *t*TSR, ſuivant les mêmes Régles de décompoſition de la projection.

Il ne reſte plus à preſent qu'à trouver les ſurfaces des panneaux de Doeles plates qui doivent paſſer par les Cordes des arcs des diviſions des ceintres de face anterieure & poſterieure ; ce qui ſe fera de la même maniere, dont on s'eſt ſervi pour trouver les Lits en abaiſſant des perpendiculaires ſur ces Cordes prolongées, s'il le faut, par les diviſions du ceintre oppoſé.

Par exemple, pour trouver la Doele plate du premier vouſſoir marquée dans la projection horiſontale par le Trapeze G*p i*, *p* ^{1}, *l* ^{1}, & à l'élevation par le Trapeze GIPL, ayant tiré la Corde I*p* de l'arc poſterieur I*p*, on abaiſſera du point L de la diviſion de l'arc anterieur ſur cette Corde la perpendiculaire LK. On tranſportera enſuite où l'on voudra la Corde PI avec la diviſion K, comme en I ^{d} *kp* au deſſus de la Fig. 288. & on élevera ſur le point *k* la perpendiculaire indéfinie *k* ^{2} *l* ; enſuite du point *p* pour centre, & de l'intervale *pl* pris au Profil, de l'autre côté on décrira un arc qui coupera la perpendiculaire *k* ^{2} *l* au point ^{2} *l*. Enſuite des points ^{2} *l*

& I^d pour centres, & de l'intervale de la Corde LG & du joint de Lit c^2z, on fera une interfection d'arcs qui fe couperont au point ^2G, duquel ayant tiré les lignes $^2G\,^2l$, $^2G\,I^d$, on aura le trapezoïde $^2G\,^2l$, $_2p\,I^d$ qui fera la furface de la Doele plate du premier vouffoir, laquelle doit couvrir la portion concave du Cône GLPI, & toucher fes quatre angles.

Pour avoir la feconde Doele plate marquée au plan par p_1, S_2, R_2, l^1 & à l'élevation par le Trapeze LRSP on prolongera la Corde SP vers x, & du point R on abaiffera la perpendiculaire Rx, enfuite ayant tranfporté à volonté la ligne Sx avec fa divifion P, comme à la Figure précedente, on élevera fur l'extremité x une perpendiculaire indéfinie $x\,_2r$, à laquelle on a adaptera la ligne du joint de Lit sr, prife au Profil. Avec cette ligne prife pour Rayon & du point $_2S$ pour centre on décrira un arc qui coupera $x\,^2r$ au point $_2r$, duquel comme centre & de l'intervale de la Corde RL, on fera un arc de cercle ^3ly; de même du point ^2p pour centre & de l'intervale du joint de Lit pris au Profil en pl, on décrira un arc de cercle qui coupera le précedent ^3ly au point ^3l, par lequel ayant tiré les lignes $^3l\,_2r$, $^3l\,_2p$, on aura le trapezoïde ^3l, ^2r, $_2s$, ^2p, qui fera le panneau de Doele plate, propre à couvrir la portion concave du Cône que comprend le fecond vouffoir, ainfi des autres.

Ou il faut obferver que pour avoir les longueurs des joints de Lit de l'autre moitié de voute FE$9g$, dont la projection horifontale eft Æio, g X, il faut faire de nouveaux Profils, parce que les lignes 23, 33; 24 34 10gp & zy, que nous fuppofons être les projections des joins de Lit, font toutes inégales, & parce que leurs hauteurs feront toûjours les mêmes que celles de l'autre moitié, fi les Lits correfpondans font de niveau, il fuit qu'elles feront plus inclinées, & par conféquent plus courtes que celles qui leur correfpondent dans l'autre moitié de la voute; ce qui eft évident par la feule infpection du plan horifontal; puifque la ligne zy approchant plus de la perpendiculaire CX, que ah de l'autre Impofte, elle fera plus courte, & toutes les projections des Lits entre les deux Impoftes, feront inégales, plus courtes vers y, & plus longues vers a; ce qui n'arriroit pas à la Fig. 283. où elles font égales, à diftances égales de l'axe du Cône qui eft Droit.

Il faut remarquer que fi les deux ceintres de faces oppofées, n'étoient pas de même nature, que l'un fut Circulaire, & l'autre Elliptique, ou l'un furbaiffé, & l'autre furhauffé, l'on ne pourroit trouver une Doele plate, dont les quatre angles touchaffent les quatre coins du vouffoirs, qui feroit portion de ce Cône irrégulier; mais parce que nous ne traitons ici que des Figures régulieres, cette exception n'empêche pas que le Problême ne foit géneral, parce qu'alors la Doele plate, au lieu d'être pla-

ne quadrilatere, seroit composé de deux triangles qui seroient dans differends plans; nous donnerons au Livre suivant la maniere de remedier à ces irrégularitez.

DEMONSTRATION.

Il est visible par la construction de ce Problême que nous réduisons toutes les surfaces planes, qui comprennent le solide appellé *voussoir*, en triangles, la plûpart rectangles, dont nous trouvons un côté sur les élevations projettées & rassemblées sur un même plan vertical, par le moyen de la perpendiculaire, que nous abaissons d'un des angles de cette surface, sur le côté opposé, prolongé, s'il le faut. Nous avons trouvé l'hypotenuse suivant les régles du profil par un autre triangle rectangle, dont la projection horisontale nous donne un côté, la hauteur de l'extrémité supérieure de la ligne inclinée donne l'autre; ayant les deux jambes d'un triangle rectangle on a facilement l'hypotenuse, qui exprime la descente; or la même est commune à un autre triangle rectangle dont nous ne connoissons qu'un côté par ce Problême, sçavoir la distance des points de division des joints de tête correspondant dans les faces anterieure & posterieure; mais parce qu'un côté & l'hypotenuse suffisent pour trouver le troisiéme côté, dont l'angle droit détermine la position & l'hypotenuse la longueur, l'arc de cercle dont elle est le rayon est le *Lieu* du sommet de l'angle qu'il doit faire avec son hypotenuse: enfin connoissant les côtez des deux triangles rectangles, & les distances de leurs hypotenuses paralleles, nous avons formé le quadrilatere compris entre les hypotenuses, qui est ordinairement pour les lits ou un parallelograme ou un trapeze & quelquefois un trapezoïde pour les doeles plates, où l'on à vû qu'une même hypotenuse nous sert à deux triangles, dont l'un est rectangle & l'autre peut ne pas l'être; mais parce que dans celui qui n'est pas rectangle nous connoissons tous les côtez, il est bien aisé de le former.

On trouve donc les panneaux de lit par l'intervale des hypotenuses de deux triangles rectangles posez sur une même ligne de base & les panneaux de doele par une suite de deux ou trois triangles; dont le prepremier est toujours rectangle, par la construction, de même que le second, lorsque la surface est divisée en trois triangles, comme il peut arriver.

Si nous rappellons ici nos principes de projection, nous connoîtrons que toutes les lignes qui sont paralleles à l'objet projetté sont dans leurs justes mesures; ainsi les cordes des arcs de face GL & IP, LR PS, qui sont dans des plans paralleles, ne sont ni diminuées ni augmentées, donc elles peuvent être prises sur l'Elevation; d'où il suit qu'à

chaque doele on a toujours deux côtez à prendre ſur l'Elevation, qui ſont les cordes des arcs de têtes, & deux ſur le profil, qui ſont les joints de lit; mais comme ces quatres côtez peuvent faire entr'eux des angles differends, parce que la diagonale du trapeze n'eſt pas connuë, on abaiſſe une perpendiculaire LK ſur le côté IP pour en déterminer la poſition à l'égard de ſon oppoſé LG par le moyen des deux triangles rectangles LKP & LKI, leſquels déterminant la poſition des points L & I donnent la diagenale LI de la doele, troiſiéme côté du triangle LGI, que l'on ne connoiſſoit pas auparavant; donc la *Doele plate* eſt exactement trouvée; *ce qu'il falloit faire & démontrer.*

A l'égard des panneaux *de tête* il eſt clair qu'ils ne ſont en rien alterez ni racourcis, ni ralongez ſur l'élevation.

Il ne reſteroit plus qu'à trouver les panneaux de l'*Extrados*, ſi l'on en avoit beſoin pour avoir les ſix ſurfaces du vouſſoir, mais il n'eſt pas néceſſaire pour l'éxecution de les réduire à des ſurfaces planes; parce que par le moyen du contour des Têtes, qui ſont les arcs *Am*, H*q* donnez ſur l'élevation & leurs côtez *mq*, AH auſſi donnez par les panneaux de lit, on peut former les extrados convexes du premier coup, ſans s'y diſpoſer par des ſurfaces planes, qui ne pourroient être que des tangentes au Cône ou au Cylindre, dont les angles ſeroient hors du vouſſoir, bien loin de les y déterminer.

Ce Probléme peut ſuffire à trouver toutes les ſurfaces planes des polyedres & de leurs diviſions par le moyen de l'Elevation des deux faces projettées ſur un même plan; il eſt encore une maniere plus ſimple où l'on peut ſe paſſer de la double projection des faces anterieures & poſterieures.

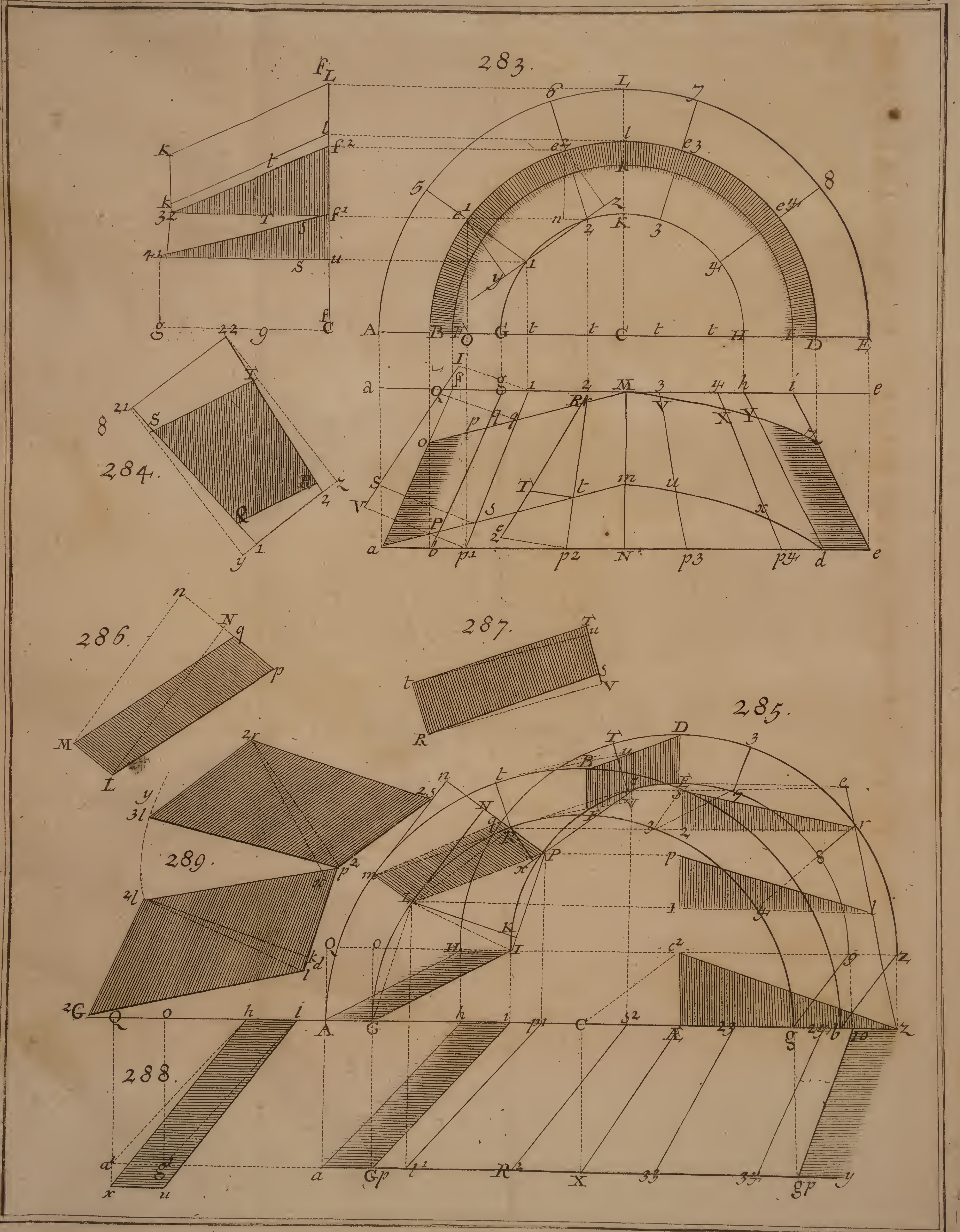
Probleme XI.

La Projection Horiſontale d'un Polyedre & de ſes Diviſions étant donnée avec l'Elevation de ſes Faces, trouver toutes les Surfaces dont chacune de ſes parties eſt envelopée.

Ou en Termes de l'Art.

Le Plan & l'Elevation des Têtes étant donnez trouver les Panneaux de Tête de Lit & de Doele Plate de toutes ſortes de Voûtes.

Nous ſuppoſons dans ce Probléme, comme dans le précedent, que toutes les voutes, quoique parties des corps ronds cylindriques, coniques, ou ſphériques, ſont réduites par les Doeles plates en Polyedres, c'eſt-à-dire, les Cylindres en Priſmes, les Cônes en Pyramides, & les


283.
284.
285.
286.
287.
288.
289.

Sphères & Sphéroides en portions de Pyramides tronqées. Cela supposé tout l'art de ce Probléme consiste à décomposer la projection horisontale en *réduisant toutes les Surfaces en triangles, & cherchant dans l'Elevation des Flaces les hauteurs des lignes inclinées pour en trouver les véritables longueurs.*

Il n'est donc question que de trouver les hypotenuses des triangles rectangles, dont un des côtez est connu dans l'Elevation, & l'autre à la projection horisontale ou au profil des lignes projettées, soit qu'elles soient réelles ou simplement supposées pour servir de diagonales à des Parallelogrammes ou à des Trapezes ou Trapezoides, dont on ne connoït pas les angles, ce qu'on entendra mieux par les exemples.

Premiere Exemple d'un Berceau Droit ou Biais.

Plan. 25. Fig. 290.

Soit ABFG la projection horisontale d'un Berceau biaïs, dont A*b*B est le ceintre de face divisé en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, & dont les projections des joints de lit sont les lignes I K ²*p*P ³*pp* LN. Pour trouver la premiere *Doele plate* dont la projection horisontale est le parallelograme AIKG, on le divisera en deux triangles par une diagonale AK ou IG, il n'importe laquelle, on transportera ensuite une de ces diagonales comme IG en I*g*, pour former un triangle rectangle 1IG, l'hypotenuse 1*g* sera la vraye longueur de la Diagonale de la premiere doele, dont la projection horisontale est GI. Si au lieu de cette diagonale on avoit pris l'autre AK, on auroit pû transporter la lougueur AK en I*k*, la ligne *k*1 auroit été la longueur réelle de la diagonale de la doele plate, dont AK est la projection, ou bien au lieu de transporter AK en I*k* on peut transporter A1 en A11 à angle droit sur AK, & tirer la ligne 11 K, qui sera celle qu'on cherche; mais il y a moins de commodité en cette maniere; parce qu'il faut faire un angle droit 11 AK, au lieu qu'en la précedente on en trouve un tout fait 1 I*g*, qui est celui de l'aplomb 1I sur la base AB, qu'on est obligé de faire pour avoir la projection du point 1, & du joint de lit IK.

Une des deux diagonales de la Doele plate étant trouvée, on a la surface de cette Doele, parce qu'on a tous les côtez de chacun des triangles, par lesquels on l'a divisé par les diagonales; car la corde A1 est le côté qui est dans le plan de la face, lequel n'est point changé dans l'Elevation, & les côtez GA ou KI de la projection ne sont pas alterez dans leurs mesures; parce que le joint de lit de la voûte est parallele à IK, & que GA est celui de l'imposte; donc on a les trois côtez de chacun des triangles, qui sont les moitiez de la doele, ainsi faisant à part la ligne I² *g*² égale à la ligne 1*g*, si des points *i*² & *g*² pour centre & pour rayon des longueurs A1 & AG, on fait une in-

terfection d'arc de cercle en *a* & en *k* de part & d'autre de la diagonale $i^2 g^2$, on aura les points ${}^2a^2$, par lesquels tirant les lignes $a\ g^2$, $a\ 1^2$, $k g^2$, $k i^2$ on aura un parallelograme qui sera la surface de la doele plate dans toute son étenduë ; & avec les angles que font ses côtez. On peut se servir de la ligne K11 pour rectifier l'operation; parce qu'elle doit être égale à la diagonale *ak*.

Si au lieu de la premiere doele on avoit voulu tracer la seconde, on auroit de même divisé sa projection KI ${}^2p$ P par une diagonale IP ou K ${}^2p$, dont on auroit trouvé la véritable longueur en portant à angle droit sur une de ses extremitez la longueur *d*2, qui est la difference des hauteurs des divisions des joints de lit 1 & 2, & l'hypotenuse K ${}^2d$ auroit donné la véritable longueur de la diagonale de la seconde doele, sur laquelle on auroit formé de part & d'autre deux triangles avec la corde 1 2, & le joint de lit KI, comme à l'exemple précedent, ce qui est clair de soi-même, Ou pour s'épargner la peine de faire un angle Droit on auroit profité de celui de l'aplomb 2 *d*1 sur la ligne 1*d*, en transportant la longueur de la diagonale ${}^2p$K en *dz*, la distance de *z* à 2 auroit donné la même longueur *z*2 que K${}^2d$. Ou encore par une maniere plus abregée, pour trouver tout d'un coup la difference de niveau des deux points 1 & 2, & profiter de l'angle Droit que fait *l'Aplomb* 2 ${}^2p$ sur le diametre AB, il n'y a qu'à prendre le plus petit aplomb. 1I, & le transporter sur le plus grand en 2V, & la longueur de la diagonale ${}^2p$K en ${}^2py$, la ligne *y*V sera celle que l'on cherche ; car il est visible que les triangles *y* ${}^2p$V & *zd* 2 sont egaux entr'eux, de même que les triangles *zd*2 & ${}^2p$ ${}^2d$ K ; puisque les jambes qui comprennent l'angle Droit sont égales, par la construction.

Les Panneaux de Lit se feront aussi facilement par la même méthode. Premierement celui de l'imposte est tout fait dans la projection horisontale, parce qu'il est de lui-même horisontal, c'est le parallelograme BDEF, les autres lui seroient égaux si le Berceau étoit Droit; mais parce qu'on le suppose biais, quoiqu'ils soient tous composez de côtez égaux, ils sont inégaux par leurs angles, ceux qui approchent le plus de la clef sont toujours moins obliquangles.

Soit proposé à faire le panneaux du premier lit marqué à l'élevation par le joint de tête 4*q*, & au plan par le parallelograme NLOR, que l'on divisera en deux triangles par une diagonale ON, laquelle représente celle du lit, qui est une surface inclinée à l'horison; par conséquent cette diagonale est plus longue que sa projection ON. Il en faut trouver la mesure, comme nous avons fait pour la doele, en portant sur le plus grand aplomb *q*O, qui a servi à faire la projection, le

petit 4 L de q en Q, ensuite ayant transporté la longueur ON en On, on en tirera nQ qui sera la longueur effective de la diagonale NO.

Presentement si l'on porte cette longueur n Q en quelqu'endroit à part comme à la fig. 291. en n^1 o^1, & qu'on forme de part & d'autre deux triangles avec les côtez $4q$ & RO, on aura le parallelograme $n^1l\ o^1r$, qui sera la surface du premier lit dont les angles sont déja moins aigus que ceux de l'imposte; ainsi des points n^1 & o^1 pour centres, & de l'intervale NL pour rayon, on fera les arcs $l7$, $r8$, & des mêmes centres, & de l'intervale $4q$ on fera des arcs qui couperont les précedens aux points l & r, par lesquels tirant les lignes nr, ro, nl, lo, on aura le parallelograme n^1lo^1r, qui sera la surface du lit de dessus du premier rang de voussoirs, & celle du lit de dessous du second. On voit encore ici qu'au lieu de porter la longueur 4 L en qQ pour avoir la hauteur exterieure du joint de lit sur celui de la Doele on pouvoit faire $4o$ perpendiculaire sur $q\,o$ & sur $o4$, prolongée en n^2, porter la longueur ON de la projection de o en n^2, on auroit eu l'hypotenuse n^2q égale à nQ.

On voit aussi qu'au lieu de la diagonale ON on pouvoit tirer l'autre LR; & porter LR de O en r, la ligne rQ auroit donné la véritable longueur de cette diagonale, dont on pouvoit se servir comme de l'autre; il n'importe en quelque endroit qu'on fasse ces triangles rectangles pourvû que leurs côtez soient des longueurs convenables; le plus ou le moins de facilité dans la construction décident des moyens. On a toujours un côté donné sur l'Elevation, qui est le joint de tête $4q$ ou 3 : 6, & l'autre à la projection NL ou OR.

Si les Faces du Berceau n'étoient pas paralleles entr'elles, comme si GY en étoit une, on pourroit toujours les supposer paralleles, & après avoir fait les panneaux on en retrancheroit les longueurs 9 N d'un côté, & 10 R de l'autre, suivant les régles de la circonscription, & le panneau seroit réduit au trapeze 9 l O 10, comme on a vû au premier exemple du Problême précedent, ce qui peut s'appliquer à une face courbe en la renfermant dans un Poligone par sa projection horisontale.

Second Exemple d'un Berceau en Descente.

La difference qu'il y a de ce second Exemple au premier consiste en deux choses.

Premierement en ce que la projection horisontale ne fournit point de mesure des joints de lit de la voûte comme au Berceau de Niveau;

parce que ces joints étant inclinez à l'horifon, font racourcis dans la projection, où ils font repréfentez par une ligne horifontale; mais cette ligne fournit le moyen de trouver l'inclinée en ce qu'elle eft la bafe d'un triangle rectangle, dont l'autre jambe, qui eft la hauteur de la defcente, eft donnée; par conféquent il eft aifé de former le triangle rectangle, qui eft le profil de la defcente, & trouver fon hypotenufe, qui eft la ligne inclinée que l'on cherche.

Fig. 293. Ainsi [*Fig.* 293.] puifque B*a*, KL & autres projections des joints de lit font trop courtes on élevera à une extrémité *a* une perpendiculaire *a* a², que l'on fera égale à la hauteur de la defcente qu'on fuppofe être ici la ligne *a*A, & du point B par a² ayant tiré B a², cette ligne fera la véritable longueur de tous les joints de lit, qu'on fuppofe dans cet exemple paralleles & égaux.

Si les projections des joints de lit n'étoient pas paralleles, comme il arrive dans les voutes coniques, dont nous avons donné des exemples au problême précedent; il eft vifible qu'il faudroit faire un profil pour chacun; parce qu'ils font tous inégaux, fi le cône eft fcalene.

La feconde difference de cet exemple d'une voûte en Berceau biaife & en Defcente eft, que les longueurs des diagonales font un peu plus difficiles à trouver, en ce que leur hauteur n'eft pas égale, de forte qu'on ne peut tirer ces hypotenufes de même fommet fur une même bafe, comme à l'exemple précedent, d'un Berceau de niveau; mais de deux fommets differens, & pour la commodité de l'execution, fur deux differentes lignes de bafe.

Pour concevoir la raifon de cette difference il faut faire attention que la furface de la doele d'un Berceau horifontal, étant divifée en deux triangles par deux diagonales; chacune d'elle va de bas en haut, com-
Fig. 292. me [*Fig.* 292.] de *n* en *b*, & de *r* en *l* à hauteur égale *lb nr*; mais que fi cette furface eft inclinée fuivant fes joints de lit comme à la Fig. 296. la doele I*q*BA, on verra que les deux diagonales BI A*q* ne font plus également inclinées à l'horifon, celle qui part du point I le plus élevé defcend plus qu'elle ne faifoit de toute la quantité de la hauteur de la defcente AB, & l'autre qui part du point A peut monter ou defcendre fuivant la difference qu'il y a entre la hauteur verticale ID de la furface, & la hauteur de la defcente AD ou être de niveau comme A*q*.

Si *l'Aplomb* de la retombée marquée à la fig. 293, par la ligne 2D eft plus grande que la hauteur A*a* de la defcente du Berceau, la dia-
Fig. 294. gonale LQ [*Fig.* 293.] ou AL [*Fig.* 294.] au lieu de defcendre du point

A

A monte encore en L de la quantité dL ; donc *l'Aplomb* A2 ou ſon égal bL excede la deſcente Aa ; mais ſi la deſcente Ae étoit plus grande que l'Aplomb de retombée 2A, ou ſon égal Fg la diagonale LQ ou Ag deſcendroit du point A de la difference gD de l'Aplomb de la retombée 2A & de la deſcente Ae.

Pour prendre une idée nette de ces differences, nommons la hauteur Aa ou Ae de la deſcente a, celle de la retombée 2A, b, leur difference d ; il eſt clair que la diagonale qui partant du ſommet 2 vient au bas de la deſcente a toujours pour unique hauteur $a + b$, ce qui eſt invariable ; mais celle de l'autre diagonale qui part du point A ſera variable ſuivant le raport d'a à b, à ſon extremité oppoſée au point A ; car lorſque a ſera plus grand que b elle ſera deſcendante, parce que la hauteur totale $a + b = 2b + d$ eſt diminuée de $b + d = a$, qui eſt par la ſuppoſition, plus grand que b, c'eſt-à-dire $a - d$; mais ſi a eſt plus petit que b , cette diagonale ſera aſcendante, parce que la hauteur totale $a + b$, qui eſt alors égale à $2a + d$ ne ſera diminuée que de la hauteur a qui eſt moindre que b par la ſeconde ſuppoſition ; il reſtera donc $a + d$ plus grand que a, cela ſuppoſé

Soit [*Fig.* 293.] le plan horiſontal Ba IE du Berceau en deſcente, avec la projection de ſes joints de lit faite, à l'ordinaire par les aplomb abaiſſez des diviſions de ſon ceintre 1, 2, 3, 4. Soit la hauteur de la Deſcente l'intervale Aa pour former le panneau de doele, par exemple du ſecond vouſſoir 1 : 2, dont la projection horiſontale eſt le parallelograme KL ^2pQ, on le diviſera en deux triangles par une diagonale LQ ou ^2pK il n'importe, une ſuffit ; nous n'en mettons ici deux que pour faire voir qu'il n'eſt pas indifferend de prendre l'une ou l'autre pour en trouver la juſte longueur. *Fig.* 293.

On commencera par chercher la valeur de la projection du joint de lit KL égale à Ba, qui eſt trop courte, & qu'on trouvera en faiſant la ligne aa^2 perpendiculaire ſur aB & égale à la hauteur Aa, la ligne Ba^2 ſera déja un côté d'un des triangles que forment les diagonales LQ ou K^2p ; enſuite on cherchera la valeur de l'autre côté L^2p ou ſon égale KQ, qui eſt auſſi trop court, parce qu'il repréſente la corde 1 2 qui eſt inclinée à l'horiſon, & comme cette corde eſt dans ſa juſte meſure à l'élevation, elle ſera le ſecend côté de chacun de ces triangles. Il ne reſte plus qu'à trouver le troiſiéme qui eſt la valeur d'une diagonale , laquelle n'eſt point inclinée ſuivant la pente a^2 B, comme nous l'avons fait voir, mais l'une plus & l'autre moins; celle qui vient du point 2 plus haut que le point 1, eſt plus inclinée que la ligne Ba^2, & ſa hauteur eſt comme nous l'avons dit la ſomme

de l'aplomb 2D & de la descente $^{2}t\ ^{2}p =$ Aa ; il faut donc porter la hauteur 2D en I ^{2}t pour avoir cette somme I ^{2}p, & la longueur de la diagonale ^{2}pK, en ^{2}pk & tirer la ligne 1 k qui sera sa juste mesure.

Mais si l'on veut avoir la valeur de la diagonale LQ, qui a pour origine le point 1 projetté en L, lequel est plus bas que le point 2, il faudra porter la longueur 2D de ^{2}p en N, pour avoir la difference N ^{2}t de *l'Aplomb* 2D & de la descente $^{2}t\ ^{2}p$, & porter la longueur de la diagonale LQ de ^{2}t en O, la ligne NO hypotenuse de ce triangle rectangle sera la valeur de la ligne LQ.

Pour s'épargner la peine de faire une ligne 1D perpendiculaire sur 2D, qui donne la difference 2D des hauteurs des points 1 & 2, il n'y a qu'à prendre avec le compas la hauteur 1L & la porter en 2N sur l'aplomb le plus long, on aura tout d'un coup la difference N $^{2}p =$ 2D ; parce que l'angle L ^{2}p 2 est Droit, 1, 2 $=$ LN côté du même parallelograme & 1D $=$ L ^{2}p, donc N ^{2}p $=$ 2D.

Par la même construction on trouvera le panneau de lit marqué à l'élevation par le joint de Tête 3 $^{2}3$, & au plan horisontal par le parallelograme sRSr, dans lequel on tirera les diagonales Rr, ou Ss, une des deux suffit pour le diviser en deux triangles, & on aura leur valeur par la même methode qu'on a employé pour trouver celle de la doele. On examinera quelle est celle qui vient du point le plus élevé $^{2}3$, qui a donné le point S pour sa projection, d'où l'on conclura que la diagonale Ss est la plus grande, qui doit avoir pour hauteur la somme de *l'Aplomb* $^{2}3d$, & de la hauteur Os de la descente, c'est pourquoi l'on portera 3d en Ou, la ligne su sera la hauteur de la diagonale Ss; ainsi en portant Ss en SV la ligne uV sera sa juste mesure ; pour la diagonale Rr, il n'y a qu'à porter la hauteur $^{2}3d$ en RT pour avoir sa difference yT avec celle de la descente Os, laquelle difference est ici presqu'insenssible, de sorte que la ligne Rr est égale à la grandeur de projection, c'est-à-dire, que cette diagonale est horisontale dans le panneau de lit; par conséquent égale à la projection Rr.

On peut ici comme à l'Article précedent trouver la difference $^{2}3d$ tout d'un coup, en portant la plus petite hauteur d'aplomb 3 R en $^{2}3$O.

Les longueurs des diagonales, tant de la la doele que du lit, étant trouvées, on les transportera en quelqu'endroit à volonté, comme
Fig. 295. à gauche. en Kt^{2} [*Fig.* 295.] & des points K & t^{2}, comme centres & pour rayons les intervales 1 2 & Ba^{2}, de la figure 193, on fera des intersections d'arcs de part & d'autre de la diagonale Kt^{2}, qui donneront

les points t^1 & q, par lesquels tirant les lignes Kt^1, t^2 t^1, qt^2, qK on aura un parallelograme égal à la surface de la doele plate.

De la même maniere ayant transporté la longueur V u en s S° [*Fig.* 295. *à droite.*] on prendra la longueur du joint de Tête 3 ^{2}3, & du joint de lit B a^2 & de ces intervales pour rayons & des points s S° pour centres, on fera des intersections d'arcs en R^T & r3, qui donneront les points R^T & r3, par lesquels tirant les lignes r3 S°, r^3 s^3, R$_T$ S°, R^T s^3 on aura un parallelograme qui sera égal à celui de la surface du panneau de lit. *Fig. 295. à droite.*

Troisiéme Exemple d'une Voûte en Canoniere en Descente, qui est une Conique Scalene Tronquée.

La difference de cet exemple au précedent consiste 1.° en ce que les projections des joints de lit étant toutes inégales, & plus courtes que les joints qui sont inclinez à l'horison, il faut trouver la valeur de chacune en particulier par un profil semblable à celui de l'imposte Da a^2, en élevant une perpendiculaire à une de leurs extrémitez égale à la hauteur de la descente aa^2, au lieu que dans l'exemple précedent un seul sufisoit pour tous. *Fig.* 297.

Secondement, en ce que les hauteurs des diagonales se trouvent encore differemment, quoique toujours suivant le même principe.

Soit donc [*Fig.* 297.] le plan horisontal d'une descente en canoniere DabE, avec les projections de tous ces joints de lit Ol, Pn, &c. soit Aa la hauteur de la descente, A b B le ceintre de face de la partie posterieure ébrasée; DSE celui de la face antérieure, l'un & l'autre divisé en nombre égal de voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, desquels on a abaissé les aplomb 1L, 2N, & 1O 2P, lesquels ont donné les projections des joints de lit lO, nP suivant l'usage ordinaire, & les trapèzes DalO, & OLnP pour projection des doeles. On les divisera en triangles par des diagonales nO lP [une seule suffit] & l'on en trouvera la valeur, à peu près comme dans l'exemple précedant, ayant égard à leur origine & à leur côté opposé pour trouver par le moyen de leur hauteur au dessus du plan horisontal leur inclinaison & leur longueur; ainsi pour avoir la véritable longueur de la diagonale nO, qui répond par le point n à la plus grande hauteur de l'aplomb 2n, & par le point O, à la plus petite hauteur de l'aplomb 1O de la face anterieure. On ôtera la plus petite de la plus grande, & leur difference sera la hauteur d'une des extrémitez de cette diagonale au point n. Or il n'importe de prendre cette difference en haut ou en bas; si on

la prend en bas en portant O1 de *n* en 10, il faudra tirer une horiſontale par ce point 10; mais ſi l'on porte O1 ſur le haut du point 2 au point I la ligne *ab* ſervira d'horiſontale toute tracée ; de ſorte que ſi l'on porte la longueur de la diagonale *n*O de *n* en K, & qu'on tire la ligne KI , cette ligne ſera la valeur de la plus grande diagonale repréſentée au profil par la ligne 23 01, qui eſt trop courte par les raiſons que nous avons donné en parlant de profils des cônes.

Cette ligne KI peut ſuffire pour trouver le panneau de la doele, dont la projection eſt O*ln*P, On la tranſportera où l'on voudra comme à la figure 298. en ^2n 2° , puis du point ^2n pour centre & de l'intervale de la corde 1, 2 de la figure 297. pour rayon, on fera un arc de cercle *l*5 , & du point 2° & pour rayon l^2O valeur du joint de lit, dont la projection eſt *l*O, que l'on aura trouvé en faiſant *l* l^2 égale à *l*L, & perpendiculaire à OI; on aura le triangle 2° 1L 2*n* qui ſera la valeur de celui de la doele O *l n*. On trouvera de la même maniere la valeur de l'autre triangle O P *n*, en faiſant du centre 2° & de l'intervale de la corde 12 du ceintre DSE l'arc 6p^2, & du point ^2n pour centre & pour rayon la valeur de P*n* que l'on n'a pas mis dans cette figure, on decrira un autre arc qui coupe le précedent en ^2p, le triangle 2° ^2p ^2n ſera la valeur de celui de la projection OP*n*.

Fig. 298.

Si au lieu de prendre la diagonale *n*O on avoit voulu prendre l'autre *l* P, on auroit pris la hauteur de *l'aplomb* 2 P du ceintre de face anterieure, & on l'auroit porté ſur l'aplomb 1L de l'autre ceintre A*b*B qui a donné la projection du point de l'extrémité oppoſée de cette diagonale, & on auroit eu le point *i* ; enſuite portant la longueur *l*P de *l* en *k*, la ligne *ik* auroit donné ſa valeur ou meſure, exprimée au profil par la ligne 14 p^2, qui étoit trop courte parce que c'eſt un profil de cône. Si l'on porte cette longueur 2P de bas en haut de *l* en 2*p*, on aura la hauteur de l'horiſontale 2P p^2 terminée au point p^2 du profil,

Il faut remarquer que les longueurs des diagonales trouvées ſont plus grandes que celles du profil 14 p^2 & 23 *o*1; parce que n'étant pas paralleles au plan vertical de ce profil, elles y ſont racourcies par la projection verticale; de ſorte qu'un tel profil eſt inutile pour les meſures; on ne l'a fait que pour indiquer le raport des lignes cherchées & pour en faire voir l'inclinaiſon & la poſition, afin qu'on conçoive plus facilement les raiſons de la conſtruction.

Il n'eſt pas néceſſaire d'expliquer la maniere de faire le panneau de lit, on s'y prendra de la même maniere que pour la doele, en diviſant ſa projection QR*ts* en diagonales, dont on trouvera les longueurs réelles

par le moyen de leur hauteur fur l'horifon à l'extrémité élevée, laquelle hauteur fera la difference de celle des retombées, par exemple, du joint de Tête 36, qui eft V*t*, fi l'on porte de *t* en *q* la longueur de la projection de la diagonale *t*Q on aura pour fa valeur la ligne V*q*, de même que *ur* eft celle de la ligne *s*R de la projection. Ces diagonales tranfportées à part comme à la fig. 299. avec les joints de Tête 3. 6, & la valeur des joints de lit *s*Q *t*R, donneront une parallelograme *t*6, R6, Q3, *s*3, qui fera le lit du joint 36, de la même maniere qu'on a trouvé celui de la doele dans l'exemple précedent de la fig. 293, avec cette feule difference, qu'il faut faire un profil pour chaque projection de joint de lit Q*s* R*t*; parce que ces lignes étant la projection de lignes inégales une feule hypotenufe ne peut fervir pour tous les joints de lit, comme dans la fig. 293, ce que nous avons déja fait remarquer, mais que nous n'avons pas fait à la fig. 297. pour éviter la multiplicité des lignes.

Quatriéme Exemple d'une Voûte Sphérique réduite en Polyedres par des Doeles plates.

Nous avons fait voir, en parlant des Dévelopemens, que la fphère pouvoit être réduite en portions de cônes tronquez, & ces cônes en Pyramides tronquées, de forte qu'on pourroit renvoyer le Lecteur à l'exemple précedent; puifque fi l'on fuppofe le demi cercle B*b*E [*Fig.* 300.] divifé en cinq parties aux points 1, 2, 3, 4, & qu'ayant tiré les cordes B1, 1'2; 2'3; 3'4; 4E l'on faffe mouvoir ce demi cercle autour de fon rayon C*b*, les cordes B1, 1'2 produiront par leur révolution deux cônes tronquez, dont la fection par l'axe du premier eft le trapeze B1 4E, & le trapeze 2 4 3 2 celle du fecond, & fi ces trois cônes tronquez infcripts dans la fphère font réduits en Pyramides tronquées, nous retombons dans le cas de l'exemple précedent, avec cette difference que celui-ci eft plus facile & plus fimple; parce que ces Pyramides font droites fur leurs bafes, & que nous en fuppofons les axes en fituation verticale; au lieu qu'au précedent nous avons fuppofé l'axe incliné à l'horifon. *Fig.* 300.

Soit cependant pour une plus ample explication de la fig. 300. le demi cercle ACFS la projection d'une hemifphère, ou plûtôt d'un quart de fphère, dont les cercles concentriques BME, GNL & IOK font les projections des joints de lit de la dole réduite en portions de cônes tronquez, dans lefquels on infcrira un Polygone d'un nombre de côtez égal à celui de la quantité des vouffoirs que l'on doit mettre à chaque rang en faifant ces vouffoirs égaux ou inégaux, il n'importe; la *Fig.* 300.

régularité de ce poligone n'eſt pas néceſſaire ; parce qu'il doit enfin être réduit au cercle pour derniere operation.

Fig. 300. Soit, par exemple, B G N M la projection d'une doele d'un vouſſoir du premier rang, l'ayant diviſé par la diagonale GM en deux triangles, on cherchera la véritable longueur de cette diagonale, qui eſt plus courte que la ligne inclinée qu'elle repréſente. On portera comme dans les exemples précedens la longueur GM en G*m* ſur l'horiſontale A F au pied de la hauteur de l'aplomb 1 G, la ligne *m* 1 ſera la longueur réelle dont MG eſt la repréſentation. On peut donc former un trapez *b g n m* [*Fig.* 302.] qui ſera égal à celui de la Doele plate, dont la projection eſt BGNM [*Fig.* 300.] parce qu'on a tous les côtez des deux triangles inégaux dans leſquels il a été diviſé par la diagonale GM ; car les côtez égaux BG & MN ſont donnez par la corde B 1 de l'élevation qu'ils repréſentent, & que les cordes BM & GN ſont données dans la projection de leur longueur naturelle ; parce que ces cordes ſont celles des cercles des joints de lit qu'on ſuppoſe horiſontaux ; par conſequent paralleles & égaux à ceux du plan horiſontal de la projection, où ils ſont raſſemblez.

Fig. 300. & 302. Ayant porté la longueur de la ligne *m*1 de la fig. 300. en quelqu'endroit à part comme en *g m* [*Fig.* 302] du point *g* pour centre & de l'intervale de la corde GN de la fig. 300. on fera un arc de cercle vers *n*, & du point *m* pour centre & de l'intervale de la corde B 1 de l'élevation pour rayon on fera un autre arc de cercle *n* 1, qui coupera le précedent au point *n*, par lequel tirant les lignes *n g*, *n m* on aura le plus petit des deux triangles *g n m* de la diviſion du trapeze par la diagonale MG. La même corde B 1 ſera le rayon d'un arc *b* 5 fait du centre *g*, & la corde MB de la fig. 300. ſera le rayon d'un autre arc fait du point *m* pour centre, lequel arc coupera le précedent *b* 5 au point *b*, qui ſera le ſommet du ſecond & plus grand triangle *mbg*.

On trouvera de même la ſurface de la Doele d'un vouſſoir du ſecond rang, dont la projection horiſontale eſt le Trapeze GION, en portant I N en I*n* ſur l'horiſontale AF & la hauteur de la retombée 2D en *i*I, la ligne *in* ſera la longueur réelle , dont la diagonale IN eſt la projection ; de ſorte que le Trapeze GION deviendra plus alongé, comme on le voit à la fig. 302. en *g i o n*.

Par la même méthode on trouvera les ſurfaces des lits, que l'on pourroit auſſi réduire à des trapezes rectilignes, ſi l'on vouloit tirer une tangente *p t* ſur le milieu *t* de l'arc Q*q*, qui eſt la projection du joint de lit de l'extrados d'un vouſſoir, dont la projection ſeroit la por-

tion de couronne de cercle LQ*qr*; mais cette circonſcription eſt inutile pour l'execution; il ſuffit que le panneau de lit ſoit rectiligne de trois côtez QL, L*r*, *rq*, quoique ſon quatriéme côté *qt*Q ſoit une portion de cercle, il ne fait aucune difficulté pour l'uſage de la coupe des pierres.

Ayant fait la projection du lit dont la ligne 4 14 de l'élevation repréſente exactement la largeur & l'inclinaiſon, on prendra avec le compas la longueur de l'aplomb 4L qu'on portera ſur le plus grand 14 Q en 14 *u*, & l'on portera la longueur Q*r* de la diagonale qu'on aura tiré dans la projection de Q en V, la ligne V*u* ſera ſa juſte longueur, laquelle étant miſe à part [*Fig.* 301.] ſervira de baſe pour former les deux triangles du trapeze qui exprime la ſurface du lit, dont tous les côtez ſont donnez. Les côtez Q*l* & *rq* ſont égaux au joint de Tête 4 14, le côté *lr* égal au côté L*r* de la projection horiſontala, & le côté Q*q* égal auſſi à celui de la projection, ſoit qu'on le prenne par la corde de ſon arc, pour lui circonſcrire l'arc; ſoit qu'on le prenne par ſa tangente, ſoit qu'on le prenne par l'arc même, qu'il eſt aiſé de tracer du premier coup, en prenant ſur le côté Q*l* prolongé la longueur du rayon FC, & alors au lieu d'un trapeze rectiligne on aura un trapezoide mixte *lrq* Q. *Fig.* 301.

Demonstration.

La conſtruction de ce Probleme & les explications que nous y avons mêlé portent leur démonſtration.

Premierement il eſt clair que toutes ſortes de figures rectilignes peuvent être réduites en triangles, & que les curvilignes peuvent être réduites en rectilignes par l'inſcription ou la circonſcription, par le moyen de quoi on peut, du moins par aproximation, connoître leurs excès ou leur défaut; mais toujours aſſez exactement pour la pratique.

Secondement il n'eſt pas moins clair qu'en trouvant la hauteur des lignes inclinées ſur un plan horiſontal, ſur lequel la projection les a racourcies, on ne fait que décompoſer cette projection; enſorte que l'on remet les côtez & les angles du ſolide dans la ſcituation où ils étoient avant qu'ils fuſſent projettez, & il eſt clair qu'on en trouve par ce moyen les juſtes longueurs. Or ayant les trois côtez d'un triangle il eſt évident qu'on a les angles de Trapeze ou de telle autre ſurface que l'on voudra, dont il eſt partie; car un de ſes angles devient un de ceux de la figure quadriligne ou poligone qu'il compoſe ou par ſa répetition, comme il arrive dans les parallelogrames, ou par ſa jonc-

tion avec celui d'un autre triangle mis de ſuite, car le tout eſt égal à ſes parties; donc cette méthode eſt applicable à toutes ſortes de ſurfaces planes; mais comme les courbes peuvent encore être inſcrites dans des Polyedres, comme nous l'avons dit de la ſphère, il ſuit que cette méthode eſt univerſelle, & que l'ayant bien compriſe on peut l'appliquer, & trouver par ſon moyen toutes les ſurfaces dont les ſolides ſont envelopez, ce qui étoit propoſé au Problême.

Remarque ſur l'Uſage.

NON ſeulement ce Problême peut ſervir à trouver les panneaux des Lits & des Doeles planes, mais encore ceux des Lits & des Doeles ou Têtes gauches, en inſcrivant leur projection dans des triangles, comme aux vis St. Giles & aux Arrieres-Vouſſures; car on peut toujour faire paſſer une ſurface plane par trois points. Cependant comme la diviſion des Doeles donne des figures quadrilignes qu'il faudroit diviſer en deux, par des diagonales, pour les réduire en triangle, il arriveroit qu'il faudroit encore trouver l'inclinaiſon que les plans de ces deux triangles feroient entr'eux, ſuppoſant que le quadriligne ſoit Gauche, ce qui obligeroit à une ſeconde operation, qu'on peut s'épargner par des méthodes plus commodes & plus abregées, que nous donnerons au quatriéme Livre, lorſqu'il s'agira des Traits des voutes qui ont des lits ou des paremens de doele ou de Tête Gauches. Il ſuffit d'avoir établi une méthode generale & fondamentale. Il ne reſte plus qu'à trouver les angles des plans qui terminent & enferment les ſolides.

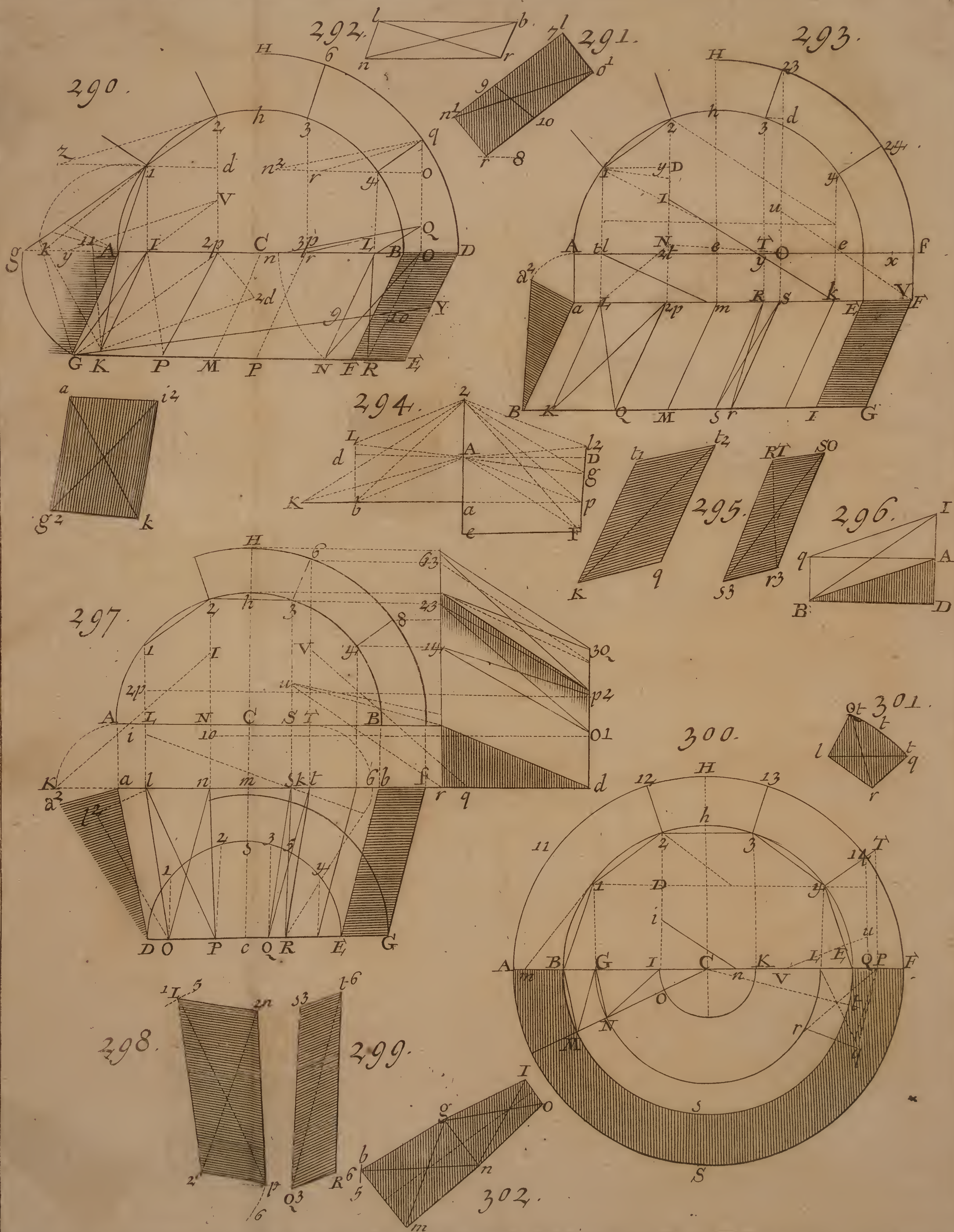
CHAPITRE V.

De la Goniographie, ou Deſcription des Angles.

En Termes de l'Art.

Des moyens de trouver les Biveaux

IL ſempble que lorſqu'on a la figure & la juſte grandeur des ſurfaces, qui comprennent un ſolide, il eſt inutile de chercher les angles qu'elles font entr'elles; puiſque leur aſſemblage dans l'ordre où elles doivent être forme un ſolide d'une figure déterminée, dont les angles ne peuveut varier ſans le changement de quelques-unes de ſes ſurfaces; mais il faut conſiderer ici que notre objet n'eſt pas de raſ-
ſembler


290.
291.
292.
293.
294.
295.
296.
297.
298.
299.
300.
301.
302.

ſembler des ſurfaces pour en compoſer un ſolide; mais de diviſer un ſolide en parties qui ayent leurs ſurfaces égales à celles qu'on a trouvé par les Régles & les Problêmes précedens, en retranchant d'une plus groſſe maſſe tout l'excès dont elle ſurpaſſe celui qu'on ſe propoſe de faire; & parce qu'il faut abattre, tailler & creuſer ſucceſſivement une ſurface par le moyen de ſa Contiguë, qui doit en déterminer la poſition, il ſuit, qu'on ne peut leur donner l'inclinaiſon qu'elles doivent avoir entr'elles, ſans connoître les angles de leurs plans pour approfondir plus ou moins la place du modele qu'on doit y appliquer, lequel régle les angles de leurs côtez, & pour trouver par leur ſituation celle d'une troiſiéme, quatriéme & cinquiéme ſurface, dont elles ſont les termes,

La ſeconde raiſon qui nous oblige à la recherche des angles des plans, c'eſt qu'on ne fait pas des panneaux pour toutes les ſurfaces qui comprennent un vouſſoir. On fait rarement ceux des extrados, & s'il s'agiſſoit d'operer par la Synteſe, on ne pourroit ſe diſpenſer de les faire, lorſqu'ils ſont compoſez de pluſieurs ſurfaces, comme il arrive aux enfourchemens.

Nous ne croyons pas qu'il ſoit néceſſaire d'expliquer ici ce que nous entendons par les angles des plans; la ſixiéme définition du unziéme Livre d'Euclide nous enſeigne, que l'angle de rencontre de deux plans qui ſe coupent eſt meſuré par celui que font deux lignes droites, perpendiculaires à leur commune ſection, menées au même point; la raiſon nous fait ſentir que c'eſt le moyen le plus ſimple de connoître leur inclinaiſon mutuelle; cependant comme cette régle eſt le fondement de l'uſage qu'on doit faire de ces inſtrumens propres à copier & tranſporter les angles qu'on appelle Beuveaux, ou ſelon moi, *Biveaux*, du Latin *Bivium*, un chemin fourchu, il ne ſera pas inutile d'en faire une propoſition generale, applicable aux ſurfaces courbes des corps réguliers, auſſi bien qu'aux droites.

Où il faut remarquer qu'on ne doit pas confondre les *Angles des Plans* avec *les Angles Plans*; car quoique les angles d'inclinaiſons des plans ſoient dans des plans qui leur ſoient perpendiculaires, nous entendons par le mot *d'Angle plan*, celui des côtez d'une ſurface plane, & par *Angle des plans*, celui de deux ſurfaces.

LEMME.

L'Angle d'Inclinaiſon de deux Surfaces quelconques, Planes ou Courbes, meſuré par des Lignes obliques à leur commune ſection, eſt plus aigu que celui qui eſt meſuré par des Perpendiculaires à cette commune ſection, menées à un même point.

PLAN. 26. *Fig.* 303. SOIENT deux ſurfaces planes ABCD, BFED, qui ſont inclinées entr'elles, dont la commune ſection eſt la ligne droite BD; ſi d'un point *h* pris ſur cette ligne on lui tire deux perpendiculaires, ſçavoir *gh* dans un plan, & *ih* dans l'autre, & que d'un autre point K pris ſur la même ligne, on tire aux points *g* & *i* les lignes K*g* K*i*; je dis que l'angle *ghi* eſt plus grand que l'angle *g*K*i*.

DEMONSTRATION.

A cauſe des angles Droits en *h*, les lignes K*i* & K*g*, qui ſont les hypotenuſes des triangles rectangles *ih*K & *gh*K ſont plus grandes que les côtez *gh* & *hi*; donc ſi l'on applique ſur un même plan les deux angles *g*K*i* & *ghi*, qui ſont ici dans differens plans le ſommet *h* tombera au deſſous du ſommet K, & ſi l'on tire une ligne *gi* pour baſe commune de ces deux triangles *ghi*, *g*K*i*; on reconnoîtra [par la 21. propoſition du premier Livre d'EUCLIDE] que l'angle *g*K*i* eſt plus aigu que l'angle *ghi*, *ce qu'il falloit démontrer* premierement pour les ſections des ſurfaces planes.

SECONDEMENT ſi les ſurfaces ſont l'une plane l'autre courbe ou toutes deux courbes des courbures régulieres des ſphères, cônes & cylindres, il ſera encore vrai que les lignes courbes qui ſeront dans des plans perpendiculaires à la commune ſection, c'eſt-à-dire, à une tangente de la courbe formée par cette ſection, ſeront plus courbes que celles qui s'éloignent de ce point d'atouchement.

Fig. 304. SOIT pour exemple une portion de Zone de ſphère K*b*GH*d*L, qui eſt coupée par un plan IFGK, telle qu'eſt la rencontre d'une doele avec ſon lit. Il eſt clair que ſi par le point *b* de la commune ſection des ſurfaces courbe & plane, on mene la tangente *b*T, & qu'on lui mene les perpendiculaires *ba* & *bd*, d'ont l'une *ba* ſoit dans le plan du Lit, & dont l'autre *bd* ſoit la corde de l'arc *bmd* portion de la ſphère, le plan qui paſſera par *bmd* paſſera par le centre de la ſphère, & ſi l'on prend un autre point comme E dans la ſection du lit & de la doele, & que l'on tire E*d*, le plan qui paſſera par E*d* ne paſſera pas le centre de la ſphère. Or dans le cercle, de toutes les lignes qui ſont tirées d'un point hors du centre à la circonference la plus courte & celle qui étant prolongée paſſe par le centre, de même dans la ſphè-

re l'arc le plus court entre deux cercles paralleles eſt celui du cercle majeur, dont le plan paſſe par le centre de la ſphère, & les poles de ces cercles, c'eſt-à-dire, qui coupe à angle droit leurs plans.

Pour concevoir cette vérité ſoit prolongée la ligne droite *ab* en C, puiſqu'elle eſt perpendiculaire à la tangente *b*T, elle paſſera par le centre C de la ſection circulaire K*b*G, & ſi du point *d*, que je ſuppoſe à la ſurface de la ſphère, on tire ſur la ligne *ab*C, la perpendiculaire *d*D égale à la hauteur du point *d* ſur le plan FGKI de la ſection plane de la ſphere, & du point D une ligne au point E. Il eſt clair [par la 15. du 3. L. d'Euclide] que la ligne D*b*, qui paſſe par le centre C ſera plus courte que DE, qui eſt dans le même plan & ne paſſe pas par le centre. Il ſe formera donc deux triangles rectangles perpendiculaires au plan de la ſection, ſçavoir *b d*D, E*d*D, qui ont pour côté commun *d*D; & puiſque le côté ED eſt plus grand que *db* l'hypotenuſe *d*E ſera auſſi plus grande que *d b*; donc l'angle a*bd* ſera plus grand que aED [par l'Article précedent] or l'arc *bmd* étant dans un plan perpendiculaire au plan FGKI, ſection de la ſphère, & paſſant par ſon centre paſſera auſſi par le Pole & ſera portion d'un cercle majeur, laquelle ſera plus petite que celle du cercle mineur E*nd*, comme nous le démontrerons au quatriéme Livre; donc l'angle mixte *abmd* eſt plus grand que l'angle mixte aE*nd*, *ce qu'il falloit démontrer.*

Cette démonſtration pourra s'appliquer aux autres ſections coniques, où il eſt démontré *de maximis & minimis*, que la perpendiculaire au point d'atouchement d'une tangente eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut tirer d'un point donné à ſon contour, par ce qu'une telle ligne eſt un *minimum.*

De-là on peut inferer que non ſeulement aux angles mixtes, mais encore aux curvilignes, formez par la rencontre de deux ſurfaces courbes, il faut prendre la meſure de l'ouverture des branches du Biveau perpendiculairement à la tangente commune de l'une & de l'autre.

Corollaire.

Il ſuit de-là que l'art de former les Biveaux ou modeles des angles des ſurfaces qui ſe rencontrent, conſiſte à trouver une ſoutendente aux perpendiculaires menées ſur chaque ſurface à la ligne droite ou courbe de leur interſection, ce qui eſt aiſé dans les angles rentrans, mais qui ne ſe peut dans les angles ſaillans, que par le moyen de quelqu'inſtrument, ou en prolongeant ces perpendiculaires, par le moyen de quelques régles ou cordeaux.

L'INSTRUMENT propre à cet usage est composé de deux branches mobiles, qui sont assemblées à leur extrémité par un pivot & une charniere, dont le frotement est assez rude pour qu'elles demeurent immobiles à l'ouverture où on les a mis; on l'appelle *Sauterelle* ou *Fausse Equerre* ou *Compas d'Apareilleur*, comme on verra à la premiere Planche du quatriéme Livre; mais parce qu'on a besoin de prendre des angles mixtes ou curvilignes, & qu'avec cet instrument on ne peut prendre que les angles rectilignes, ou ceux des cordes des surfaces Curvilignes Concaves, & point du tout des Convexes, on est obligé de faire un autre instrument pour chaque angle de cette espece, qu'on appelle *Beveau* ou plûtôt *Biveau*.

COMME il y a plus de difficulté à former des angles mixtes & curvilignes que des rectilignes, qui sont aisément déterminez par la connoissance de leurs Sinus, ou de leurs soutendantes, on doit toujours commencer par les angles rectilignes des surfaces planes supposées au devant des courbes, comme sont les Doeles plates.

PROBLEME XII.

Trois Angles Plans, qui forment un Angle solide étant donnez, trouver les Angles d'Inclinaison de ces Plans entr'eux.

Ou en Termes de l'Art pour la Coupe des Pierres.

Trois Panneaux étant donnez trouver les Biveaux de leurs assemblages.

On peut résoudre Méchaniquement ce Problême, en joignant les trois angles ou panneaux donnez, ensorte qu'ils forment l'angle solide, & en prenant avec la sauterelle ou récipiangle les angles des plans, observant qu'il faut que les branches de la sauterelle soient posées suivant des lignes perpendiculaires à l'intersection des plans, si elle est en ligne droite, ou à sa tangente en un point où l'on mesure l'angle, c'est pourquoi il faut se servir d'une équerre pour en placer un côté sur l'intersection & faire servir l'autre à régler la position de la branche de la sauterelle sur chaque surface.

MAIS ces operations ne sont bonnes que pour des Ouvriers, l'esprit n'y trouve pas la même satisfaction que dans les Geometriques, ni la même sûreté & commodité.

Fig. 305. & 306. SOIENT donc [*Fig*, 305.] les trois plans AB, AC, AD qu'il faut rassembler, ensorte qu'ils fassent un angle solide en A. Il faut trouver l'angle d'inclinaison du plan AD avec le plan AC, & celui du même plan AD avec le plan AB.

On décrira sur une même surface plane les trois angles plans qui doivent former le solide, & on les rengera de maniere qu'ils soient contigus par les côtez AL & AK. Des points E & F pris sur les autres côtez à volonté ou à distance égale du point A, on tirera sur les côtez AL & AK, prolongez, s'il le faut, les perpendiculaires EG, FH, qu'on prolongera jusqu'à leur point de renconte en I, duquel pour centre, & de l'intervale HF pour rayon, on tracera un arc en K, qui coupera en ce point K le côté AH prolongé; je dis que si par les points I & K on mène la ligne IK, l'angle HIK sera égal à celui de l'inclinaison des plans AC AD entr'eux.

De même que si du point I pour centre, & de l'intervale GE, on fait un arc de cercle qui coupe AG prolongée en L, & que l'on tire la ligne IL, l'angle LIG sera égal à celui de l'inclinaison mutuelle des plans AB, AD.

Demonstration.

Supposons que les plans AC AB se meuvent autour des lignes AK, AL comme des couvercles des boëtes sur leurs charnieres, jusqu'à ce que les lignes AF AE se rassemblent en une seule, qui seroit en l'air mais que nous représentons dans la figure par une ligne AM, le plan AD restant immobile, les lignes MG, MH, qui seroient perpendiculaires aux intersections AL AK seroient les mêmes qui étoient auparavant en EG & HF; soit enfin tirée la ligne MI.

Puisque la ligne LG (*Fig.* 305.) ou LG [*Fig.* 306.] est perpendiculaire à la ligne GM qui est en l'air & à GI qui est dans le plan, elle sera perpendiculaire au plan du triangle MGI [par la 4 du 11. d'Euclide] & réciproquement on démontrera de la même maniere que le plan du triangle MIH est perpendiculaire au plan AD, d'où il suit [par la 19. du 11. d'Eucl.] que la ligne MI sera perpendiculaire au plan AD, & que le triangle MIH sera rectangle en I, quoiqu'il ne le soit pas dans la figure, où l'on ne peut le représenter exactement; parce que la ligne IM est en l'air hors du plan du papier. Donc l'angle MHI est celui de l'inclinaison des plans AD AC, auquel l'angle HIK a été fait égal par la construction; car l'on a fait HI perpendiculaire sur AK pour avoir un angle droit en H, & HK = HF = IM; donc les triangles MIH supposé en l'air, & IHK sont égaux en tout, puisqu'ils sont rectangles l'un en H l'autre en I, que le côté IH est commun aux deux, & que HK est égal à IM; donc l'angle MHI est égal à l'angle HIK, c'est-à-dire, à celui de l'inclinaison des plans AD AC, *ce qu'il falloit démontrer.*

On démontrera de même que l'angle GIL est égal à l'angle MGI, qui est celui de l'inclinaison des plans AB, AD. Les mêmes lettres
Fig. 306. dont on a marqué les lignes de la fig. 306. font voir l'application de
& 307. ce Probléme à un voussoir de voûte en berceau biaise, répeté à la fig. 307. avec des ombres pour en mieux exprimer la figure.

Il faut remarquer qu'il peut arriver que le point I tombe hors du plan AD, ce qui ne change en rien la démonstration, comme on peut le voir dans la fig. 306.

Seconde maniere en réduisant les Plans donnez en Triangles pour en former des Pyramides.

La maniere précedente de résoudre le Probléme est la plus simple, car elle ne suppose que des angles plans donnez, quoique dans la figure on ait dessiné des parallelogrames. On a pû remarquer que nous n'avons fait attention qu'à un de leurs angles. celle-ci ne suppose rien de plus que des bases; mais elle se fait un peu differemment sans le secours des triangles rectangles, dont le sommet de l'angle Droit tombe hors des côtez des angles donnez; mais en cherchant les bases triangulaires des Pyramides. C'est pourquoi nous représentons ici quatre triangles pour les quatre surfaces qui l'envelopent.

Fig. 308. Soient les trois triangles ABC, AEC, EDC donnez, qui sont autant de surfaces d'une Pyramide triangulaire, lesquelles étant jointes ensemble forment un angle solide en C. Il faut pour trouver les angles que ces plans font entr'eux, commencer par chercher le quatriéme triangle, qui est la base ou une surface de la Pyramide, lequel triangle est formé par les côtez de chacun des trois autres opposez au sommet C, tels sont dans cet exemple BA, AE, ED desquelles on formera un triangle AEb^d, qu'on rengera ensuite de AEC sur le même plan.

Cette préparation étant faite en façon de dévelopement, on pourra chercher les angles de tels plans qu'on voudra. Supposons premierement qu'on demande celui que les plans AEC, CED font entr'eux. On prendra un point G à volonté sur le côté commun EC, par lequel on lui tirera une perpendiculaire FH, qui coupera AE en F, & ED en H. On portera la distance EH de E en h sur le côté Eb^d, puis ayant tiré hF, on aura trois lignes hF, FG, GH, avec lesquelles on fera un triangle, prenant si l'on veut FG pour base. Du point F pour centre & de l'intervale Fh pour rayon on fera un arc vers x, & du point G pour centre & GH pour rayon on en fera un autre aussi

vers x, qui coupera le précedent au point x, l'angle FGx ſera celui des plans AEC, CED.

Presentement ſi l'on veut trouver celui des plans AEC, ACB, on prendra ſur le côté commun AC un point i à volonté, par lequel on menera ſur AC la perpendiculaire KL. On portera la diſtance AK ſur AB, en Ak ſur Ab^d, puis on tirera kL. On formera un triangle avec les trois lignes Ki, iL Lk, l'angle yiK, ſera celui que l'on cherche.

Il eſt viſible que pour trouver le troiſiéme angle des plans AEC, AEb^d, il faut tirer ſur le côté commun AE une perpendiculaire mo, faire EM égal Em, & un triangle mnz avec les trois lignes mn no, oM l'angle mnz ſera le propoſé.

Application à la Pratique.

Quoique les panneaux triangulaires ne ſoient pas fort communs dans la Coupe des pierres, il s'en trouve cependant dans les naiſſances des enfourchemens & aux doeles des Trompes. Mais parce que les angles trop aigus ſe caſſent facilement on les émouſſe pour creuſer le ſommet du cône, dans une ſeule pierre, qui raſſemble tous les angles des panneaux de doele triangulaire, que l'on réduit par ce moyen à des trapezes, mais ce qu'on ne fait pas en œuvre, on doit le faire dans l'Epure, parce qu'on retranche du panneau triangulaire ce que l'on juge à propos à chaque côté de l'angle aigu qu'on veut ſupprimer. L'operation en eſt plus ſimple & plus facile que ſi on cherchoit d'abord un trapeze.

Soit, par exemple, [*Fig.* 309.] un vouſſoir de trompe conique, tel qu'on le voit deſſiné avec des ombres à la figure 310. dont les panneaux de Tête T, de doele plate D, & des lits L & L ſont donnez, on demande les angles qu'ils doivent faire entr'eux, afin qu'on en puiſſe prendre les ouvertures avec la fauſſe équerre, & s'en ſervir pour abbattre la pierre qu'il faut enlever pour y appliquer les panneaux donnez. *Fig.* 309.

On commencera par réduire en triangles toutes les figures des panneaux donnez, qui ſont ici très-differentes; car celui de la doele eſt triangulaire, ceux des lits ſont des trapezes rectilignes, & celui de la tête eſt un trapezoide mixte.

Ayant arrangé de ſuite les panneaux donnez, enſorte que ceux dont on cherche les Biveaux ayent un côté commun, on les diviſera en triangles par des diagonales, comme celui de tête ABDC par les lignes AD, BC, ceux de lit aCSX, BDsx par les lignes aS, Bs.

Presentement ſuppoſons qu'on demande le Biveau de lit & de doele: On prendra ſur le côté commun CS un point G à volonté, par lequel on lui tirera la perpendiculaire FH, puis du point S pour centre & de l'intervale S a pour rayon on fera un arc aE, & du point D pour centre & de l'intervale D A pour rayon, on décrira un autre arc AE, qui coupera le précedent au point E, d'où on tirera au point S la ligne ES.

Ensuite du même point S pour centre, & de l'intervale SF pour rayon on décrira un arc F*f*, qui coupera la ligne ES au point *f*, duquel comme centre & de l'intervale FG, on decrira un arc vers *g*, & du point H pour centre & de la longueur HG pour rayon, on en décrira un autre, qui coupera le précedent au point *g*, les lignes *g*F & *g*H formeront l'angle du Biveau demandé *fg*H.

Supposons en ſecond lieu qu'on demande le Biveau de doele CDS & de tête CABD, ayant tiré par un point N, pris à volonté ſur le côté commun CD une perpendiculaire P*n*, on operera comme nous venons de faire.

Du point D pour centre & DS pour rayon on decrira un arc SO, & par le point P un autre P*q*, enſuite du point A pour centre & la diagonale aS pour rayon on décrira un arc *u*O, qui coupera le précedent au point O, d'où l'on tirera au point D la ligne OD, qui coupera au point *q* l'arc P*q*. Si du point *q* pour centre & de la longueur PN pour rayon on fait un arc vers *y*, & que du point *n* pour centre & de l'intervale N*n* pour rayon on en faſſe un autre qui coupera le précedent au point *y*, les lignes *ny* & *qy* tirées à ce point *y* donneront l'ouverture de l'angle des plans de tête & de doele plate.

Enfin ſi l'on demande le Biveau de tête & de lit, ayant aſſemblé ces deux ſurfaces ACDB & *xs*DB ſur le joint de tête BD dans un même plan, on lui tirera par un point *m*, pris à volonté ſur ce côté commun la perpendiculaire I K, puis du point B pour centre & la diagonale B*s* pour rayon on fera un arc *se*, & du point C pour centre, & de l'intervale CS pour rayon on en décrira un autre qui coupera le précedent au point *e*, d'où l'on tirera la ligne *e*B, puis du point B pour centre & de l'intervale BK où la ligne IK coupe la diagonale B*s* on fera un arc K*k*, qui donnera ſur B*e* le point *k*, duquel pour centre & pour rayon *m*K on décrira un arc vers *z*, & du point I pour centre & de l'intervale I*m* pour rayon on en tracera un autre, qui coupera le précedent au point *z*, où l'on menera les lignes I*z*, *kz*, l'angle I*zk* ſera le Biveau de tête & de lit qu'on avoit demandé.

Pro-

Probleme XIII.

Deux Angles rectilignes ASB, DSP *Perpendiculaires entr'eux, qui ont leur Sommet* S *commun & un côté de l'un* SP *dans le Plan de l'autre* ASB, *trouver l'Angle des deux Plans qui peuvent passer par leurs côtez* AS, DS & BS, DS.

Soit [*Fig.* 311.] le triangle ASB, dans le plan duquel est la ligne PS, section d'un autre triangle PSD, qui lui est perpendiculaire, lequel est représenté ici en racourci de perspective, parce qu'il est en l'air, sur PS ayant fait PE perpendiculaire à PS & égale à PD, & tiré SE. on fera EC perpendiculaire sur ES, qui coupera SP prolongée en C, par C on tirera FG perpendiculaire à SC, qui coupera SA prolongée en F, & SB en G. On portera la longueur CE en C*e* sur SC prolongée, & l'on tirera les lignes F*e* G*e*. L'angle F*e*G est celui que l'on cherche. *Fig.* 311.

Demonstration.

Par la construction, les triangles FC*e*, GC*e* qui sont dans le plan FSG sont égaux aux deux FCD & GCD, qui sont en l'air, dans un plan perpendiculaire au plan CDS [par la 4.e du 11.e d'Eucl.] à cause que GC est perpendiculaire aux deux CS, CD ou CE, & parce que la ligne CE est perpendiculaire à ES, c'est-à-dire, dans la representation en l'air, CD à DS, elle l'est à la commune section des plans. Or puisque SC est perpendiculaire à FG & SD à DC elle l'est [par la 4.e du 11. d'Eucl. & la 11.e du 11.] à toutes celles qui sont dans le même plan passant au point D; par conséquent à DF & DG, [par la def. 6. du 11. d'Eucl.] donc l'angle FDG est celui des plans, ou son égal F*e*G, *ce qu'il falloit démontrer.*

Je donnerai ci-après l'usage de ce Problême.

Corollaire.

De-là on tire la maniere de trouver l'angle d'un plan incliné avec un vertical, dont on a la projection sur un côté de l'angle horisontal, & la plus grande hauteur de l'incliné, ou l'angle de son intersection avec le vertical, & le côté de l'horisontal; parce que ce cas n'est que la moitié du précedent. Je veux dire une partie, ainsi au lieu de chercher l'angle des plans FDS, GDS, on ne cherche que celui du plan GDS incliné, avec le vertical PDS, auquel cas il est visible que l'angle cherché est l'angle G*e*C.

Soit, par exemple, donnée la ligne OS pour section d'un plan incliné avec l'horison, la ligne O*h* pour section de ce plan avec un vertical OH*p*, dont la base O*p* est dans le même plan que OS; on de- *Fig.* 312.

mande l'angle de ce plan incliné avec le vertical. Du point H pris à volonté dans la ligne d'interſection OH on lui menera une perpendiculaire HC, qui coupera l'horiſontale O*p*, prolongée en C, par où on tirera ſur OC la perpendiculaire CS, qui coupera OS au point S. On portera la longueur CH en C*b*, ſur OC prolongée, & l'on tirera S*b*; l'angle S*b c* eſt celui que l'on cherche, comme il eſt évident; par ce qui vient d'être démontré de la figure précedente, en prenant le point O de cette figure pour le point S de la précedente, & le point S de celui-ci pour le point G de l'autre.

De la ſituation des Angles des Plans, à l'égard de l'Horiſon.

LEMME.

Un angle rectiligne, en ſituation quelconque, eſt égal à la ſomme, ou au ſuplément à deux droits, des angles que ſes côtez prolongez font avec une ligne horiſontale, ou une verticale.

Fig. 313. Soient [*Fig.* 313.] deux lignes AD, DK, qui ſe coupent en D, ou G*e*, *e*V, ſi l'on tire par E une horiſontale EO & une verticale VE, je dis que l'angle ADK eſt égal à la ſomme des angles AEK du côté AD prolongé & DKE.

La démonſtration ſe préſente à la ſeule inſpection de la figure, où l'on voit que l'angle ADK eſt extérieur à l'égard du triangle DKE; donc il eſt égal aux deux intérieurs oppoſez. De même que G*e*T à l'égard du triangle *e*ET.

Par la même raiſon cet angle ADK eſt égal au ſupplement à deux droits des angles que ſes côtez prolongez font avec l'horiſon EO; car l'angle ADK eſt égal à ſon oppoſé au ſommet ODE, qui eſt le ſuplément à deux droits des angles à l'horiſon E*o*D *o*ED.

Corollaire.

D'ou il ſuit que l'angle que fait un joint de tête AD, avec une doele plate *o*D eſt le ſuplément à deux droits des angles, que la doele & les joints prolongez au-delà de ſon ſommet font avec une ligne aplomb VT, & que le même angle AD*o* de doele & de joint de tête, eſt égal à la ſomme de deux angles DE*o* D*o*E, que ſes côtez prolongez font avec une ligne de niveau.

C o r o l l a i r e II.

De-la il ſuit encore que l'angle d'une doele plate avec l'horiſon donne facilement l'angle de cette doele avec un *aplomb*; car il n'y a qu'à lui ajouter l'angle droit *hop*, on aura un angle obtus D*op* égal à ſon alterne *o*DV de *l'aplomb* avec la doele; parce que la verticale EV eſt parallele à *op*. *Fig.* 314.

Et par l'inverſe ſi l'on a l'angle *o*DE de l'aplomb avec la doele, on aura l'angle *o*D*r*=D*on* de la doele avec l'horiſon en y ajoutant l'angle droit.

Remarque ſur l'Uſage.

Les angles des doeles avec les *aplombs*, ou avec les lignes de niveau, particulierement ces derniers, facilitent beaucoup les operations des Traits; parce qu'un ſeul plan horiſontal AC eſt équivalent à pluſieurs BG, DF, E*e*, qui lui ſont néceſſairement paralleles. *Fig.* 315.

Il n'en eſt pas de même des plans verticaux, qui peuvent être tournez differemment, les uns au Midi, les autres au Levant, &c. ainſi le plan horiſontal dont la ligne AC eſt le profil, ſert pour régler l'inclinaiſon des joints de tête & des doeles comme ſes paralleles BG, DF, & y rapporter leurs parties par des *aplomb*, comme LF en *l*C, KG en *d*C, &c. Elle ſert auſſi à y tranſporter les angles des doeles des differens vouſſoirs avec l'horiſon, comme EDF, DBG en faitant *ed* parallele à ED & *d*B parallele à DB; mais à cauſe que les plans verticaux *h*C, EL, &c. peuvent avoir des directions variables, nous en faiſons moins d'uſage que des horiſontaux, comme on le verra par les pratiques ſuivantes.

Application des Propoſitions précedentes à la Conſtruction des Voûtes, pour trouver les Biveaux des Surfaces des Vouſſoirs ſuppoſées Planes, comme de la Doele plate avec ſes Lits, ou de la même Doele avec ſes Têtes.

Le moyen le plus ſimple de trouver les angles d'inclinaiſon des plans inclinez entr'eux, eſt de les conſiderer comme coupans un plan horiſontal ou un plan vertical, vrai ou ſuppoſé; parce que dans les ouvrages d'Architecture on n'a point de régle de conduite plus ſûre que celle du *plomb*, qui donne la poſition verticale, & celle du *niveau*, qui donne l'horiſontale; or nous avons démontré au Theorême précedent qu'un angle en ſituation quelconque étoit égal à la ſomme de ceux que ſes côtez forment avec une ligne horiſontale, ou une ver-

ticale ou à leur ſupplement à deux Droits, lorſque les deux côtez étoient prolongez par le ſommet; donc par le moyen de la prolongation des côtez on peut parvenir à la connoiſſance des angles des plans des vouſſoirs, & les placer dans leur ſituation naturelle à l'égard de l'horiſon; en voici des exemples, qui fourniſſent une methode generale pour les biveau de doele & de lit, & de doele & de tête.

Fig. 317. Premierement, ſi une voûte eſt conique, comme une Trompe droite, dont l'axe eſt de niveau, il eſt viſible que ſon plan BSA peut être pris pour un horiſontal, dans lequel il y a un point S, qui eſt le ſommet du cône, où toutes les ſurfaces de la Trompe; tant doeles que lits, doivent paſſer.

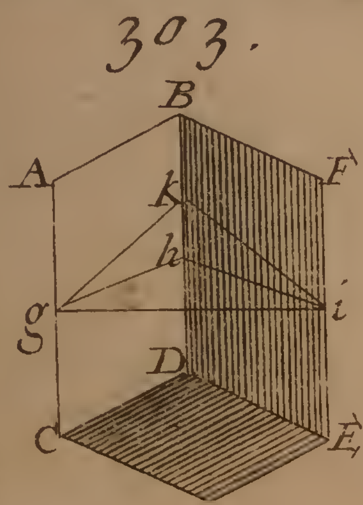
Secondement, que ſi la faſe B*b*A eſt circulaire, tous les plans des lits qui paſſent par les joints de tête 51, 62, ſe coupent auſſi au point C, de même qu'au point S; ainſi leur interſection commune eſt dans l'axe, qui eſt l'horiſontale CS.

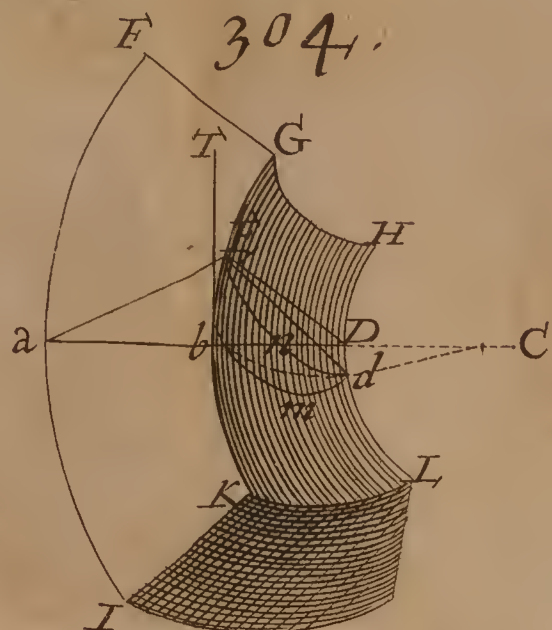
Troisie'mement, que ſi la corde de la doele 21 eſt prolongée juſqu'à la rencontre de l'horiſontale BA en O, la doele plate qui paſſera par cette corde & par le point S coupera le plan horiſontal ſuivant une ligne SO.

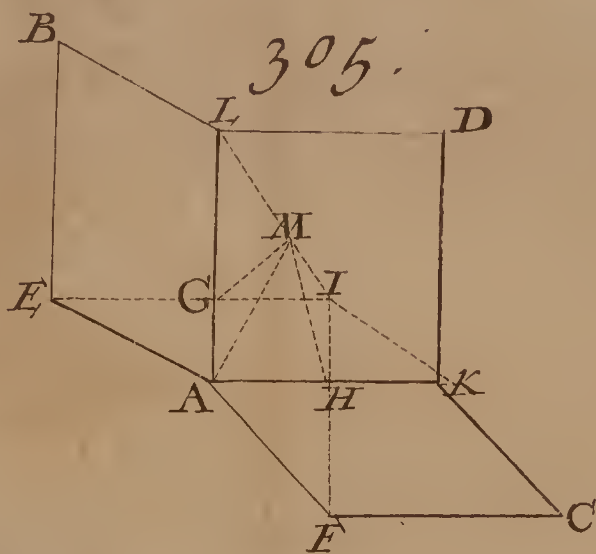
Comme il peut arriver que la corde 2'1 étant peu inclinée à l'horiſonthale BA donneroit un point O hors du plan du deſſein, ce qui feroit incommode. Telle feroit, par exemple, 2'*k* plus encore *b*2, ſi le vouſſoir étoit étroit près de la clef, on peut, pour plus de commodité, au lieu de la ſection horiſontale, chercher celle qui ſe feroit avec un plan vertical C*b* ſans rien changer au fond de la conſtruction; puiſque au lieu de l'angle 2*u*C on auroit ſeulement ſon complement 2*z*C.

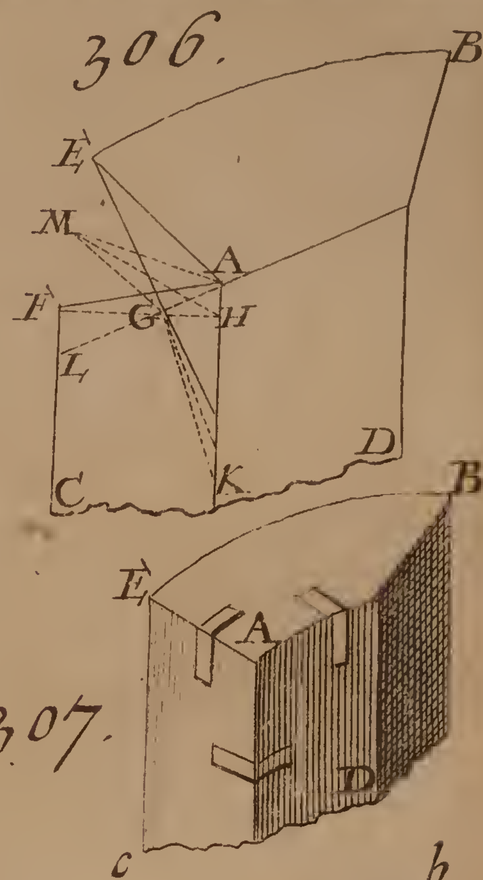
Enfin ſi la corde de la doele devient horiſontale, comme celle de la clef 23, puiſqu'elle doit paſſer comme toutes les autres par le ſommet S, il eſt clair qu'en tirant par ce point S une ligne *fe* parallele à BA, on aura la ſection de cette doele avec l'horiſon.

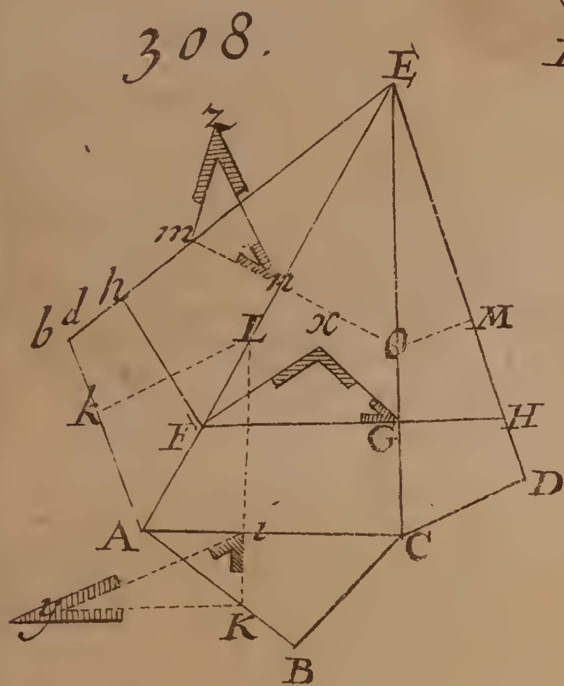
J'ay dit que l'axe étoit la ſection commune de tous les lits avec l'horiſon, j'entends lorſque le cintre eſt circulaire; mais s'il étoit Elliptique & les joints de tête 86, 97 perpendiculaires à cette courbe 67E, leurs ſections ne feroient plus réunies; parce que les joints de tête prolongez couperoient l'horiſontale BA aux points *z z*, & comme les lits paſſeroient cependant encore par le point S les ſections de lits avec l'horiſon feroient les lignes *z* S, *z*.

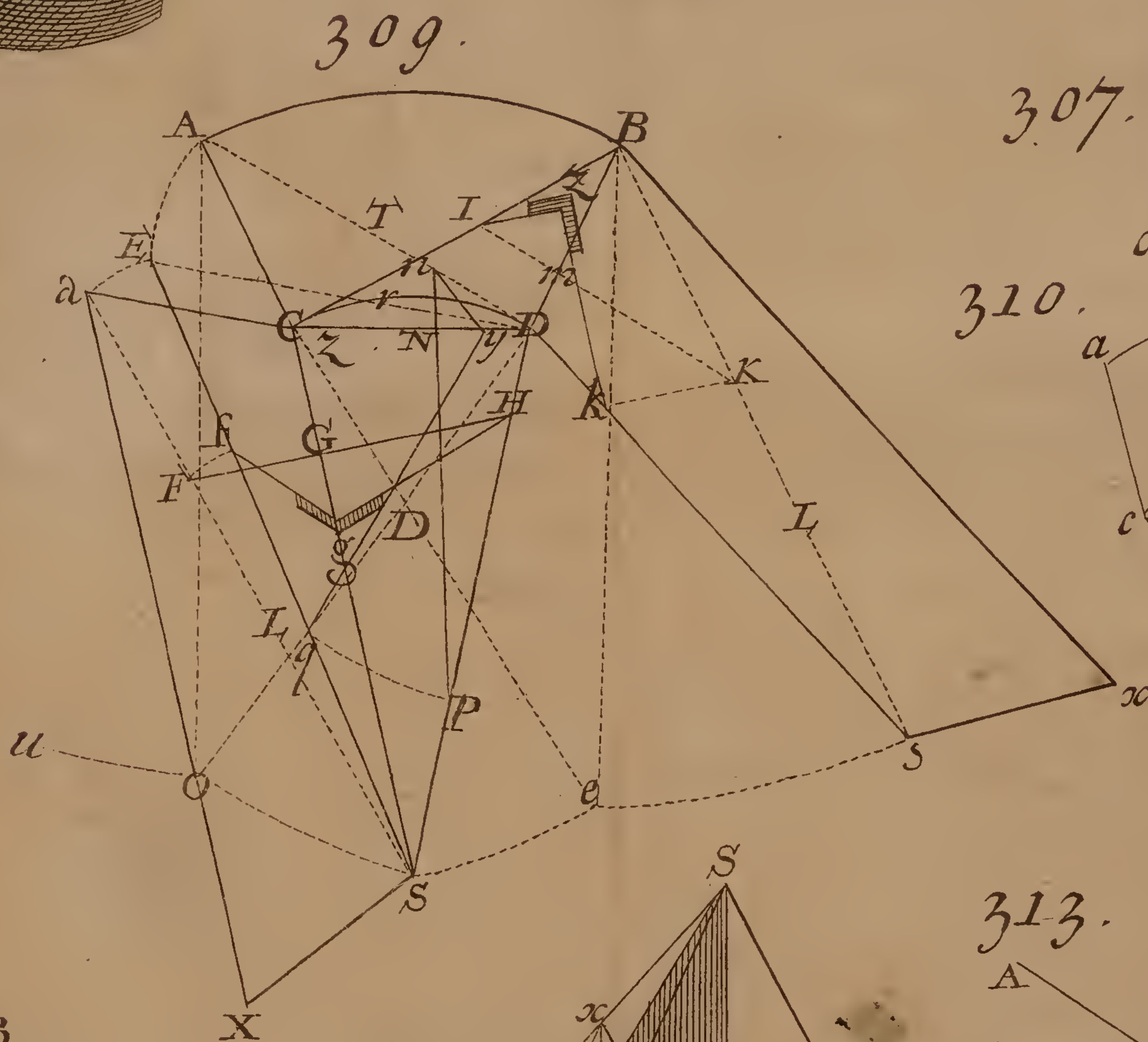

303.
B
A
F
K
h
g
i
D
C
E

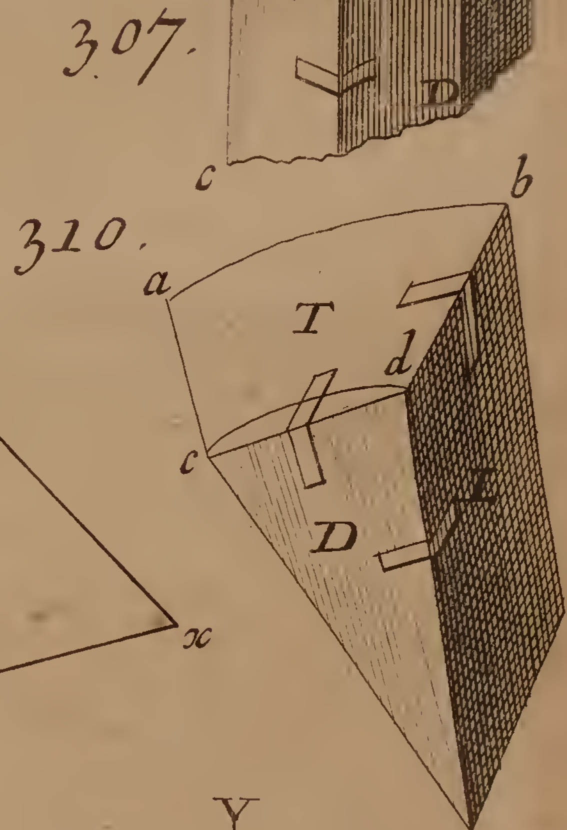

F
304.
T
G
H
a
b
D
C
d
m
K
L
I

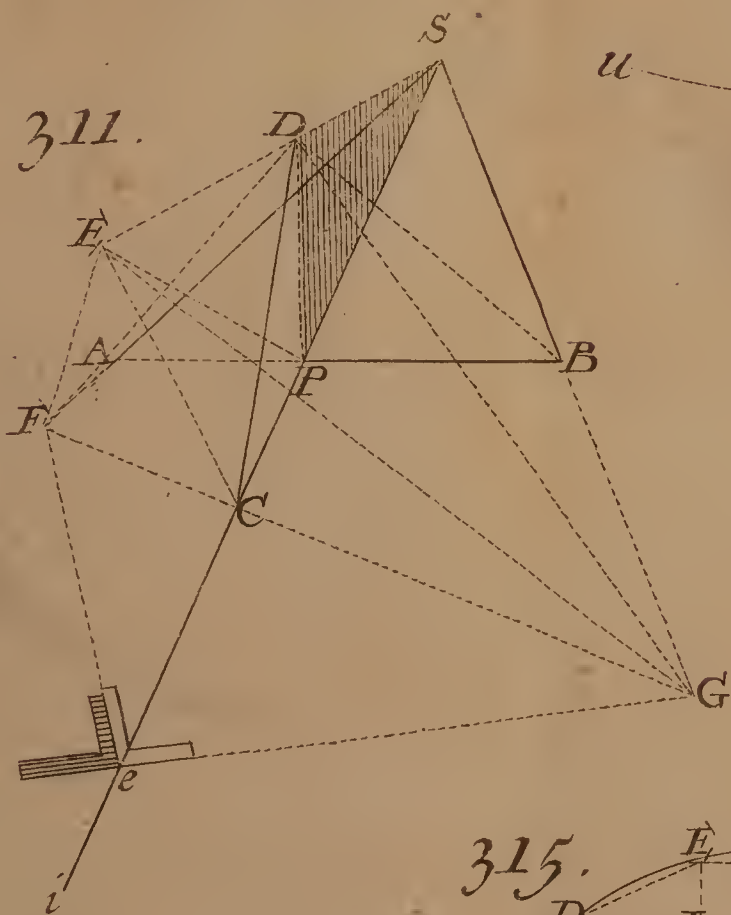

B
305.
L
D
M
E
G
I
A
H
K
F
C

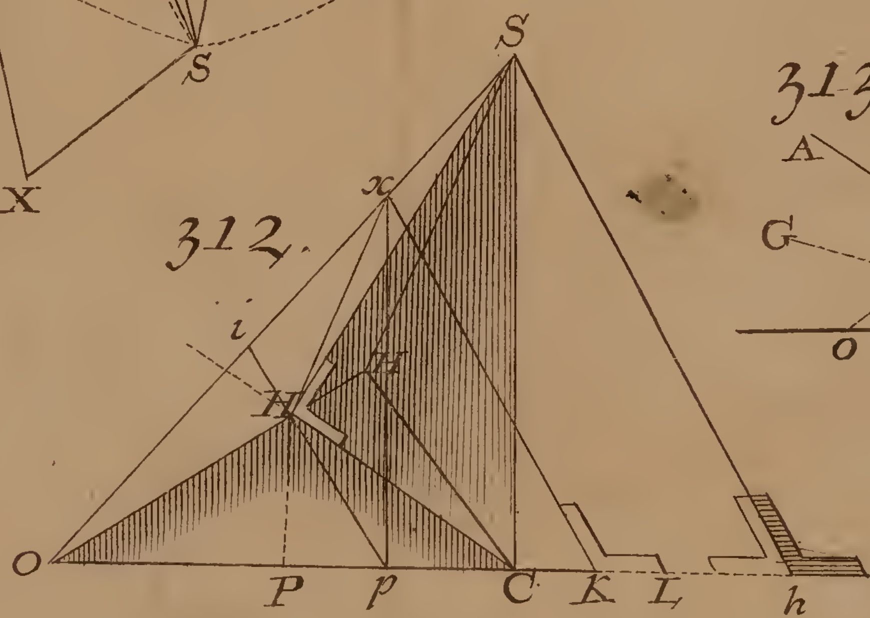

306.
B
E
M
A
F
G
H
L
C
K
D
B
E
A
307.
D
c

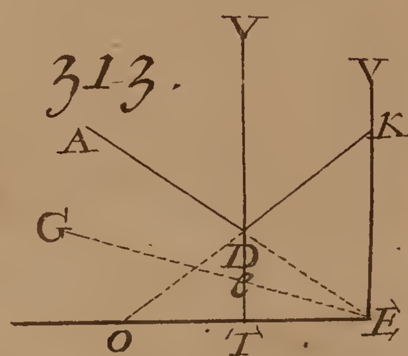

308.
E
Z
m
n
b
d
h
x
O
M
L
k
F
G
H
D
A
i
C
y
K
B

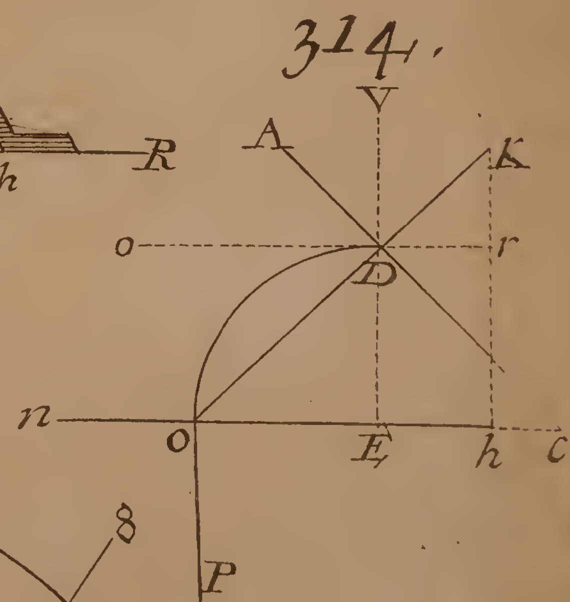

309.
A
B
T
I
E
n
m
a
r
C
Z
N
y
D
H
K
f
G
F
D
g
L
q
l
P
u
O
e
s
x
S
X

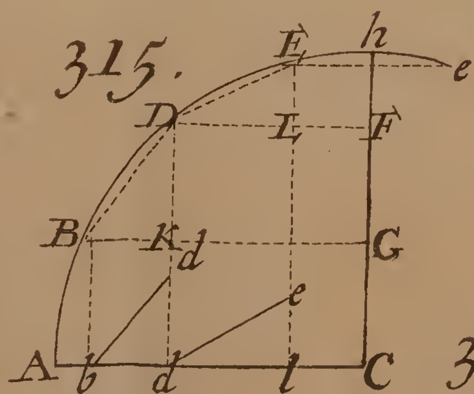

b
310.
a
T
d
c
D
I
S

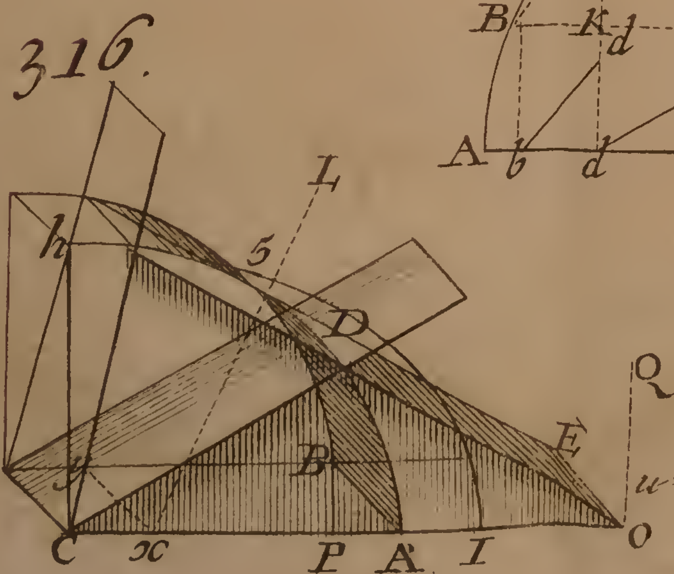

311.
S
D
E
A
P
B
F
C
G
e
i

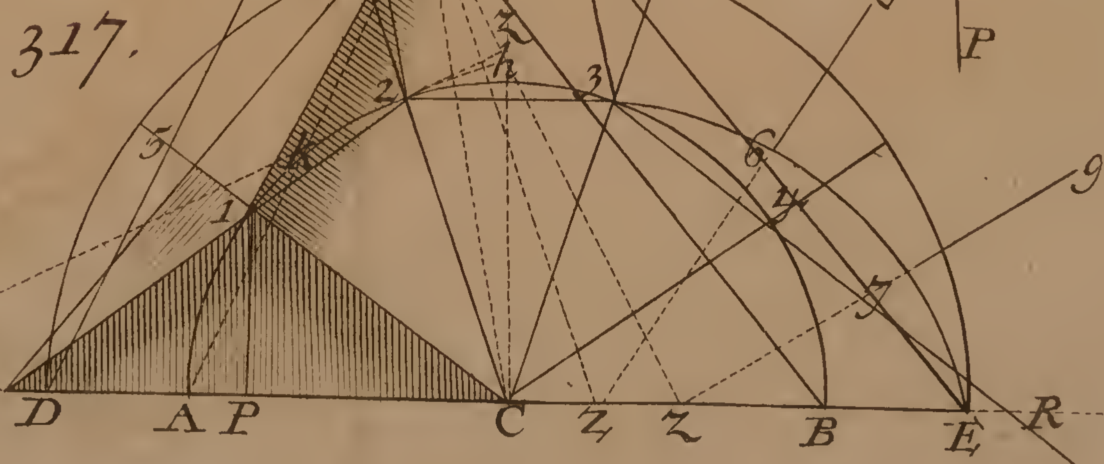

S
x
312.
i
H
m
O
P
p
C
K
L
h
R


313.
Y
Y
A
K
G
D
t
o
T
E


314.
A
V
K
o
r
D
n
O
E
h
c
P


315.
E
h
e
D
L
F
B
K
d
G
e
A
b
d
l
C


316.
L
h
5
D
c
y
B
E
Q
u
C
x
P
A
I
o


317.
x
y
f
S
e
6
8
Z
h
2
3
5
K
1
6
4
9
7
O
D
A
P
C
Z
Z
B
E
R

Presentement si l'on cherche les sections des doeles plates d'un berceau avec l'horison, il est visible que si ce berceau est Droit sur sa face, ce seront des perpendiculaires menées à la ligne de face, comme [*Fig.* 316.] la ligne OQ sur OC ; mais si les berceaux sont biais, la section de chaque doele avec l'horison sera parallele au Piedroit, telle est OE à l'égard du Piedroit AB. *Fig.* 316. *Fig.* 260.

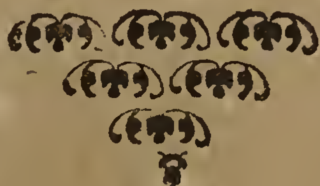
Quant au sections des lits avec l'horison, il en sera comme des coniques, si le cintre est circulaire elles se réüniront à l'axe C*c*, & si le cintre est Elliptique, ce seront des paralleles à l'axe, comme *xy*, provenant du joint L 5 prolongé en *x* pour l'arc Elliptique *b*5I.

A l'égard des doeles plates des clefs, il est visible qu'elles ne peuvent couper l'horison; puisqu'elles lui sont paralleles.

Il nous reste à trouver les sections des doeles plates des Berceaux en descente avec l'horison, on peut le faire de deux manieres. Plan. 26. *Fig.* 318.

Premierement par le profil. Soit, par exemple, le plan horisontal de la descente, ou seulement sa moitié ACDB, son profil CHKR, sur lequel le point F marque la hauteur du joint 1 de la doele plate 12. Ayant tiré FE, qui coupera l'horisontale OC prolongée en *x*, on portera la distance C*x* sur la projection horisontale de ce joint PI, de P en S, & l'on menera par le point O la ligne O S, qui est la section de cette doele plate avec l'horison.

Secondement, on peut faire une supposition, que le berceau, au lieu d'être incliné, soit horisontal, que la ligne R C*q* est une horisontale, à l'égard de laquelle la face HC est inclinée en surplomb. Alors il ne s'agit que de changer le cintre, par exemple, le circulaire, dont le rayon est CH, en un Elliptique surbaissé H*vu*T, dont le petit demi axe est *q*H & le grand axe le double de CH, ce qui est assez clair après ce que nous avons dit des sections des cylindres, mais que nous expliquerons plus au long dans le quatriéme Livre, où nous parlerons des Descentes. Voici la pratique pour tous les cas.



Probleme XIV.

Fig. 319. *Trouver les Biveaux de toutes ſortes de Voûtes ſans former le Cintre de l'Arc-Droit.*

Premierement ceux de Lit & de Doele.

La projection Horiſontale du joint de Lit & l'Elevation de la Face étant donnée.

Premier Cas pour les Voûtes en Berceau de niveau.

Soit le parallelograme ABED, le plan horiſontal d'un berceau biais, dont le cintre de face eſt le demi cercle AHB, & la ligne PN la projection du joint de lit paſſant par le point 2 de ce cintre; on cherche l'angle des plans de la doele plate, qui paſſe par la corde 12, & par le joint de tête 26.

On prolongera la corde 21 juſqu'à ce qu'elle rencontre l'horiſontale AD au point O, par où on menera OS parallele à PN, ou ce qui eſt la même choſe à l'axe CM, enſuite par le point P, projection du point 2, on élevera ſur PN la perpendiculaire PR, qui coupera OS en R, & on la prolongera vers Q juſqu'à ce qu'elle coupe l'axe MC prolongé en Q. On prolongera auſſi NP pour porter la hauteur de la retombée P2 en P 2^x. on tirera du point R la ligne R 2^x, & du point Q la ligne Q 2^x q, l'angle R 2^x q ſera celui du biveau que l'on cherche.

Second Cas pour les Berceaux en deſcente.

Fig. 318. Nous avons dit qu'on peut les conſiderer comme de niveau, ſuppoſant la ligne qR horiſontale, au lieu de la ligne ON; cependant on peut encore les conſiderer comme inclinez à l'horiſon.

Soit le parallelograme ACDB la moitié du plan horiſontal d'une deſcente droite, dont CHKR eſt le profil, A12H la moitié de l'élevation, Pl la projection horiſontale du joint de lit, qui paſſe par le joint de tête 2'6 & fL la projection verticale, ou ſon profil, qui coupe l'horiſontale ON au point x. On portera la diſtance Cx ſur la projection du joint de lit de P en S, puis ayant prolongé la corde de l'arc de tête 2' 1 juſqu'à ce qu'elle rencontre, au point O, l'horiſontale CA prolongée. On tirera par le point S l'indéfinie SOY, qui ſera la ſection du plan de la doele plate 2' 1 prolongée, & du plan de l'horiſon paſſant par la naiſſance du cintre de face en AC.

Ensuite on portera la hauteur de la retombée P2 en Pg^2, d'où l'on tirera au point S la ligne gS, à laquelle on fera la perpendiculaire gQ qui coupera SP prolongée en Q. Sur la même SP prolongée, & par ce point Q on fera une perpendiculaire Yy, qui coupera SO en Y, & l'axe DC en y. On portera la longueur Qg de Q en G par où on tirera les lignes YG & yGI, l'angle YGI est celui du biveau que l'on cherche.

Secondement pour les Voûtes Coniques.

La construction sera tout-à-fait la même que la précedente.

Soit le triangle ASB le plan horisontal d'une Trompe dont le cintre *Fig.* 320. de face est l'arc AbB, & la ligne PS la projection horisontale du joint de lit passant par le point 2. & l'axe CS. On prolongera la corde 21 du 2.[e] voussoir jusqu'à ce qu'elle rencontre l'horisontale BA prolongée en O, & l'on tirera OS, qui sera la section de la doele plate prolongée, avec le plan horisontal qui passera par AB, & le sommet S de la Trompe qu'on suppose dans le même.

On élevera ensuite au point P projection du point 2 la perpendiculaire PX égale à P2, sur la ligne PS; & ayant tiré XS, on fera au point X la perpendiculaire XQ sur XS, qui coupera SP prolongée en Q, & par ce point Q ayant fait sur la même SQ la perpendiculaire oR qui coupera SO en o, & l'axe SC en R, on portera la longueur QX en Qx, & des points o & R on tirera ox & RxV, l'angle oxV sera celui du biveau que l'on cherche, qui est celui du plan de la doele plate passant par 2.1 du second voussoir, avec celui du second lit passant par le joint de tête 2.5 de l'élevation.

Si cette voûte conique étoit en descente par son axe on trouveroit comme aux Berceaux en descente un autre point S, par le moyen du profil, qui ne seroit pas alors le sommet du cône.

Application aux Voûtes Sphériques & Sphéroides.

Suivant ce que nous avons dit en parlant du dévelopement, on peut réduire les sphères & les sphéroides en plusieurs zones de cônes tronquez, inscrits dans celles de la sphère, d'où il suit que l'on peut trouver les biveaux de ces parties coniques de la même maniere que pour les cônes entiers, les réduisant par les doeles plates en Pyramides tronquées; & par consé quent que cette methode convient aussi bien aux voûtes sphériques & sphéroides qu'aux trompes & autres voûtes coniques.

Troisiémement, pour les Angles Saillans ou Rentrans faits par la rencontre de deux Berceaux.

Premier Cas des doeles plates égales ou inégales, qui ont leurs naissances de niveau entr'elles, & se coupent en arête saillante, ou en angle rentrant comme aux arcs de Cloitre.

Fig. 321. Soit l'arc EAB*b* le cintre de l'arête d'enfourchement, & la ligne EC sa projection horisontale. Soit AB la corde de l'arête des seconds voussoirs, dont *m*M ou son égale a*b* est la projection, & les lignes aD & a*d* celles de la section du plan horisontal, qu'on suppose passer par le point A comme au profil AG, lesquelles font l'angle horisontal Da*d* parallele à celui des murs de piedroits de la voûte; il est clair que cet angle peut être pris pour la base d'une Pyramide tout-à-fait semblable à celles des exemples précedens, puisqu'elle est formée par les plans de doeles & de lit; par conséquent on peut en trouver les angles de la même maniere; & comme l'application en est si facile qu'on peut la faire de soi-même, je vais, pour un peu de varieté donner une autre construction, qui est cependant la même renversée.

Par le point B sommet de l'arête on tirera l'horisontale PBO parallele à EC, sur laquelle par le point A on menera la perpendiculaire AP, qui coupera HO en P, par où on tirera sur la corde AB la perpendiculaire PQ, dont on portera la longueur du point *b* de la projection a*b* de la corde AB en *q*, pour tirer de ce point en D & *d* les lignes *q*D, *q d* qui comprendront l'angle D*q d* du biveau que l'on cherche.

S'il s'étoit agi des premiers voussoirs, dont la corde de l'arête est la ligne EA, on auroit mené par le point A la ligne *h* G, puis par le point E la perpendiculaire E*p*, & par le point *p* la ligne *p x* perpendiculaire sur EA, laquelle differe peu en longueur de la ligne *p* A; ce qui fait voir que l'angle *mxm* differe peu à la naissance de l'angle *m e m*.

On peut prendre sur *h* G tout autre point que *p* si l'on veut, par exemple *h*, alors il faudroit abaisser la perpendiculaire *h i* sur a *e* prolongée, & mener par le point *i* des paralleles *i* A, *i* K aux lignes a D, a *d*, qui couperont la perpendiculaire *m m* prolongée aux points A, & K; puis on portera *h* F, qui est la perpendiculaire sur la corde EA de a en *y*, l'angle K*y* A sera celui que l'on cherche.

Pour montrer que cette construction revient à la même fin que les précedentes par la methode génerale, dont elle n'est qu'une modification,

tion, j'en ai mis la figure au deſſous, répetant les projections du même profil EAB*b*; ſçavoir *n*N = a*b*, l'angle V*nu* = Da*d*. On élevera au point N la perpendiculaire NS égale à la hauteur BG de la retombée du profil; on menera *n*S, & ST perpendiculaire à *n*S, qui coupera *nx* au point T, par où on menera la perpendiculaire *u*V, qui coupera les ſections de la doele avec l'horiſon aux points *u*, V. On portera la longueur TS en TY ou T*y* du point Y ou *y*, on tirera les lignes Y*u*, YV ou *yu*, *y*V, l'angle *u*YV ou *uy*V eſt celui du biveau que l'on cherche, par le Problême précedent.

Quatrièmement, pour les angles ſaillans ou rentrans formez par des doeles plates, dont les naiſſances ne ſont pas de niveau, mais l'une de niveau & l'autre rampante, tel eſt l'enfourchement d'un berceau de deſcente qui en rencontre un autre de niveau.

Pour réſoudre ce cas il faut chercher la ſection de la doele rampante avec le plan horiſontal, qui paſſe par la naiſſance horiſontale de l'autre.

Soit [*Fig.* 323.] le parallelograme ACDB la projection horiſontale de deux portions de doeles plates ACD, ADB, qui ſe coupent ſuivant une ligne AD, enſorte cependant que la naiſſance de l'une AC eſt de niveau, & la naiſſance AB de l'autre en deſcente ſuivant un angle donné BAG. *Fig.* 323.

On élevera ſur la projection de l'arête AD la perpendiculaire DH égale à la hauteur de la retombée, qu'on ſuppoſe connuë par le profil de cette arête, & l'on tirera AH, qui repréſentera l'inclinaiſon de l'arête. Sur CD prolongée on portera la même hauteur DH en DN; du même point D on menera une perpendiculaire ſur AB prolongée, qui la coupera en F, & le profil de deſcente AG en G. On portera FG ſur FA en F*g*; enſuite par les points trouvez *g* & N, ont tirera la droite *g*N qui coupera DG au point *z*, la ligne menée du point A par *z* ſera la ſection de la doele en deſcente avec l'horiſon, qui paſſe par les points A & C: il ne s'agit plus préſentement que de conſtruire le Problême comme à l'ordinaire.

On peut encore trouver cette ſection d'une autre maniere en portant la hauteur de la retombée DH perpendiculairement ſur CD en D*h*, & faiſant l'angle D*hy* égal au complément de celui de la deſcente BAG, ou ce qui eſt la même choſe tirant *hy* parallele à AG juſqu'à ce qu'elle rencontre CD prolongée en *y*; la ligne A*y* ſera la même ſection de la doele en deſcente avec l'horiſon qui paſſe par la naiſſance de celle de niveau; ainſi on pourra conſtruire le Problême comme les précedens.

On fera HE perpendiculaire ſur AH qui coupera AD prolongée en E, par où on tirera la perpendiculaire KL, qui coupera les ſections de l'horiſon AC, Az, prolongées en K & en x. On portera la longueur EH en EI ſur AD prolongée, on tirera les lignes KI & Ix, l'angle KIx eſt celui du biveau que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Toutes ces conſtructions ſe raportent ſi facilement au Problême précedant qu'il n'eſt pas néceſſaire de les démontrer. Cette derniére ſeulement demande quelque explication. Si l'on ſuppoſe la ligne AG dans un plan vertical ſous AF, il eſt clair que le point G tombera ſous le point F. Si l'on ſuppoſe auſſi DH, ou ſon égale DN élevée verticalement ſur l'horiſontal ADF, le point N tombera ſur le point D au deſſus de l'horiſon. Il eſt donc viſible que ſi de ce point N on tire une ligne au point *g* poſé à angle Droit avec la ligne horiſontale DF, & à diſtance du point F égale à FG, on aura ſur le plan horiſontal l'expreſſion des deux triangles ſemblables DNz au deſſus de l'horiſon & F*gz* au deſſous, qui les diviſe en *z*. Donc la ligne Az eſt la ſection de l'horiſon; car ſi on les fait mouvoir ſur FD comme ſur une charniere juſqu'à ce qu'elles ſoient en ſituation verticale, la ligne N*g* exprimera la pante du plan ADB, laquelle ſe plonge ſous l'horiſon, qui paſſe par AC au point *z*, *ce qu'il falloit trouver.*

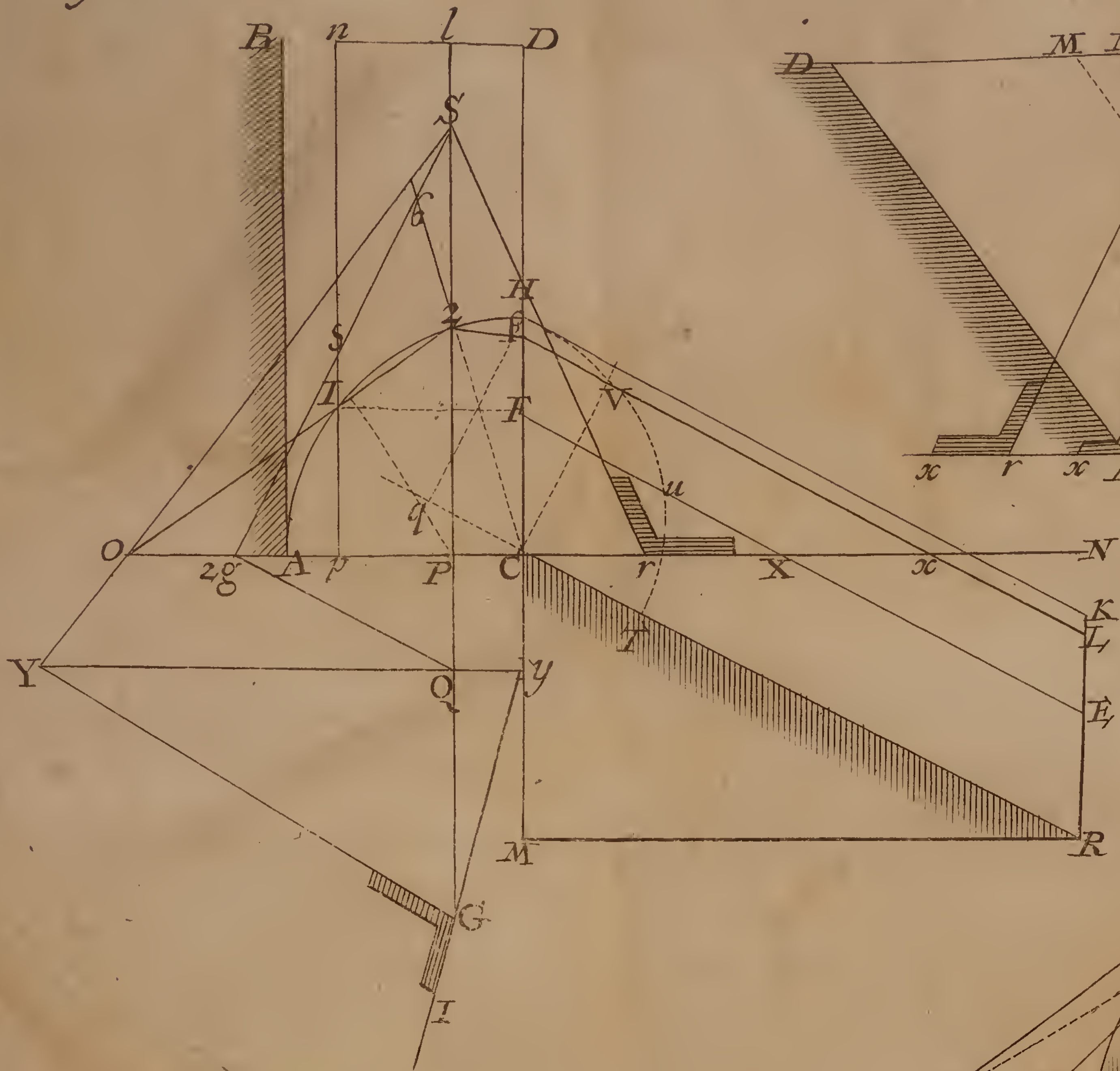
La démonſtration de la ſeconde maniere eſt encore plus ſimple; car puiſque *hi* eſt parallele à AG [par la conſtruction] les triangles rectangles AFG, *yh*D ſont ſemblables, & à cauſe des paralleles AF, D*y* ſemblablement poſées à l'égard du plan incliné ADB, quoique tournez en ſens contraire, on aura FG : D*h* : : AF : D*y*, c'eſt-à-dire, que l'abaiſſement ſous l'horiſon eſt à la hauteur au deſſus, comme le commencement de la deſcente au deſſous eſt au commencement de la montée au deſſus, ce qu'exprime la ligne tirée d'un point A de l'horiſon à l'autre *y*, *qu'il falloit trouver.*

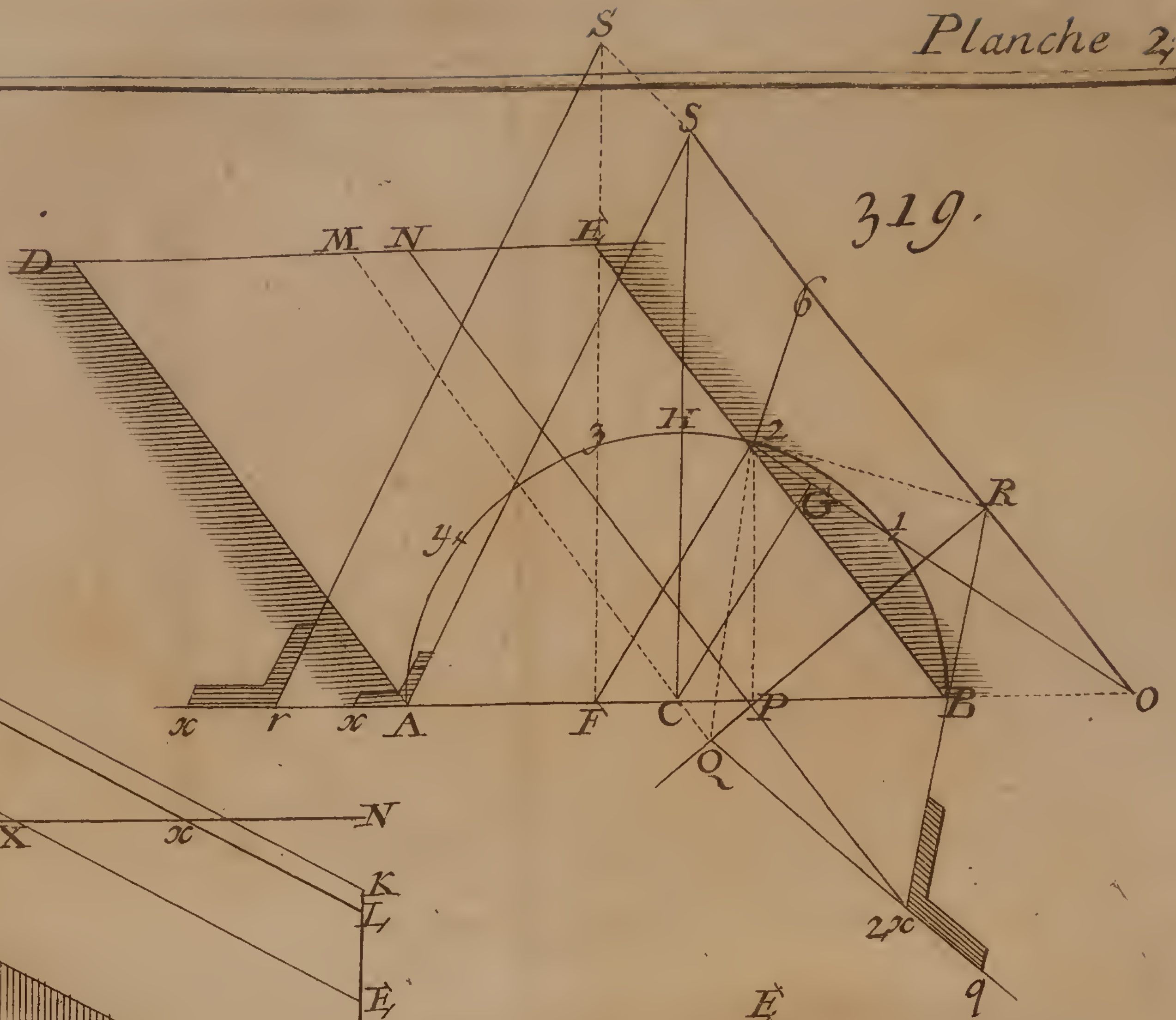
NB. *Cette Démonſtration doit être immédiatement avant le Problême* XIII. pag. 377.

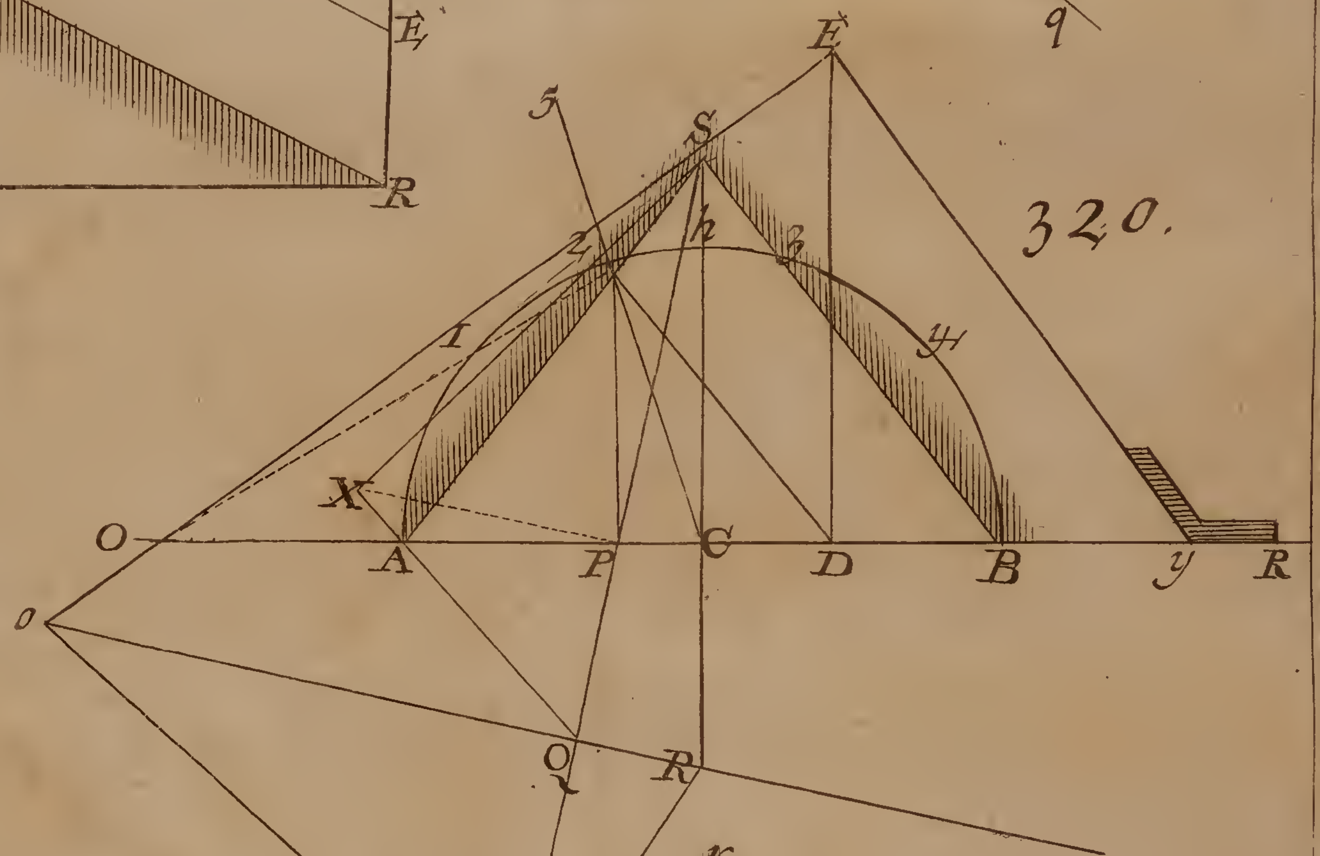
DEMONSTRATION.

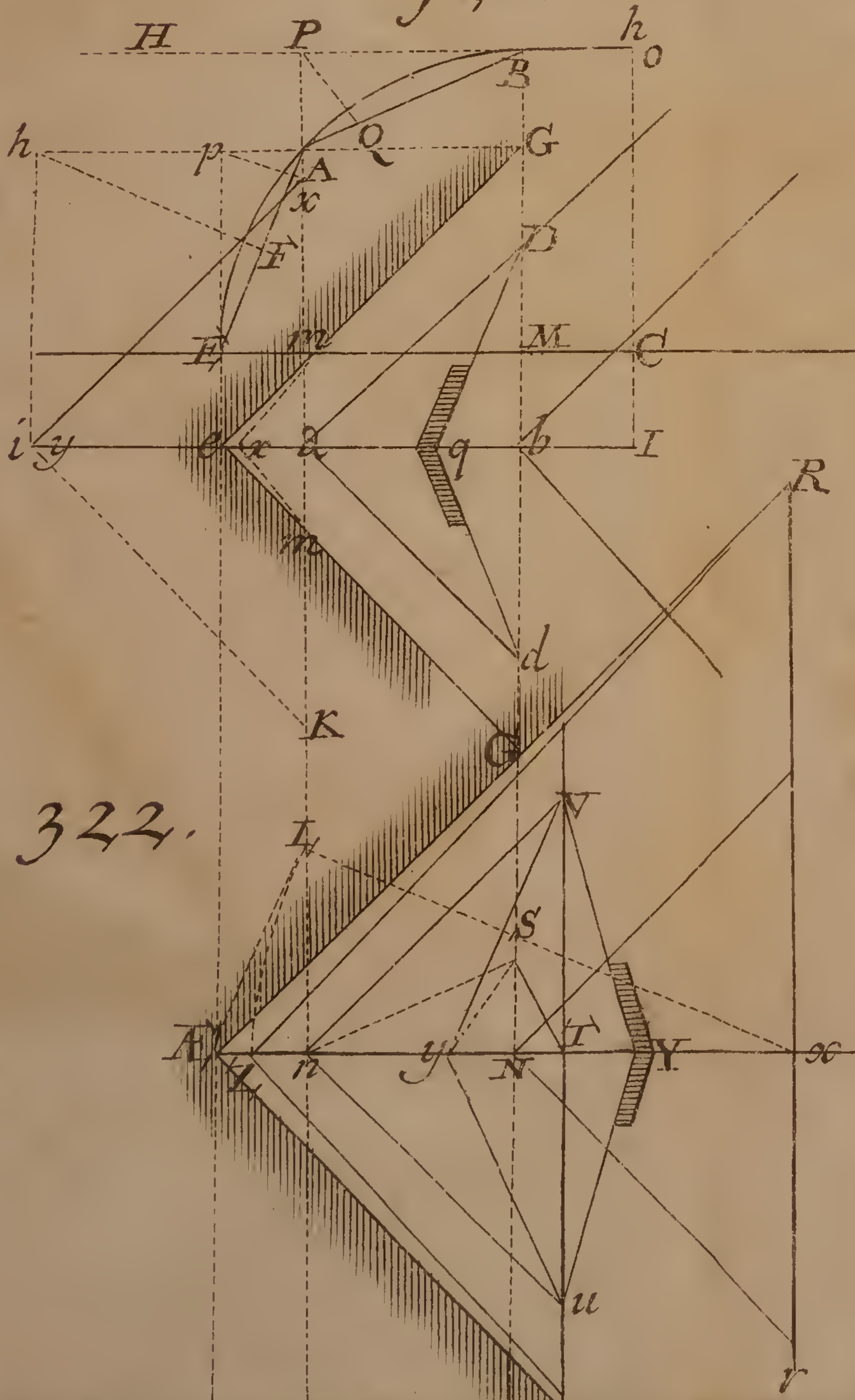
Il ſemble qu'il y a quelque difference dans les conſtructions que nous venons de propoſer aux figures 308. & 309. mais ſi l'on y fait bien attention on verra qu'elle n'eſt qu'apparente; ainſi la démonſtration de l'une ſert pour l'autre.

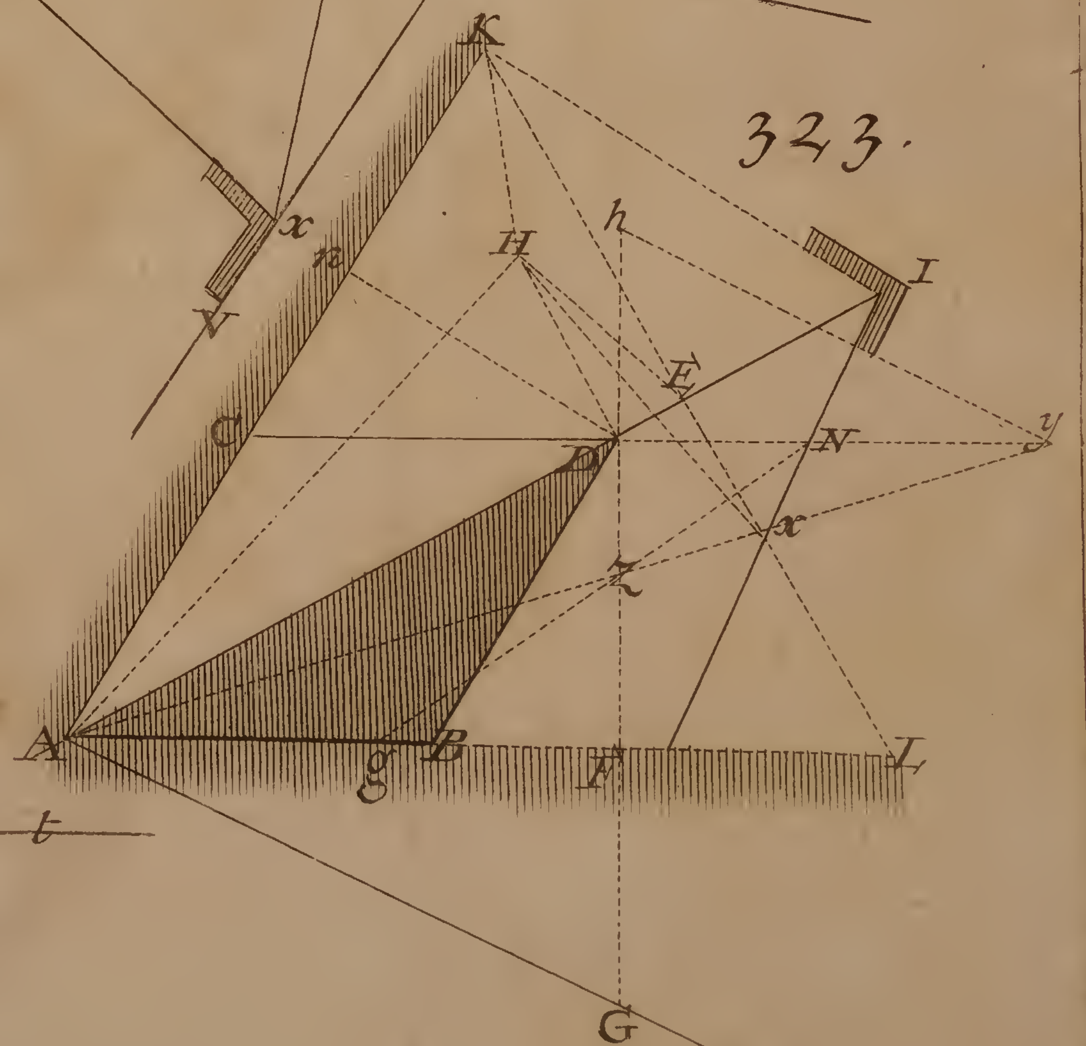
Fig. 308. Si l'on imagine [*Fig.* 308.] que le triangle ACE reſtant immobile les deux autres ABC, ECD ſe meuvent au tour de leurs cótez AC & CE, comme ſur des charnieres juſqu'à ce que les points B & D ſe réuniſſent, enſorte que les lignes CB & CD ſe confondent en une, il ſe for-


318.


319.


320.


321.
322.


323.

mera de ces trois triangles ou plans un angle solide en C, & une pyramide triangulaire fermée par un quatriéme triangle, égal à celui qu'on a marqué en AE b^d, qui a ses trois côtez égaux à un chacun des autres triangles, avec lesquels il forme la pyramide. Or il est clair que par le mouvement du plan CDE sur le côté CE la ligne droite FH se plie en G sans changer de situation à l'égard de CE, jusqu'à ce que le plan ACB rencontre celui où elle est, lorsqu'ils se réunissent sur le côté CD, alors le point H tombera sur le côté Eb^d, où les points B & D se réunissent en b_d, & le point H en b; c'est pourquoi on a fait la longueur Eb égale à EH; ainsi supposant un plan qui coupe la pyramide perpendiculairement au côté CE par le point G, il coupera le triangle EAb^d par la ligne bF, qui est la soutendante de l'angle des plans AEC, DEC représentée par la ligne Fx son égale; donc l'angle FGx est bien trouvé par cette construction, *ce qu'il falloit démontrer.*

Presentement si on examine la construction qui donne les Biveaux d'un voussoir de Trompe à la fig. 309. on reconnoîtra qu'elle est dans le fond parfaitement la même que la précedente, quoique avec quelque petit changement; car on y a trois triangles donnez en dévelopement sur un plan; sçavoir aCS portion d'un panneau de lit; DCS panneau de doele plate entiere, & DCA portion du panneau de tête, lesquelles trois surfaces doivent dans l'exécution former un angle solide en C; par conséquent il faut les plier de maniere que l'intervale ACa, que laisse le dévelopement, soit supprimé joignant le point A au point a, ensorte que les deux lignes CA Ca se confondent en une, ce qu'on ne peut faire qu'en faisant mouvoir les triangles DCA & SCa sur les côtez CD & CS, le panneau de doele SCD restant immobile; c'est pourquoi des points D & S pour centre on a fait mouvoir les lignes DA & Sa, lesquelles se rencontrant en E, prennent la situation des côtez d'un quatriéme triangle SED, qui ferme la pyramide formée par les trois surfaces données; mais dans les differentes circonstances on change la situation de ce triangle à l'égard des surfaces données. Pour les Biveaux de doele & de lit, on le met dans la situation SED; pour ceux de tête & de doele, à la situation DOA; & pour les biveaux de tête & de lit à la situatinn CeB, où il faut remarquer qu'il a toujours un côté commun avec une de ces surfaces dont on cherche l'angle qu'elle fait avec sa contiguë.

Remarque sur l'Usage.

On sçait qu'il n'y a pas de maniere plus generale & plus simple pour trouver les angles plans des figures rectilignes, que de les

diviser en triangles, qui sont les premiers élemens des surfaces, puisqu'on ne peut enfermer un espace à moins de trois lignes. Par une semblable raison il n'y a pas de maniere plus generale pour connoître les angles solides que font les angles plans dans des surfaces qui se rencontrent, que de réduire les Corps en Pyramides triangulaires; car les Tetraedres réguliers ou irréguliers sont leur derniere réduction, ou si l'on veut leurs premiers élemens; puisqu'on ne peut enfermer une espace de corps à moins de quatre surfaces triangulaires. Et que toute Pyramide de base Polygone d'un nombre de côtez au dessus du triangle, pourra en contenir autant de triangulaires que sa base contiendra de triangles; ainsi on peut dire que ce Probléme est general pour trouver les angles des plans de tous les corps imaginables compris par des surfaces planes, comme on le verra par les applications que nous en ferons aux Traits des Voûtes dans le quatriéme Livre.

A l'égard des angles solides formez par des surfaces courbes, qui font entr'elles des angles curvilignes ou mixtes, qu'on ne peut mesurer immediatément, mais seulement par les cordes de leurs arcs, il est clair que la même methode doit encore avoir lieu; puisqu'on peut faire passer des surfaces planes par ces cordes & inscrire ou circonscrire des Pyramides de surfaces planes triangulaires à des Pyramides triangulaires de surfaces courbes ou mixtes. C'est même une nécessité; car puisque nous ne parvenons à la connoissance des lignes courbes que par le secours des droites, nous ne parvenons aussi à la formation des surfaces courbes que par la médiation des planes.

FIN DU PREMIER TOME.





EXPLICATION DES TERMES

Les plus usitez pour la Coupe des Pierres,

Rangez par ordre Alphabetique.

A.

Abatuë, c'est la distance horisontale de la naissance d'un arc à la perpendiculaire, qui tombe d'une division de cet arc ou de son extrémité supérieure sur son diametre horisontal. Ce terme n'est plus guerès en usage ; on se sert de celui de *Retombée*. Voyez Retombée.

Amaigrir. Voyez Démaigrir.

Annulaires, j'appelle ainsi les voûtes dont la figure imite les anneaux en tout ou en partie, telles sont les voûtes *sur le noyau*. Voyez Noyau.

Anse de Panier. Voyez Berceau & Ceintre.

Apareilleur, c'est le conducteur d'un bâtiment qui préside à l'apareil, c'est-à-dire, aux mesures, à l'arrangement & à l'assortiment des pierres, qui les trace de la grandeur & figure dont elles doivent être, pour diriger les Tailleurs de pierre qui les taillent ; c'est pourquoi il doit sçavoir la Coupe des pierres, pour exécuter les desseins des Architectes dans les Bâtimens Civils, & des Ingenieurs dans les Fortifications.

Arc est une portion de ligne courbe à laquelle on donne differens noms suivant la figure & ses usages.

Arc-Droit est celui dont la corde est perpendiculaire au joint de lit d'une voûte, lorsque ce joint est droit ; ou à sa tangente au point de rencontre, lorsqu'il est courbe ; c'est ainsi que l'entend le P. Deran,

qui confond l'Arc-Droit avec le Biveau ; mais pour mieux expliquer ce mot :

L'Arc-Droit proprement dit eſt la ſection d'une voûte perpendiculairement à ſon axe & à ſes côtez, ou aux tangentes à ſes côtez.

D'où il ſuit 1.° qu'il n'y a point d'Arc-Droit proprement dit aux voûtes coniques, parce qu'un plan ne peut être perpendiculaire à leurs axes & à leurs côtez qui ſont convergens.

2.° Qu'il y a des Arcs-Droits aux voûtes ſphériques, parce que leurs tangentes ſont paralleles à leurs diametres.

3.° Qu'il y a auſſi des Arcs-Droits dans les Annulaires & dans les Vis où les tangentes ſont perpendiculaires à leurs diametres ; parce que la tangente du côté eſt parallele à celle de leur axe courbe dans la ſection perpendiculaire à cette tangente.

Arc Rampant, c'eſt une ligne courbe dont les deux extrémitez priſes aux appuis de leurs naiſſances, qu'on appelle *impoſtes*, ne ſont pas de niveau, & dont les diametres conjuguez ne ſont pas à l'équerre, c'eſt-à-dire, dont l'aplomb de la clef eſt oblique à la ligne de rampe des impoſtes, telles ſont les arcades qu'on fait ſous les rampes des eſcaliers & des Terraſſes en deſcente, ce qui fait que ces ſortes d'arc ne peuvent jamais être d'une ſeule portion de cercle, mais de quelqu'autre ſection conique ou de ſpirale.

Arc de Cloitre, on appelle ainſi une voûte compoſée de deux, trois, quatre ou pluſieurs portions de berceaux, qui ſe rencontrent en angle rentrant dans leur concavité, enſorte que leurs côtez forment le contour de la voûte en polygone. Tels ſont, par exemple, les petites voûtes ou chapitaux des Guerites à Pans. Si les berceaux cylindriques ſe rencontroient au contraire en angle rentrant ſur leur convexité, ou ce qui eſt la même choſe, en angle ſaillant ſur la concavité, la voûte changeroit de nom, elle s'appelleroit *Voûte d'Arête.*

Arc-Doubleau eſt un arcade en ſaillie ſur la doele d'une voûte qu'elle traverſe à angle Droit, de ſorte qu'elle lui fait en cet endroit une eſpece de *doublure*, ſoit pour la renforcer, ſoit pour cacher quelqu'arête de rencontre, comme aux voûtes Gotiques, ou pour faire une liaiſon d'un pilaſtre ou d'une Perche à ſon oppoſée.

Lorſque ces arcs ne ſont pas perpendiculaires à la direction de la voûte, mais en diagonale, on les appelle *Ogives* ou *Augives* ; on n'en voit de cette eſpece que dans l'Architecture Gotique.

Arcade eſt une voûte de peu de profondeur en portion de berceau.

Arche eſt à-peu-près la même choſe ; mais ce terme ſemble conſacré ſeulement aux ponts.

Arceau eſt une petite arche ſur un ruiſſeau.

Architecture, dans le mauvais jargon des Ouvriers, qui a paſſé depuis peu aux Architectes, ſignifie ſouvent une Moulure. Ainſi on lit dans le devis imprimez pour la conſtruction des Bâtimens Civils du Roy à Paris *une Corniche avec ſes Architectures*, pour dire avec ſes Moulures.

Arête, c'eſt l'angle ſaillant que font deux ſurfaces droites ou courbes d'une pierre quelconque ; lorſque les ſurfaces concaves d'une voûte ſe rencontrent en angle ſaillant, on l'appelle *Voûte d'Arête.*

Arriere-Vouſſure, c'eſt une ſorte de petite voûte, dont le nom exprime la poſition ; parce qu'elle ne ſe met que derriere l'ouverture d'une baye de porte ou de fenêtre, dans l'épaiſſeur du mur, au dedans de la feüillure du tableau des piedroits. Son uſage eſt de former une fermeture en Platebande, ou en plein ceintre ou ſeulement bombée.

Celles qui ſont en platebande à la feüillure du Linteau & en demi cercle par derriere s'appellent *Arriere vouſſure de S. Antoine.*

Celles au contraire qui ſont en plein ceintre à la feüillure & en platebande par derriere, s'appellent *Arriere vouſſure de Montpelier.*

Lorſque dans la premiere eſpece l'arc intérieur eſt beaucoup moindre que le demi cercle, l'arriere vouſſure s'appelle *Réglée & Bombée.*

Dans le même cas pour la ſeconde eſpece il n'y a pas de nom particulier, on peut l'appeller *Bombée en avant & réglée en arriere*, par l'inverſe de la précedente.

Lorſque l'arriere vouſſure eſt en plein ceintre ſur le devant & ſeulement bombée en arriere, on l'appelle *Arriere vouſſure de Marſeille.*

B.

Balevre du Latin *Bis labra*, qui a deux levres, eſt l'excedent d'une arête ſur celle de la pierre contigue, c'eſt auſſi l'éclat d'une arête qui s'eſt caſſée, lorſque les joints ſont trop ſerrez.

Bandeau, ornement tout uni en ſaillie, comme une bande plate ſur le nud d'un mur, autour d'une baye de porte ou de fenêtre. Si ce Bandeau eſt orné de moulures il s'appelle *Chambranle.*

Bander une arcade ou une platebande, c'eſt arranger les vouſſoirs ou les claveaux ſur leurs ceintres & les ſerrer par des coins.

Berceau par analogie au couvert qu'on a coutume de mettre ſur les berceaux des enfans, eſt une voûte cylindrique quelconque dont la courbure peut être de differente eſpece ; lorſqu'elle eſt circulaire enſorte que ſon contour ſoit un demi cercle complet on l'appelle *Plein ceintre*.

Si, ſuppoſant la largeur égale, la hauteur eſt moindre on l'appelle *en Anſe de panier* ou *ſurbaiſſé*.

Si la hauteur excede le demi cercle, on l'appelle *Surhauſſé* ou *Surmonté*.

Si ſes naiſſances ne ſont pas de niveau il s'appelle *Rampant*.

Un Berceau à l'égard de la direction de ſes faces s'appelle *Droit*, lorſque la face eſt perpendiculaire à la direction, & *Biais* lorſqu'elle eſt oblique.

Beveau ou *Beuveau* ou *Buveau*, ce dernier eſt le terme du P. Deran, les Ouvriers qui diſent Biviau ou *Biveau* conſervent mieux l'étimologie du mot *Bivium*, chemin fourchu. En effet c'eſt le modele de l'ouverture d'un angle quelconque rectiligne, curviligne ou le plus ſouvent mixte, pour former l'angle d'inclinaiſon de deux ſurfaces qui ſe rencontrent; lorſqu'elles ſont planes, on ſe ſert pour Biveau d'une Sauterelle ou d'une fauſſe équerre à branches mobiles, lorſqu'une des deux ſurfaces eſt courbe ou toutes les deux, le Biveau eſt un inſtrument de bois fait exprès, en forme d'équerre ſtable, je veux dire, dont les branches ne s'ouvrent ni ſe ferment.

Nous avons dit ci-devant que le P. Deran confond ſouvent le *Biveau* avec l'*Arc-Droit*.

Biais, c'eſt l'obliquité d'une face à l'égard de la direction d'une voûte ou d'un jambage à l'égard d'un paſſage.

Biais paſſé, on appelle ainſi une voûte en berceau biaiſe par devant & par derriere, dont les joints de lit ne ſont pas paralleles aux côtez du paſſage, comme dans les voûtes ordinaires biaiſes, mais dont la direction tend à des diviſions de vouſſoirs inégaux, en ſituation inverſe du devant au derriere, c'eſt-à-dire, de l'entrée à la ſortie, de ſorte que les joints de lit à la doele ne doivent pas être droits, comme les font les Auteurs de la coupe des pierres.

Bombé ou *Bombement* ſe dit d'un arc peu élevé au deſſus de ſa corde ou du moins beaucoup moindre que le demi cercle.

Lorſqu'au lieu de s'élever l'arc s'abaiſſe au deſſous de ſa corde, on l'appelle *bombé en contre-bas*, comme il arrive au platebandes mal faites.

Bornoyer ou *borneier*, c'eſt regarder avec un œil en fermant l'autre, comme

comme si l'on étoit borgne, pour mieux distinguer les défauts d'alignement ou la difference de direction des côtez d'une pierre, & voir si une surface est plane, ou de combien elle est Gauche.

Branches d'Ogives, ce sont les arcs des Nervures des voûtes Gotiques, qui font saillie sur le nœud de ces voûtes dans l'intervale des croisées entre les pilliers.

Branches de voussoir. Voyez Enfourchement.

Branches de biveau ou de sauterelle sont les côtez des instrumens, le P. DERAN les appelle les *doigts*, DAVILER, *les bras*.

Bras de biveau. Voyez Doigt.

Buter, c'est appuyer les *Reins* d'une voûte par quelque contrefort ou arc-boutant.

C.

Calibre, dans la coupe des bois signifie un modele fait de planche, contournée suivant une ligne courbe qui doit déterminer le contour d'une surface qu'on se propose de faire. Dans les ouvrages de plâtre c'est un profil de corniche, fait avec une planche de cuivre ou de bois pour diriger les moulures en le trainant en ligne droite perpendiculairement à la direction de la Corniche, cet instrument est une espece de Cerche.

Calotte est une portion de voûte sphérique ou sphéroide qu'on fait au milieu des voûtes & platfonds pour les élever en cet endroit.

Canoniere est un vieux mot qui signifioit ce que nous appellons aujourd'huï *embrasure* à mettre du canon c'est une voûte conique. Voyez voûte en canoniere.

Carton, feüille de carton contournée suivant un profil, qui peut être sur une autre matiere, comme du fer-blanc sans changer de nom.

Ceintre ou *Cintre*, l'un & l'autre est usité & vient de la même étimologie *cinctus*, de *cingere* environner, & ou de *ceindre* & ceinture. Ce mot a deux significations, l'une pour la Charpente, l'autre pour le contour de la voûte qui a été formée sur la charpente. Dans la charpenterie il signifie ces assemblages de pieces de bois qui soutiènnent les aix & dosses sur lesquels on construit une voûte avec des briques ou du moilon ou des pierres de taille, jusqu'à ce qu'étant fermée elle puisse se soutenir sans ce secours.

Si le plancher qui sert de forme à la voûte est plat la Charpenterie qui se soutient ne s'appelle plus cintre, mais *Etayement*.

Dans le langage de la coupe des pierres, il ſignifie le contour arondi de la partie intérieure d'une voûte pris en un endroit déterminé, ou perpendiculairement à ſa direction, alors il s'appelle *l'arc-droit*, ou obliquement à l'arête d'une face biaiſe, alors il s'appelle *cintre de face* ou *arc de face*.

Celui de ces deux cintres qu'on a le premier en vûë pour tracer la voûte s'appelle *Cintre primitif*.

Celui qui résulte de cette premiere déterminaiſon s'appelle *Cintre ſecondaire*.

Par la nature des ſections cylindriques dans les voûtes biaiſes, ces deux cintres ſont de même hauteur, mais d'inégale largeur & contour, ſi l'un eſt circulaire l'autre eſt Elliptique, & ſi l'un & l'autre ſont Elliptiques l'un eſt plus allongé que l'autre, & leurs diviſions en vouſſoirs ſont proportionelles, celles du ſecondaire ſont aſſujeties à celles du primitif.

Les cintres conſiderez dans la figure de leur contour ont auſſi differens noms, celui qui eſt en demi cercle complet s'appelle *plein ceintre*. Celui qui étant ſuppoſé de largeur égale ne s'éleve pas à même hauteur que le demi cercle s'appelle *en anſe de panier* ou *ſurbaiſſé*. Celui qui dans la même ſuppoſition s'éleve au deſſus du demi cercle s'appelle *ſurhauſſé* ou *ſurmonté*.

Celui qui eſt d'un arc de cercle beaucoup moindre que ſa moitié, comme du quart ou du ſixiéme s'appelle *bombé*.

Cerce ou *Cherche*, l'un & l'autre eſt uſité, quelques-uns, parmi leſquels eſt Felibien, diſent *cherche*, je ſuis leur exemple par pluſieurs raiſons. 1.. Pour allier les deux premiers mots les plus uſitez. 2.° Pour éviter la dureté de la prononciation & l'équivoque de *cherche*. 3.° Pour conſerver dans l'écriture l'étimologie de ce mot, ſuivant le ſentiment de Daviler, qui le fait venir de l'Italien *Cerchio*. Je dis dans l'écriture, parce que dans la prononciation *Ch* ſe prononce comme un *K*, il faudroit dire *tcherque*, quoiqu'il en ſoit; c'eſt le modele d'un contour courbe découpé ſur une planche de volice mince ou autre matiere pour diriger le relief ou la cavité d'une pierre qu'on creuſe en le préſentant par dehors pour voir ce qu'il faut enlever; d'où il ſuit que ſon contour doit être le contraire de celui de la pierre, ſçavoir convexe pour une pierre concave, & concave pour une pierre convexe. Les *Calibres* dont nous avons parlé ſont ſouvent des eſpeces de *Cerches*.

Claveau du Latin *Clavis*, une clef, eſt un vouſſoir à doele plate, qu'on appelle ainſi parce qu'il ſe met de niveau, comme les milieux

des clefs des autres voûtes, s'il s'agit d'un platfond, ou en pente de surplomb, lorsqu'll s'agit d'une platebande rampante ou d'une Trompe plate.

Clausoir du Latin *claudere* fermer est une pierre quelconque, qui acheve une voûte ou un mur en fermant & bouchant le dernier espace qui restoit vuide.

Clef par analogie à son usage de fermer une voûte, est le dernier rang de voussoirs que l'on pose au sommet de la voûte pour appuyer ceux des côtez & la bander ; lorsque la clef excede le parement on l'appelle *clef saillante* ; lorsqu'elle excede la hauteur d'un bandeau on l'appelle *clef passante* ; lorsque la pierre qui est à l'intersection des Nervures d'une voûte Gotique s'abaisse au dessous en façon de Cul-de-lampe on l'appelle *clef pendante.* Il en est des bizarres qu'on appelle *Guimberges.*

Collet, c'est la partie la plus étroite d'une marche tournante du côté du noyau, s'il y en a un, ou sur le vuide du milieu, s'il n'y en a point.

Commissure en vieux François, usité par le P. Deran, du Latin *Commissura*, signifie un joint: il n'est plus en usage.

Compas d'Appareilleur est un instrument de fer ou de cuivre, fait à-peu-près comme un compas ordinaire, excepté que ses branches sont droites & plates, comme celles du récipiangle appellé *fausse équerre*, pour prendre l'ouverture des angles rectilignes & les transporter sur la pierre ; il a de plus qu'un simple récipiangle des pointes destinées à prendre des mesures de longueur & tracer des arcs comme les autres compas.

Compas à verge est un instrument pour tracer de grands arcs de cercle qu'on ne peut faire avec les compas d'Apareilleurs. Il consiste en une longue régle qu'on fait passer au travers de deux morceaux de bois ou de fer, qu'on appelle *poupées*, qui peuvent s'approcher ou s'éloigner comme l'on veut & être fixées par le moyen des vis. Chacune de ces poupées est terminée à un bout par une pointe de fer, qui sert l'une à fixer au centre, l'autre à tracer l'arc ; cet instrument vaut mieux qu'un cordeau ; parce qu'il ne peut ni se ralonger ni se racourcir dès qu'il est une fois réglé à la longueur.

Compas à Ellipse ou *à Ovale*, autre instrument composé du compas à verge & de deux poupées de plus, qu'on fait mouvoir dans une coulisse pratiquée dans une figure de croix pour une Ellipse entiere, ou de T pour tracer une demi Ellipse sur des arcs donnez. Voyez sa description pag. 138. & pl. 10. fig. 17.

Contre-clef, c'eſt un vouſſoir joignant la clef à droite ou à gauche.

Coquille par analogie à certaines coquilles de mer, eſt une voûte en quart de ſphère ouverte, dont le pole eſt au milieu du fond ſur l'impoſte, duquel s'élevent des rangs de vouſſoir qui s'élargiſſent comme les côtez des coquilles juſqu'à la face, elle ſert à couvrir les niches.

On appelle auſſi *Coquille* le parement inferieur des marches d'un eſcalier tournant délardées ſans reſſaut ou avec des petits reſſauts. C'eſt une ſurface *Hélicoide*.

Coude. Voyez *Jarret*.

Coupe, la coupe d'une pierre eſt la direction d'un lit ou d'un joint perpendiculaire à la ſurface droite ou courbe de la doele ou de la tête d'un vouſſoir, mais oblique au plafond dans les platebandes.

Couper ſignifie ordinairement ôter d'une pierre plus qu'il ne convient à la place qu'elle doit occuper, de ſorte que c'eſt la gâter en la rendant défectueuſe ou inutile. La couper à propos c'eſt la *tailler*.

Couper du trait, c'eſt faire un modele en petit avec de la craye, ou du plâtre, du bois ou autre choſe facile à couper, pour voir la figure des vouſſoirs, & s'inſtruire dans l'application du trait de l'épure ſur la pierre par le moyen des inſtrumens, comme *cherches*, *panneau*, *biveaux* & *equerres* dont on ſe ſert en grand.

Courbe Subſtantif ſignifie une ligne courbe : il y en a deux eſpeces, les unes *planes* les autres à *double courbure*. Les courbes planes ſont celles qu'on peut exactement tracer ſur un plan, leſquelles ſe réduiſent pour l'uſage de la coupe des pierres aux ſections coniques & aux ſpirales.

Les courbes à double courbure ſont celles qu'on ne peut tracer ſur une ſurface plane qu'en racourci, par le moyen de la projection, telles ſont la plûpart des arêtes des angles des enfourchemens des voûtes qui ſe rencontrent.

Couſſinet par analogie aux couſſins ſur leſquels on s'appuye pour ne pas ſe bleſſer, eſt le premier vouſſoir d'une voûte en arcade, qui a un lit de niveau, & celui de deſſus en coupe en pente, pour recevoir les ſuivans auſquels il ſert d'apui.

Corne de vache, eſpece de voûte en cône tronqué, dont la direction des lits ne paſſe pas au ſommet du cône.

Cû-de-four ſignifie une voûte ſphérique ou ſphéroïde de quelque cintre qu'elle ſoit, ſurhauſſé ou en plein ceintre, quoique les cûs-de-four dont elle tire ſon nom ſoient très-ſurbaiſſez. L'arrangement de

leurs vouſſoirs peut varier & leur donner differens noms, comme en *pendentif*, en plan de *voûte d'Arête*, &c.

D.

Débillarder, c'eſt pour la coupe des bois, enlever une partie en eſpece de priſme triangulaire ou approchant compriſe entre des lignes qui enferment une ſurface gauche.

Décintrer, c'eſt démonter les cintres de charpente quand la voûte eſt faite & les joints bien fichez.

Dégauchir, c'eſt former une ſurface plane en déterminant ſes extremitez par le moyen de deux régles qu'on regarde l'une par l'autre en fermant un œil pour voir ſi elles ne ſe croiſent point, faiſant enſorte que l'une ainſi regardée couvre l'autre exactement, ſans quoi elles ne ſont pas dans un même plan, mais ſur une ſurface Gauche.

Délardement, c'eſt pour les pierres la même choſe que le débillardement pour le bois, il ſe dit particulierement de l'amaigriſſement que l'on fait au deſſous des marches pour former l'intrados d'une rampe ou d'uue coquille d'eſcalier tournant.

Délit, c'eſt une eſpece de diviſion naturelle qui ſe trouve dans les pierres par couche, comme aux feüilles d'un livre; ainſi *poſer en délit*, c'eſt donner à une pierre une ſituation differente de celle qu'elle avoit dans la carriere d'où on l'a tirée. C'eſt une mal façon de poſer les clavaux ou vouſſoirs autrement que de lit en joint, comme ſi l'on chargeoit un livre ſur la tranche il eſt évident que le poids feroit effort pour écarter les feüilles, au lieu qu'il les appuye les unes ſur les autres lorſqu'on le charge ſur la joüe.

Il y a des pierres ſi maſſives qu'elles n'ont ni lit ni délit, tels ſont la plûp art des marbres, qu'on peut poſer comme l'on veut.

Démaigrir ou *amaigrir* une pierre, c'eſt en ôter pour rendre l'angle que font deux ſurfaces, plus aigus ou moins obtus.

Dérobement, c'eſt la maniere de tailler une pierre ſans le ſecours des panneaux par le moyen des hauteurs & profondeurs qui déterminent les bornes de ce qu'il en faut retrancher, comme ſi l'on dépouilloit la figure imaginée de ce qui la couvre. C'eſt dans ce ſens qu'on dit derober des feves. Le P. Dechalles n'a pas connu l'origine de ce mot lorſqu'il l'a traduit *per ſuffurationem*, il falloit dire, *per ſpoliationem.*

Deſcente, on appelle ainſi toutes les voûtes inclinées à l'horiſon.

Dévelopement, c'eſt l'extenſion des ſurfaces qui envelopent un vouſſoir ou une voûte, dont les parties contiguës ſont rangées de ſuite ſur une ſurface plane. Le dévelopement dans une épure ordinaire eſt l'extenſion de la doele, ſur les diviſions de laquelle on ajoûte les figures des panneaux de lit.

Quelques Ouvriers peu inſtruits, comme Blanchard dans ſon traité de la coupe des bois entendent par le mot de dévelopement la ligne courbe, & quelquefois l'angle naturel, qui eſt repreſenté en racourci dans la projection.

Ainſi il dit qu'*un* tel *angle* eſt le *dévelopement d'une* telle *ligne* qui en eſt le profil ou la projection horiſontale.

Doele ou *Douelle* du Latin *Dolium* un tonneau, ſignifie le parement interieur d'une voûte ou d'un vouſſoir creux, comme la doele d'un tonneau; on l'appelle auſſi *intrados*.

La ſurface plane qui paſſe par la corde de l'arc d'une doele s'appelle *Doele plate*, c'eſt une préparation à la formation d'une doele concave.

Doigt de biveau ſignifie ſelon le P. DERAN une de ſes branches [page 15.] Daviler l'appelle *Bras*, & moi branche.

Dreſſer une pierre, c'eſt l'équarrir ou la diſpoſer à recevoir le trait.

Droit, par un D majuſcule ſignifie perpendiculaire, qui eſt opoſé au biais. Ainſi on dit un arc Droit, quoique cet arc ſoit courbe, parce qu'on veut dire que ſon plan eſt perpendiculaire à la direction d'un berceau. On dit une porte Droite ou un berceau Droit, une deſcente Droite pour ſignifier que ſa direction n'eſt pas oblique à ſon entrée horiſontalement.

E.

Ebraſement ſignifie l'élargiſſement des côtez ou jambages d'une porte ou d'une voûte, tels ſont les bayes des fenêtres & abajours qui s'és'élargiſſent en dedans.

Echaſſe, c'eſt une régle de bois un peu large, dont les Apareilleurs ſe ſervent pour y marquer les lignes de hauteur de retombée & d'épaiſſeur dont ils ont beſoin pour les porter commodément dans le chantier, où ils voyent les pierres qui leur conviennent & peuvent en donner les meſures.

Elevation, c'eſt la repréſentation d'un corps deſſiné ſuivant ſes meſures verticales & horiſontales exterieurement apparentes ſans égard à la profondeur.

Enfourchement, c'eſt l'angle formé par la rencontre de deux doeles de voûtes qui ſe rencontrent, où les vouſſoirs qui les lient ont deux Branches comme une fourche, dont l'une eſt dans une voûte & l'autre dans la contiguë.

Entrecoupe, intervale vuide de deux voûtes qui ſont l'une ſur l'autre, enſorte que la doele de la ſuperieure prend naiſſance ſur l'extrados de l'inferieure, qui eſt quelquefois ouverte comme au dome des invalides à Paris, où la calote ſe détache des côtez de la tour du dome.

On fait ſouvent des entrecoupes pour ſuppléer à la charpente d'un dome, en élevant une voûte pour la décoration exterieure, au deſſus de la premiere qui paroîtroit trop écraſée au dehors, comme à S. Pierre de Rome & en pluſieurs Egliſes d'Italie.

Epure, apparemment du verbe *épurer* mettre au net, eſt le deſſein d'une voûte tracé ſur une muraille ou ſur un plancher, de la grandeur dont elle doit être exécutée, pour y prendre les meſures néceſſaires à la conſtruction des vouſſoirs.

Un pareil deſſein pour la charpente change de nom, il s'appelle *Etelon*.

Equarrir une pierre ou une piece des bois, c'eſt lui faire des ſurfaces à l'équerre l'une à l'autre.

Equarriſſement, tailler par équarriſſement eſt une maniere de tailler les pierres ſans le ſecours des *panneaux* les ayant ſeulement préparées en les équarriſſant, à y appliquer les meſures des hauteurs & des profondeurs qu'on a trouvé dans le deſſein de l'épure pour chaque vouſſoir; on l'appelle auſſi *par dérobement* comme nous l'avons dit à ce mot.

Etayement, plancher pour ſoutenir les voûtes en *platfond*, il tient lieu du cintre dans les voûtes concaves.

Extrados du Latin *extra* dehors, c'eſt la ſurface extérieure d'une voûte, lorſqu'elle eſt réguliere comme *l'intrados*, ſoit qu'elle lui ſoit paralele ou non. La plûpart des voûtes des ponts antiques étoient *extradoſſez* d'égale épaiſſeur.

F.

Fauſſe Coupe, c'eſt la direction d'un joint de tête oblique à l'arc du cintre, auquel il doit être perpendiculaire pour être en bonne coupe dans les voutes concaves,

Mais ſi la voûte eſt plate comme aux *platebandes* ce doit être tout le contraire, la bonne coupe doit être oblique au platfond, pour que

les clavaux ſoient faits plus larges par le haut que par le bas ; car ſi les joints ſont perpendiculaires à la platebande les clavaux deviennent d'une égale épaiſſeur. Alors ils ſont en *fauſſe coupe*, parce qu'ils ne peuvent ſe ſoutenir que par le moyen des barres de fer qu'on leur donne pour ſupport, ou par une bonne coupe cachée ſous la face au dedans à quelques pouces d'épaiſſeur, comme on en voit aux portes du vieux Louvre à Paris.

Fauſſe équerre s'entent ordinairement du compas d'Apareilleur, quoi qu'il ſignifie en general un récipiangle, c'eſt-à-dire, un inſtrument propre à meſurer l'ouverture d'un angle, ceux de bois s'appellent *Sauterelle*.

Fermer une voûte, c'eſt y mettre le dernier rang de vouſſoirs, qu'on appelle collectivement *la clef* par la même metaphore ; le dernier vouſſoir s'appelle *Clauſoir* du Latin *claudere* fermer.

Formeret. Voyez *Nerf*, il ſignifie auſſi quelquefois le cintre de la jonction d'une voûte, à un mur, chez DERAN, page 440.

Foulée, c'eſt un giron de marche, ainſi appellé parce que c'eſt la partie qu'on foule aux pieds.

G.

Gauche ſignifie toute ſurface qui n'a pas quarte angles dans un même plan, enſorte qu'étant regardée en profil, les cotez oppoſez ſe croiſent, telle eſt une portion de la ſurface d'une vis & de la plûpart des arrieres vouſſures. Ce terme eſt de tous les Arts tant de maçonnerie que de Charpenterie & menuiſerie ; dans celui-ci Blanchard l'applique auſſi à la ligne courbe à double courbure, qui eſt ſur une ſurface.

Gras ſignifie un excès d'épaiſſeur de pierre ou de bois ou d'ouverture d'angle plus grand qu'il n'eſt néceſſaire pour le lieu où la pierre ou bien le morceau de bois doit être placé, le défaut oppoſé s'appelle *maigre*.

H.

Helice du Grec *Eliſo* circumvolvo, eſt une ligne courbe qui tourne autour d'un arc en s'élevant, comme la vis autour de ſon noyau.

I.

Jarret, imperfection d'une direction de ligne ou ſurface, qui fait une ſinuoſité ou un angle. Le jarret ſaillant s'appelle *coude*, le rentrant

s'appelle

s'appelle *Pli.* Une ligne droite fait un jarret avec une ligne courbe, lorsque leur jonction ne se fait pas au point d'atouchement.

Jauger, c'est appliquer une mesure d'épaisseur ou de largeur vers les bouts d'une pierre pour en faire les arêtes ou les surfaces opposées paralleles. Jauger une pierre signifie souvent la même chose que la *retourner.* Voyez *retourner.*

Imposte du Latin *impositum* mis dessus, est le rang ou plutôt le lit de pierre sur lequel on établit la naissance de la voûte ou le *Coussinet. Imposte* signifie aussi cet ornement de moulures qui couronne un Piedroit sous la naissance d'une Arcade, lequel sert de base à un autre ornement cintré, appellé *Archivolte.*

Intrados. Voyez *Doele.*

Join a differentes significations, c'est 1.° l'intervale plein ou vuide qui reste entre deux pierres contiguës; dans ce sens on dit *petit join*, *grand join.* 2.° Il se prend pour la ligne de division des cintres en voussoirs; ainsi on dit *join en coupe*, *join quarré*, *join de Téte*, *join de Lit*, *join de Doele.* Où il faut remarquer que quoique les joins de Lits soient des divisions longitudinales de la doele, on n'entend par *joins de Doele* que les joins transversaux. 3.° Le mot de *join* signifie aussi quelquefois la surface d'une pierre inclinée & cachée dans une voûte, mais alors au lieu de dire *join en lit*, il faut dire *Lit en join.*

L.

Layer du Latin *lævigare* polir, c'est tailler la pierre avec une espece de hache *bretelée*, c'est-à-dire dentée en façon de scie qu'on appelle *laye*, laquelle rend la surface unie quoique rayée de petits sillons uniformes qui lui donnent une apparence agréable.

Lierne, c'est une des nervures des voûtes Gotiques, qui lie le nerf appellé *Tierceron* avec celui de la Diagonale qu'on appelle *Ogive.*

Ligne, ce mot en Architecture a plusieurs significations, pour notre sujet elles se réduisent à la verticale appellée *aplomb*, à l'horisontale de *niveau* & à l'inclinée en *Talud.*

Limon du Latin *limus* tourné de travers, signifie la pierre ou piece de bois qui termine & soutient les marches d'une rampe, sur laquelle on pose une balustrade de pierre ou de fer pour servir d'apui à ceux qui montent, cette piece est droite dans les rampes droites & gauches par ses surfaces, supérieure & inférieure dans les parties d'escaliers tournantes.

Lit, par analogie au lit sur lequel on se couche, se dit 1.° de la situation naturelle de la pierre dans la carriere. 2.° De la surface sur laquelle on pose une pierre, soit activement soit passivement; celle sur laquelle elle s'appuye s'appelle *lit de dessous*; celle sur laquelle une autre pierre s'appuye s'appelle *lit de dessus*; lorsque ces surfaces sont

inclinées à l'horiſon, comme dans les vouſſoirs & clavaux, on les appelle *lit en joint.*

Lunette, portion de voûte percée dans une autre dans laquelle elle forme une eſpece de figure de Croiſſant de Lune d'où elle tire ſon nom.

M.

Maigre, par analogie à la maigreur des animaux, ſe dit des pierres dont les angles ſont plus aigus ou moins obtus qu'ils ne doivent être, de ſorte qu'elles n'occupent pas entierement la place à laquelle elles ſont deſtinées.

Marche ſignifie un degré, ſa partie horiſontale s'appelle *Giron* de l'Italien *girare* tourner; parce que la plûpart des anciens eſcaliers étoient tournans, la partie verticale en parement s'appelle contremarche, lorſque le giron eſt d'inégale largeur la partie la plus étroite s'appelle le *Collet*, & la plus large la *queuë.*

N.

Nerf ou *Nervure*, par analogie aux nerfs des animaux, eſt une arcade de pierre en ſaillie ſur le nud des voûtes Gotiques pour en appuyer & orner les angles ſaillans par des moulures & fortifier les pendendentifs, comme les nerfs font la force des animaux. Un des plus beaux morceaux que j'aye vû en ce genre eſt la voûte de l'Egliſe de *Velen* ou *Bethleem* à Lisbone, où les nervures ſont de marbre travaillées, entrelaſſées & exécutées avec beaucoup d'art. On donne differens noms aux nervures par rapport à leur ſituation.

Les nerfs qui traverſent une voûte diagonalement s'appellent croiſées *d'Ogives*, ceux qui la traverſent perpendiculairement s'appellent *Arcs doubleaux*, ceux qui la traverſent obliquement entre les arcs doubleaux & les ogives s'appellent *liernes* & *tiercerons*, ceux qui en ſuivent la direction en traverſant d'un pilier à l'autre s'appellent *Formereſt.*

Noyau, c'eſt le milieu d'un eſcalier à vis ou d'une voûte tournante de niveau qu'on appelle pour cela voûte *ſur le noyau*, ou tournante & de plus rampante qu'on appelle *vis St. Giles*; le noyau ſuit ordinairement la figure du lieu dans lequel il eſt, ſi c'eſt dans une tour ronde, il eſt un pilier rond, il eſt quarré ſi la tour eſt quarrée.

O.

Ogive ou *Augive* ſignifie chez le P. Deran les voûtes Gotiques en *tiers point.* Ce mot, ſelon ma conjecture, vient de l'Allemand *Aug* qui ſignifie l'œil; parce que les arcs des cercles des cintres de voûtes Gotiques font des angles curvilignes ſemblables à ceux des coins de l'œil; quoique dans une poſition differente.

Daviler reſſerre la ſignification de ce terme aux croiſées d'ogives, mais

mal à propos ; car anciennement on disoit indifferemment voûte *d'Ogive*, voûte *Moderne* ou en *tierspoint*.

P.

Panache, c'est une voûte en saillie ouverte par devant comme les trompes, élevée sur un, ou deux angles rentrans pour porter en l'air une portion de Tour creuse; c'est ainsi que les Domes des Eglises modernes sont portez sur quatre Panaches élevez sur les angles de la croisée de la Nef avec les Bras de la croix.

Lorsque le Panache est établi sur un seul angle sa figure est ordinairement un triangle sphérique terminé par trois arcs, dont deux sont verticaux en quart de cercle ou d'Ellipse & le troisiéme horisontal qui sert de base à la Tour.

Lorsque le panache est sur un Pan coupé, c'est une surface concave quadrilatere irreguliere.

Ce nom peut venir du Latin *pandatio* & de *pandare* qui signifie chez Vitruve [l. 6. Chap. 11.] courber sous le fais.

On ne doit pas confondre avec Daviler les noms de Panache & de pendentif, ce sont des choses differentes. Voyez *pendentif*.

Panneau, de la même étimologie *pando*, est le modele d'une des surfaces d'un voussoir taillé sur du bois, du carton ou autre matiere mince, pour être appliqué sur la pierre, & servir à tracer le contour d'un *Lit*, d'une *Doele* ou d'une *Tête*; c'est leur usage qui leur donne les noms de *Panneau de lit*, &c.

Panneau flexible est celui qui est fait sur du carton, du fer-blanc, ou avec une lame de plomb pour pouvoir être plié & appliqué sur une surface concave ou convexe, cylindrique ou conique.

Parallele en un ridicule jargon d'Ouvrier signifie quelquefois *dans un même plan*; ainsi Blanchard dans son traité de la coupe des bois, imprimé à Paris en 1726. dit qu'une *courbe est parallele à une perpendiculaire droite, à une horisontale, & à un angle* voyez pag. 73. & par-tout ailleurs où il est question de la même expression.

Parement surface apparente.

Pendant petit voussoir des voûtes Gotiques sans coupe, fait à l'équerre.

Pendentif espece de panache qui est le quart d'une demi croisée de voûte Gotique, compris entre l'ogive & le formeret.

Plan selon les Geometres signifie une surface plane infiniment prolongée, si l'on veut, c'est dans ce sens qu'on dit que des bases des corps séparez sont dans un même plan. Lorsque l'on dit qu'une telle ligne est dans le plan horisontal ou dans un plan vertical, c'est la même chose que de dire dans le langage des arts de *niveau* ou *aplomb*.

Ce qui n'est ni de niveau ni aplomb sera dit *incliné à l'horison*, & en terme de l'art, en talud, ou en glacis, ou en descente.

Plan en terme d'Architecture signifie la projection d'un corps sur une

surface horisontale & quelquefois sur une surface inclinée, alors il s'appelle *plan suivant la rampe.*

On l'appelle *Plan Geometral* ou *Ichnographie*, lorsqu'il n'exprime que les distances horisontales, & *plan relevé*, lorsqu'on y ajoute une élevation pour mieux exprimer ce qu'on veut représenter sans s'embarasser des mesures de hauteur.

Le plan horisontal que nous appellons toujours projection horisontale par les raisons que nous en avons donné au troisiéme Livre, est le premier dessein nécessaire pour la coupe des pierres.

Platebande, c'est pour la coupe des pierres une voûte droite & plane, de niveau ou rampante, qui sert de linteau & de fermeture à une porte, à une fenêtre ou à toute autre baye, comme d'architrave sur les entrecolonnemens. Les pierres qui en sont les parties s'aplent *Clavaux* & non pas voussoirs comme aux autres voûtes. La longueur de la platebande entre ses piedroits s'appelle *portée*, c'est le genre de voûte qui a le plus de poussée, c'est-à-dire, qui fait le plus d'effort pour renverser ses piedroits; parce que les pierres y sont dans la situation la plus forcée.

Plomée selon le P. Derand par corruption de *plombé* est une ligne tirée à plomb.

Plumée est une excavation faite dans la pierre, au marteau ou avec le ciseau, suivant une cherche ou une régle en quelque position qu'elle soit aplomb ou de niveau ou inclinée. Ce nom vient apparemment de la ressemblance de la découverte que l'on fait de la peau d'un oyseau en ôtant la plume.

Porte, c'est une baye qui prend le nom 1.° du mur dans lequel elle est percée, comme *Porte en Tour ronde*, si elle est convexe; *Porte en Tour creuse*, si elle est concave. 2.° De l'endroit où elle est placée, dans un angle rentrant, c'est une *Porte dans l'Angle*, dans un saillant, c'est une *Porte sur le Coin.* 3.° De la direction, comme *Porte Droite*, qui est perpendiculaire à sa direction, *Biaise* si elle lui est oblique, *Ebrasée*, si ses piedroits s'ouvrent en dehors, comme aux Eglises Gotiques de Notre-Dame de Paris, de Reins, &c.

Portée, intervale de deux piedroits dans une platebande.

Poussée, c'est l'effort que fait une voûte pour écarter ses piedroits, lequel est d'autant plus grand que la courbure approche de la ligne droite; ainsi le cintre en anse de panier surbaissé, pousse plus que le plein cintre; celui-ci plus que le surbaissé; celui-ci plus que le *tiers points* Gotique, c'est sans doute par cette raison que les anciennes Eglises sont la plûpart en tiers point, cette construction d'ailleurs

donnant la facilité d'employer de très-petits vouſſoirs, qui coutoient peu de tranſport.

Q.

Quarrément ſignifie à angle droit, a l'équerre.

Quartier a pluſieurs ſignifications. Il ſe prend pour une pierre de taille d'une certaine groſſeur. Il ſignifie auſſi le quart du tour d'un eſcalier, alors on ajoute *Quartier tournant.* Si cette partie eſt arondie & ſaillante hors d'un mur, on l'appelle *Quartier de vis ſuſpenduë*, qui n'eſt ſoutenuë en l'air que par l'artifice de la coupe des pierres.

R.

Racordement ſe dit de la réunion de deux ſurfaces pour qu'elles paroiſſent continuës, ou que leur jonction [ſi elles font un angle entr'élles] faſſe une arête en ligne droite, ou d'une courbure de cintre réguliere & uniforme, on dit pour le verbe *racorder.*

Ragréer, c'eſt enlever avec les outils convenables les boſſes ou balevres qui ſe trouvent dans les paremens & dans les joints, pour les rendre unis, propres & agréables à la vûë.

Ralongée ſe dit d'une ligne courbe à laquelle on donne plus d'extenſion ſur un diametre ou une corde qu'elle n'en avoit, ſans changer ſa profondeur. On dit *Cherche ralongée.*

Rampant. Voyez *Arc rampant.*

Rampe, inclinaiſon à l'horiſon d'une ligne ou d'une ſurface droite ou courbe; avec degrez; ou ſans degrez.

Reculement ſe dit ordinairement de la diſtance d'une ligne verticale à une ligne inclinée, comme de l'aplomb au talud, ou de l'écartement d'une ligne courbe à l'égard de la tangente, comme à une porte en Tour ronde ou creuſe à l'égard de ſa corde ou d'une parallele.

Reins de voûte, c'eſt la partie vuide ou pleine qui eſt entre la moitié d'un arc & ſon piedroit, depuis la naiſſance juſques vers le ſommet. Les reins des voûtes Gotiques ſont vuides.

Remenée, terme peu uſité qui vient de l'Italien *Remenato*, ce n'eſt ſelon d'Aviler qu'une ſorte d'arriere vouſſure; mais ſa propre ſignification eſt notre *bombé* d'un grand arc de cercle moindre que la moitié, comme il eſt clairement expliqué au premier Livre de Palladio Ch. 24. à REMENATO *che coſi chiamano i volti che ſono di portione di Cerchio*

& non arrivano à semi-circolo, & preuve qu'il ne l'entend pas seulement d'une arriere voussure, c'est qu'il l'applique à la partie d'une voûte sphérique sur un quarré, laquelle est au dessus des pendentifs.

Renfondrement, terme de menuiserie suivant Blanchard, au lieu de renfoncement.

Repere du Latin *reperire* retrouver, c'est une marque que l'on fait sur une pierre pour reconnoître une division ou un trait dont on a besoin pour tailler. Ainsi on dit *repairer* au lieu de marquer un point ou une ligne.

Reprendre, c'est refaire une partie de voussoir qui excede l'étenduë qu'elle doit avoir.

Retombée, c'est la même ligne qu'on appelloit anciennement *abatuë*, dont nous avons parlé, c'est l'intervale du niveau entre la naissance inferieure d'un arc, & l'aplomb abaissé de son extrémité supérieure.

On appelle *premieres Retombées* les voussoirs de la naissance d'une voûte, qui ont des lits si peu inclinez qu'ils ne glissent pas & se soutiennent les uns sur les autres sans le secours des ceintres de Charpente, tels sont les 5. ou 6. premieres assietes des voussoirs des Arcades d'un grand diametre, quelquefois plus.

Retondre une pierre, c'est enlever une legere épaisseur dans toute une surface pour la perfectioner, c'est une espece de ragrément.

Retour d'équerre, c'est un angle Droit, on dit se *retourner d'équerre* pour faire une ligne ou une surface perpendiculaire à une autre.

Retourner une pierre, c'est la jauger ou lui faire une surface parallele ou à-peu-près à un lit ou à un parement donné.

S.

Sauterelle, instrument composé de deux régles de bois assemblées par un bout comme la tête d'un compas pour être mobiles, & propres à prendre l'ouverture de toutes sortes d'angles rectilignes droits, aigus ou obtus. C'est un récipiangle pour transporter sur la pierre ou sur le bois l'angle d'une encognure ou d'un trait de l'épure, plus usité dans la coupe des bois que dans celle des pierres, ou l'on se sert pour la même fin du compas d'Appareilleur, qui est une espece de sauterelle à laquelle on a ajouté des pointes pour servir de fausse équerre & de compas suivant les occurrences.

Simbleau ou plutôt *Cingleau* par corruption du Latin *Cingulum*, un cordon, est le cordeau qui sert à tracer les arcs de cercle d'une étenduë plus grande que les branches des plus grands compas, soit à

branches soit à verges. Les meilleurs singleaux sont des chaînettes qui ne sont pas sujettes à s'alonger comme les cordes.

On appelle aussi simbleau une perche immobile par un de ses bouts qui sert à tracer un grand arc de cercle.

Singliots sont les deux foyers d'une Ellipse ou l'on attache les bouts d'un cordeau égal au grand axe pour tracer cette courbe par le mouve-mouvement continu, qu'on appelle le *Trait ou Jardinier.*

Somier, par analogie au sommet, c'est la premiere pierre d'une plate-bande qui porte à plein au sommet du piedroit où elle forme le premier lit en joint, & l'apui de la butée des clavaux de chaque côté, pour les tenir suspendus sur le vuide de la baye, d'où ils ne peuvent s'échaper qu'en écartant les somiers. La coupe ou inclinaison de leur lit en joint sur l'horison est ordinairement de 60. degrez; parce qu'on a coutume de la tirer du sommet d'un triangle équilateral.

Surbaisser, c'est n'élever une courbure de cintre qu'au dessous du demi cercle, c'est-à-dire, faire un cintre Elliptique, ou en ovale dont le grand axe soit horisontal.

Surhausser, c'est au contraire élever le cintre au dessus du demi cercle, ou faire une ovale dont le grand axe soit aplomb par le milieu de la clef.

Surplomber, c'est faire pencher une ligne ou une surface à angle aigu avec l'horison.

T.

Taluder, c'est au contraire faire un angle obtus avec l'horison.

Talud, *Talus* ou *Talut*; le premier paroît plus naturel, si l'on doit dire taluder suivant l'usage, car on ne dit jamais *taluser*, & quoique Daviler dise *taluter*, je ne l'entend point dire parmi les Artistes; M. Gautier, Directeur des ponts & chaussées, écrit comme nous *talud* dans ses Traitez des Ponts & des Chemins, ce mot vient du Latin *Talus*, qui signifie le talon.

C'est l'inclinaison d'une ligne ou d'une surface au-delà de l'aplomb en angle obtus, tout au plus jusquà l'angle de 135. degrez; car dès que la surface est plus inclinée, cette inclinaison s'appelle en *Glacis.*

Tambour est une pierre ronde en portion de cylindre qui est une partie de fust de colonne ou de pilier, qu'on n'a pû faire d'une piece faute de pierre assez grande. Ce mot vient de la figure de la Quaisse dont on se sert dans les Troupes pour faire le bruit du signal de marche, d'assem-

blée ou d'autre manœuvre, parce qu'on l'appelloit anciennement Tambour, au lieu qu'aujourd'hui ce nom a passé à l'homme qui frape dessus pour en tirer le son.

Tas de charge, c'est une saillie de pierres dont les lits, avancant les uns sur les autres, font l'effet d'une voûte de sorte qu'il faut des pierres longues pour balancer la partie qui est sans apui; mais ce genre d'ouvrage n'est bon qu'en petit ou seulement pour les premieres pierres de la naissance d'une voûte.

Tasser se dit de l'afaissement d'une voûte, dont la charge fait diminuer la hauteur & resserrer les joints.

Tasté, ligne tastée est celle qu'on trace à la main pour voir l'effet d'une courbure.

Tierceron, c'est un nerf des voûtes d'ogives, située entre le formeret ou Arc - Doubleau & celui d'ogive en diagonale.

Tour ronde ne signifie pas toujours une tour mais tout parement convexe de mur cylindrique ou conique, *Tour creuse* est le concave.

Tracer à la main, c'est déterminer à vûë d'œil le contour d'une ligne courbe, ou en suivant plusieurs points donnez par intervale, ou en corrigeant seulement par le goût du dessein une ligne courbe, qui ne satisfait pas la vûë, comme une doucine composée d'arcs de cercles mal assemblez, doit être encore tracée à la main.

Lorsqu'on a plusieurs points donnez pour une ligne courbe il convient mieux de se servir d'une régle pliante que de tracer à la main, le contour en est plus net.

Trainer, c'est faire méchaniquement une ligne parallele à une autre ligne donnée droite ou courbe, en trainant le compas ouvert de l'intervale requis d'une ligne à l'autre, de maniere qu'une de ses pointes parcoure la ligne donnée, & que l'autre pointe ou plutôt la ligne qu'on peut imaginer passer par ces deux points, soit toujours perpendiculaire ou également inclinée à la ligne donnée, ou à sa tangente si elle est courbe. Les Menuisiers au lieu de compas se servent pour cette operation d'un instrument qu'ils appellent *Trusquin*.

Trait à l'égard de la coupe des pierres signifie en general tout dessein qui conduit aux moyens nécessaires pour parvenir à la formation d'une voûte, soit plan, profil, élevation ou dévelopement. Ce terme est plus étendu que celui d'épuré, en ce qu'il s'entend du dessein en petit & en grand, au lieu que l'épure ne signifie que celui de grandeur naturelle sans réduction.

On dit *couper du trait* pour exprimer l'étude que l'on fait avec de la craye, du platre ou autre matiere facile à couper, qu'on taille en petits voussoirs

voussoirs de la même maniere que si on exécutoit une voûte en grand, pour apprendre à joindre la theorie à la pratique, & concevoir plus facilement l'effet des Traits dont on s'est servi, soit aussi pour sentir le plus ou le moins de commodité des differentes manieres qu'on a inventé en se servant des panneaux ou en taillant par équarrisement.

Trait quarré, c'est suivant le langage des Ouvriers la maniere de faire une perpendiculaire à une ligne donnée. Si cette ligne est courbe comme un cercle ou une Ellipse la perpendiculaire à sa tangente s'appelle *trait quarré sur la ligne* Courbe, & *au bout de la ligne courbe* lorsqu'elle l'est à une de ses extrémitez.

Trompe, c'est ordinairement une voûte de la figure d'une moitié de cône qui se présente par sa base, comme le *Pavillon* d'une trompette ou Cor-de-chasse, qui est cette espece d'entonnoir par où sort le bruit du son, & parcequ'anciennement cet instrument s'appelloit Trompe, on a donné le même nom à la voûte qui en imite une partie, cette étimologie est naturelle & montre la puérilité de l'imagination de ceux qui disent avec Daviler, que ce nom vient de ce que la voûte trompe & surprend ceux qui la regardent sans connoissance de l'artifice de son appareil.

On appelle aussi du même nom des petites voûtes en portion de sphère qu'on fait aux angles saillans pour en émousser le pied & soutenir le haut en l'air. Alors on les appelle *Trompe en Niche.*

Il y a differentes sortes de trompes, dont les noms viennent ou de leurs situations ou de leurs figures.

A l'égard de la figure il en est, comme je viens de dire, de coniques & de sphériques.

La conique Droite s'appelle *trompe fondamentale*, chez le P. DERAN.

La sphérique s'appelle *Trompe en niche.*

Lorsque la face de l'une ou de l'autre est convexe on l'appelle *Trompe en tour Ronde*, si elle est concave *Trompe en tour creuse*, si la face est brisée en plusieurs superficies planes on l'appelle *Trompe à pan*, si les impostes sont d'inégale hauteur on l'appelle *Trompe rampante*, si la face est ondée & les impostes rampantes on l'appelle *Trompe d'Anet.*

A l'égard de la situation, si elle est dans un angle saillant, on l'appelle *Trompe sur le coin*, si elle est dans un angle rentrant, *Trompe dans l'Angle.*

Trompillon, c'est la naissance du milieu d'une trompe, qui est au sommet du cône dans les coniques, ou au pole de la sphère dans les sphériques, c'est une pierre d'une seule piece, qu'on est forcé de faire ainsi pour occuper la place de plusieurs extrémitez de voussoirs en pointe, qui seroient tellement aigus qu'on ne pourroit les tailler & les poser sans risque de les casser.

On appelle aussi *Trompillons* les petites trompes faites de plusieurs pieces sous les quartiers tournans de certains escaliers.

V.

Vis d'escalier, c'est un arrangement de Marches de degrez au tour d'un pilier qu'on appelle le *noyau* de la vis, quelquefois le noyau de la vis est suprimé, les marches alors ne sont soutenuës que par leur queuë dans le mur de la Tour, & en partie sur celles qui sont de suite dès le bas, alors on l'appelle *vis à jour.*

Si l'escalier à vis dans une tour ronde est voûté en berceau tournant & rampant, on l'appelle *Vis St. Giles ronde.*

Si la tour est quarrée, le noyau étant aussi quarré, chaque côté étant voûté en berceau irrégulier d'une figure en quelque façon torse, on l'appelle *vis St. Giles quarrée.*

Voussoir, c'est une pierre qui fait partie d'une voûte concave de quelque figure qu'elle soit, cylindrique, conique, sphérique ou annulaire, son étimologie vient apparamment du mot Latin *volutus* tourné en rond.

Les voussoirs qui forment la naissance d'une voûte s'appellent *Coussinets*, ceux qui sont à son sommet s'appellent *Clefs.*

Lorsqu'ils sont terminez en haut par une partie qui déborde leur queuë on les appelle *voussoirs à Crossettes.*

Lorsqu'ils se divisent en deux parties pour lier deux voûtes, qui font un angle saillant ou rentrant, on les appelle *voussoirs à branches.*

Lorsqu'un voussoir est suivi d'un autre en continuation, on l'appelle *voussoir sans fin*, tels sont ceux des arches du pont royal à Paris.

Voussure signifie toute sorte de courbure en voûte, mais particulierement ces portions de voûte qui servent de base aux platfonds à la mode.

Les voussures qui sont au dedans d'une baye de porte ou de fenêtre derriere la fermeture s'appellent *Arrieres-voussures*, il en est de differente figure comme nous l'avons dit à ce mot.

Voûte du Latin *Volutum* tourné en rond, signifie toute sorte de couverture de maçonnerie ou de pierre de taille qui se soutient en l'air entre ses piedroits, par l'arrangement & la figure des parties qui la composent.

Les voûtes propres à couvrir de grands apartemens s'appellent *Maîtresses voûtes* pour les distinguer de celles qui ne peuvent servir qu'à couvrir de petites parties, comme les trompes, les arrieres voussures & les niches.

Quoique les voûtes puissent être variées d'une infinité de façons, on peut les réduire en sept ou huit especes, sçavoir en planes, cylindriques, coniques, sphériques, annulaires, hélicoïdes, mixtes & irrégulieres. C'est dans cet ordre qu'on les a rangé dans le Livre suivant, où l'on donne la maniere de les faire.



TABLE DES TITRES DU PREMIER TOME.

DISCOURS PRELIMINAIRES.

LIVRE I.

PREMIERE PARTIE.

* Notez *qu'il y a faute au titre du Livre.*

PROBL. VIII.

SECONDE PARTIE DU SECOND LIVRE.

TROISIEME PARTIE DU SECOND LIVRE.

LIVRE TROISIEME.

FIN.





